Lehrstuhl IV
Stochastik & Analysis

Fachschaft Mathematik Uni Dortmund

Fachschaft WiMa

Stochastik II

Wahrscheinlichkeitstheorie I

Skriptum nach einer Vorlesung von Hans-Peter Scheffler

Letzte Änderung: 26. November 2002

Gesetzt mit LaTeX und LyX

Arbeitsversion

Vorwort:

Dieses Script wurde in Zusammenarbeit der Fachschaften Mathematik & WirtschaftsMathematik mit dem Lehrstuhl IV der Universität Dortmund erarbeitet. Es basiert auf der Vorlesung Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie I), gelesen von H-Doz. Dr. H.-P. Scheffler in den Wintersemestern 1998/99 und 2000/01. Es ist als Weiterführung zum Vorlesungscript Stochastik I (Wahrscheinlichkeitsrechnung) gedacht. Die Kenntnis von Stochastik I ist jedoch nicht zwingend erforderlich, da benötigte Definitionen und Rechentechniken wiederholt werden. Zu den jeweiligen Kapiteln sind die Aufgaben der Übungszettel (Wintersemester 2000/01) aufgeteilt worden. Die Lösungen der Aufgaben werden nicht ins Netz gestellt, um den zukünftigen Übungsbetrieb Stochastik II nicht überflüssig zu machen. In Verweisen werden die Nummern der Sätze, Definitionen, ... in runden Klammern gegeben, z.B. (1.10) oder (a).
Ich habe versucht, alles richtig wiederzugeben, es ist jedoch „wahrscheinlich", daß ich Fehler gemacht habe. Deshalb wendet euch bitte mit Fehlermeldungen, Anregungen zuerst an mich:

Hans-Peter Scheffler

stk@fsmath.mathematik.uni-dortmund.de

Die Verwendung des „ß" ist in voller Absicht geschehen, also kein Fehler. Fehlermeldungen bitte so detailliert wie möglich, das heißt gebt bitte immer das sich auf den Seiten befindliche Revisionsdatum mit an.

Bei den Mitarbeitern des Lehrstuhls IV wollen wir uns im Namen der Fachschaft recht herzlich für ihre Unterstützung bedanken. Ferner gilt unser Dank Thorsten Camps für seine tatkräftige Mithilfe.

Der Setzer

STK

Inhaltsverzeichnis

0. Kapitel: Motivation

0.1 Problem:

Ein Experiment, das eine zufällige reelle Zahl X_n als Ergebnis hat, wird sehr oft wiederholt. Man interessiert sich zum Beispiel für das Verhalten von $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

0.2 Beispiele:

- $X_i \mathrel{\widehat{=}}$ Ergebnis eines Würfels $\Rightarrow$ S_n Würfelsumme
- $X_i \mathrel{\widehat{=}}$ Wappen/Zahl (0/1) $\Rightarrow$ S_n Anzahl, wie oft Zahl geworfen
- $X_i \mathrel{\widehat{=}}$ Gewinn/Verlust beim Glücksspiel $\Rightarrow$ S_n Kapitaländerung nach n-ten Spiel
- $X_i \mathrel{\widehat{=}}$ Messungen, usw...

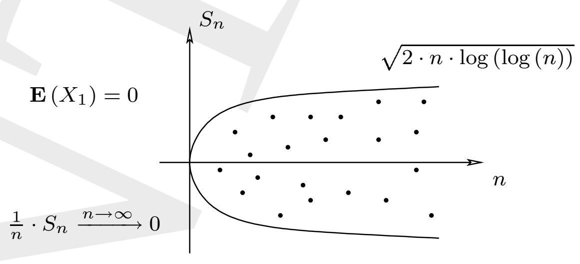
0.3 Fragen

(1) Existenz eines mathematischen Modells zur Beschreibung dieses Problems, das heißt Konstruktion von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ auf geeignetem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. ($\rightsquigarrow$ Maßtheorie)

(2) Wie verhält sich der Mittelwert $\frac{1}{n} S_n$?
Antwort: $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{E}(X_1)$ mit Wahrscheinlichkeit 1; starkes Gesetz der großen Zahlen (Kolmogoroff)

(3) Wie schnell?
Antwort: $\sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{n} S_n - \mathbf{E}(X_1) \right) \Rightarrow \mathcal{N}_{0,\mathbf{V}(X_1)}$; zentraler Grenzwertsatz.

