Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 30: Ein Affe tippt zufällig (d.h. jede Taste tritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf) und unendlich oft auf einer Schreibmaschine. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das er dabei mindestens einmal die Bibel fehlerfrei tippt?

Aufgabe 31: Es sei $(X_n)_n$ eine unabhängige Folge zentrierter (d.h. $E(X_i) = 0$), integrierbarer, reeller Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Man zeige: Genügt die Folge (X_n) dem schwachen Gesetz der großen Zahlen, so gilt $\frac{1}{n}X_n \xrightarrow{P} 0$ für $n \to \infty$.
(Hinweis: Konvergiert Z_n gegen Z stochastisch und Y_n gegen Y stochastisch, dann konvergiert $Z_n + Y_n$ gegen $Z + Y$ stochastisch.)

Aufgabe 32: Es seien (X_n) und (Y_n) Folgen integrierbarer reeller Zufallsvariabler mit $E(X_n) = E(Y_n)$ für alle $n \geq 1$. Weiter gelte

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n \neq Y_n\} < \infty,$$

und die Folge (X_n) erfülle das starke Gesetz der großen Zahlen. Zeigen Sie, dass dann auch (Y_n) dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt.

Aufgabe 33: Es sei (U_n) eine Folge unabhängiger und $\lambda^1|_{[0,1]}$-verteilter ZV und $f \in \mathcal{L}^1(\lambda^1|_{[0,1]})$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(U_i) = \int_{[0,1]} f(x) d\lambda^1(x)$$

gilt.

Abgabe: Dienstag, den 22.06.