(4) Wie stark streut $\frac{1}{n} S_n$ um $\mathbf{E}(X_1)$?
Gesetz vom iterierten Logarithmus $S_n - n \cdot \mathbf{E}(X) \le k \cdot \sqrt{2 \cdot n \cdot \log(\log(n))}$



Zur Beantwortung dieser Fragen ist die Maß- und Integrationstheorie zu entwickeln (Modellbildung). Später zur Beantwortung von Frage 3 werden wir die Theorie der Fourier-Transformation bereitstellen.

0.4 Vorkenntnisse

- Stochastik I (Nicht zwingend, aber als Motivation und für Beispiele wichtig)
- Analysis I/II
- Lineare Algebra

I. Maß- und Integrationstheorie

1. Kapitel: Ereignisse und Mengensysteme

Die Maßtheorie wurde etwa 1930 von Kolmogoroff als mathematisches Modell zur Beschreibung von zufälligen Ereignissen eingeführt.

Erinnerung:	Stichprobenraum	$\Omega \neq \emptyset$
	Ereignisse	$A \subset \Omega$

1.1 Eigenschaften von Ereignissen

$\mathfrak{A}$ Ereignis	$\hat{=}\, A \subset \Omega$ Menge
sicheres Ereignis	Ω
unmögliches Ereignis	$\emptyset$
$\mathfrak{A}$ tritt nicht ein	$A^{\complement} = \Omega \setminus A$
$\mathfrak{A}_0$ oder $\mathfrak{A}_1$ treten ein	$A_0 \cup A_1$
$\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ treten ein	$A_0 \cap A_1$
mindestens ein $\mathfrak{A}_n$	$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$
jedes $\mathfrak{A}_n$	$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$
∞-viele $\mathfrak{A}_n$	$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ [1]
beinahe alle $\mathfrak{A}_n$	$\limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ [2]

Aus verschiedenen Gründen kommen als mögliche Ereignisse im allgemeinen nicht alle Teilmengen $A \subset \Omega$ in Frage, da

(a) technische Probleme der Maßtheorie eine Messung unmöglich machen oder

(b) bereits ein kleineres System von benutzten Teilmengen die Information beschreiben kann, die wir zu einem bestimmten Zeitpunkt über das System haben.

Beispiel: Es sind nur Ereignisse zulässig, die aufgrund der vorliegenden Informationen beschrieben werden können. Dann ist zum Beispiel „der \$-Kurs steigt im nächsten Jahr auf $2,50$ EUR“ nicht durch die heutige Information beschreibbar.

1.2 Definition (σ-Algebra)

Es sei $\Omega \neq \emptyset$. Ein System $\mathfrak{A} \subset \mathcal{POT}(\Omega)$ heißt σ-Algebra (in Ω), falls

$$
\begin{array}{ll}
(\sigma A_0) & \Omega \in \mathfrak{A} \\
(\sigma A_1) & A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathfrak{A} \\
(\sigma A_2) & A_n \in \mathfrak{A}\, \forall n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}.
\end{array}
$$

[1] für jedes n tritt mindestens ein Ereignis ein
[2] für mindestens ein n treten alle (folgenden) Ereignisse ein

1.3 Beispiele und Eigenschaften

(a) Stets ist $\mathfrak{A} = \mathcal{POT}(\Omega)$ eine σ-Algebra. Ist Ω abzählbar, so wählt man im allgemeinen diese.

(b) $\mathfrak{A}$ σ-Algebra in Ω und $\Omega' \subset \Omega \Rightarrow \mathfrak{A}' = \{A \cap \Omega' \mid A \in \mathfrak{A}\}$ ist σ-Algebra in Ω'. $\mathfrak{A}'$ heißt Spur von $\mathfrak{A}$ in Ω'.

(c) Wie schon in Stochastik I gezeigt gehören alle Ereignisse auf der rechten Seite von (1.1) zu $\mathfrak{A}$, falls $A, A_n \in \mathfrak{A}$.

(d) Ω, Ω' Mengen, $\mathfrak{A}'$ σ-Algebra in Ω' und $T : \Omega \to \Omega'$ Abbildung.

$$\Rightarrow \quad T^{-1}(\mathfrak{A}') := \left\{T^{-1}(A') \mid A' \in \mathfrak{A}'\right\}$$

ist σ-Algebra in Ω; wobei $T^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \in A'\}$ das Urbild von A' unter T ist.

1.4 Satz und Definition (Erzeugte σ-Algebra)

(Siehe Stochastik I, (1.12)) Es sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{POT}(\Omega)$ ein Mengensystem. Dann ist

$$\mathfrak{A}(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{E} \subset \mathfrak{A}}} \mathfrak{A}$$

eine σ-Algebra, und zwar die kleinste die $\mathcal{E}$ enthält. $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ heißt die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.

Als Erzeuger von σ-Algebren werden später häufig Mengensysteme auftreten, die bereits teilweise die Eigenschaften von σ-Algebren besitzen. Wichtig dabei sind die Ringe:

1.5 Definition (Ring/ Algebra)

Es sei $\Omega \neq \emptyset$. Ein System $\mathfrak{R} \subset \mathcal{POT}(\Omega)$ heißt Ring (in Ω), falls

$$\begin{array}{ll} (R_0) & \emptyset \in \mathfrak{R} \\ (R_1) & A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{R} \\ (R_2) & A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R}. \end{array}$$

Wird zusätzlich noch

$$(R_3) \qquad \Omega \in \mathfrak{R}$$

gefordert, so heißt $\mathfrak{R}$ eine Algebra (in Ω).

1.6 Eigenschaft

Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring; $A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{R}$.

$\llbracket$ $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. $\rrbracket$

1.7 Satz

$$\mathfrak{R} \subset \mathcal{POT}(\Omega) \text{ ist Algebra} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{R} \text{ erfüllt } (\sigma A_0), (\sigma A_1) \text{ und } (R_2).$$

Beweis:

$$\mathfrak{R} \text{ Algebra} \quad \Rightarrow \quad (R_3) = (\sigma A_0), (R_2) \text{ per Definition,}$$

$$(\sigma A_1) \text{ folgt aus } (R_1), \text{ da } \Omega \in \mathfrak{R} \text{ und } \Omega \setminus B = B^{\complement}.$$

Umgekehrt:

$$\text{Aus } (R_3) = (\sigma A_0), (\sigma A_1) \quad \Rightarrow \quad \emptyset = \Omega^{\complement} \in \mathfrak{R}, \text{ das heißt } (R_0)$$

$$(R_1) \text{ folgt aus der Gleichung: } A \setminus B = A \cap B^{\complement} = \left(A^{\complement} \cup B\right)^{\complement} \in \mathfrak{R}$$

□

1.8 Beispiele

(a) Jede σ-Algebra ist eine Algebra und somit ein Ring.

(b) Sei $\Omega \neq \emptyset$

$$\mathfrak{R} = \left\{ A \subset \Omega \;\middle|\; A \text{ oder } A^{\complement} \text{ hat nur endlich viele Elemente} \right\}$$

ist Algebra, aber falls Ω unendlich ist im allgemeinen keine σ-Algebra.

Ein weiterer wesentlicher Begriff ist:

1.9 Definition (Dynkin-System)

Es sei $\Omega \neq \emptyset$. Ein System $\mathfrak{D} \subset \mathcal{POT}(\Omega)$ heißt Dynkin-System (in Ω), falls

$$\begin{array}{ll} (DS_0) & \Omega \in \mathfrak{D} \\ (DS_1) & A \in \mathfrak{D} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathfrak{D} \\ (DS_2) & \text{Sind } A_n \in \mathfrak{D} \text{ paarweise disjunkt} \Rightarrow \dot{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}} A_n \in \mathfrak{D}. \end{array}$$

1.10 Eigenschaften

(a) $\emptyset = \Omega^{\complement} \in \mathfrak{D}$

(b) $A, B \in \mathfrak{D}$, $A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathfrak{D}$

Beweis:
Zu (a): Klar nach (DS_1) und (DS_0).
Zu (b): Es ist

$$A \cap B^{\complement} = \emptyset \in \mathfrak{D}$$

und nach (DS_2)

$$A \,\dot{\cup}\, B^{\complement} = A \,\dot{\cup}\, B^{\complement} \,\dot{\cup}\, \emptyset \,\dot{\cup}\, \emptyset \,\dot{\cup} \ldots \in \mathfrak{D} \quad \Rightarrow \quad B \setminus A = \left(A \,\dot{\cup}\, B^{\complement}\right)^{\complement} = B \cap A^{\complement} \in \mathfrak{D}$$

□

1.11 Satz

Ein Dynkin System $\mathfrak{D}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn es $\cap$-stabil ist, das heißt für $A, B \in \mathfrak{D}$ $\Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{D}$.

Beweis:
Trivialerweise ist jede σ-Algebra ein $\cap$-stabiles Dynkinsystem nach $(1.3.c)$.
Sei nun $\mathfrak{D}$ ein $\cap$-stabiles Dynkinsystem.
Es ist (σA_2) zu zeigen:
Sind $A_1, A_2 \in \mathfrak{D} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{D}$

$$\underset{(1.10.b)}{\Rightarrow} \quad A_1 \setminus (A_1 \cap A_2) \in \mathfrak{D} \quad \underset{(DS_2)}{\Rightarrow} \quad A_1 \cup A_2 = [A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)] \,\dot{\cup}\, A_2 \,\dot{\cup}\, \emptyset \,\dot{\cup} \ldots \in \mathfrak{D}$$

Damit ist auch jede endliche Vereinigung von $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{D}$.
Sind $A_n \in \mathfrak{D}\, \forall n$

$$\Rightarrow \quad B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathfrak{D}\, \forall n \geq 1 \quad \text{und} \quad B_{n+1} \setminus B_n \in \mathfrak{D} \quad \text{nach } (1.10.b).$$

Da

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \,\dot{\cup}\, \dot{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}} (B_{n+1} \setminus B_n)$$

folgt die Behauptung aus (DS_2). □

Analog zu (1.4) erhalten wir:

1.12 Satz und Definition (Erzeugtes Dynkin-System)

Es sei $\mathcal{E} \in \mathcal{P}ot(\Omega)$ ein Mengensystem. Dann ist

$$\mathfrak{D}(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{D}\,\text{Dynkin-System} \\ \mathcal{E} \subset \mathfrak{D}}} \mathfrak{D}$$

ein Dynkin-System und zwar das kleinste das $\mathcal{E}$ enthält. $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ heißt das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System.

Beweis: Einfach!

1.13 Satz

Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}ot(\Omega)$ ein $\cap$-stabiles Mengensystem, so gilt:

$$\mathfrak{D}(\mathcal{E}) = \mathfrak{A}(\mathcal{E}).$$

Beweis:

Nach (1.11) ist $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System mit $\mathcal{E} \subset \mathfrak{A}(\mathcal{E})$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{D}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{E}).$$

Bleibt „$\supset$“ zu zeigen: Nach (1.11) reicht es zu zeigen, daß $\mathfrak{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil ist ($\Rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ σ-Algebra $\Rightarrow \mathfrak{A}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{D}(\mathcal{E})$). Sei $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ beliebig und

$$\mathfrak{D}_D := \{A \in \mathfrak{D}(\mathcal{E}) \mid A \cap D \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})\}.$$

Man sieht leicht, daß $\mathfrak{D}_D$ ein Dynkinsystem ist. Für $E \in \mathcal{E}$ gilt trivialerweise (da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist) $\mathcal{E} \subset D_E$ und damit

$$\mathfrak{D}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{D}_E \quad \Rightarrow \quad \forall D \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})\ \forall E \in \mathcal{E} : D \cap E \in \mathfrak{D}(\mathcal{E}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} \subset \mathfrak{D}_D \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{D}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{D}_D,$$

das heißt $\forall A \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ ist $A \cap D \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})$. Da $D \in \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ beliebig $\Rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil. □

1.14 Beispiele

(a) Es sei (E, d) ein vollständiger metrischer Raum.

$$\mathcal{E} := \{A \subset E \mid A \text{ offen}\}$$

ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger. Die erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ heißt *Borel*'sche σ-Algebra (in E) [vergleiche Stochastik I]. Sie wird mit $\mathfrak{B}(E)$ bezeichnet.

(b) In $\mathbb{R}$ sind $\mathcal{E}_1 = \{]a, b] \mid a \leq b\}$ sowie $\mathcal{E}_2 = \{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ $\cap$-stabile Erzeuger der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}(E)$.

Aufgaben:

Aufgabe 1.1:

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine endliche Menge mit einer geraden Anzahl von Elementen.

$$\mathfrak{D} = \{A \subset \Omega : \#A \text{ gerade}\}.$$

Zeigen Sie, daß $\mathfrak{D}$ ein Dynkin-System ist, aber keine σ-Algebra.

Aufgabe 1.2:

Für jedes $\mathcal{E} \subset \mathcal{POT}(\Omega)$ sei $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$ der kleinste Ring, der $\mathcal{E}$ enthält. Man beweise die Existenz von $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$. Man bestimme $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ und $\mathfrak{R}(\mathcal{E})$ für den Fall $\mathcal{E} = \{A\}$ für $A \subset \Omega$ beliebig. Wann gilt $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathfrak{R}(\mathcal{E})$ in diesem Spezialfall?

Aufgabe 1.3:

Beweisen Sie, daß

$$\mathfrak{A}(\{\omega\} : \omega \in \Omega) = \Big\{A \subset \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^{\complement} \text{ abzählbar}\Big\}.$$

Aufgabe 1.4:

Zeigen Sie

(a) Wenn $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra ist, dann ist $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

(b) Wenn $\mathcal{E} \subset \mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}(\mathcal{E})$, dann ist $\mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathfrak{A}(\mathfrak{F})$.

Aufgabe 1.5:

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{E} \subset \mathcal{POT}(\Omega)$. zeigen Sie: Für $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{E})$ existiert eine abzählbare Menge $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}$ mit $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{E}_A)$.

<u>Hinweis</u>: Betrachten Sie die Menge derjenigen $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{E})$ für die die Behauptung richtig ist.

2. Kapitel: Inhalt und Maß

Zusätzlich zu den Begriffen Wahrscheinlichkeitsmaß und Maß brauchen wir noch die Begriffe Inhalt und Prämaß auf einem Ring:

2.1 Definition (Prämaß/ Inhalt)

Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω und $\mu : \mathfrak{R} \to [0, +\infty] := [0, +\infty[\cup \{\infty\}$.

(a) μ heißt Prämaß (auf $\mathfrak{R}$), wenn

$$(M_0) \qquad \mu(\emptyset) = 0$$

$$(M_1) \qquad \forall A_n \in \mathfrak{R} \text{ paarweise disjunkt mit } \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} A_n \in \mathfrak{R}$$

$$\Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

(b) μ heißt Inhalt (auf $\mathfrak{R}$), wenn (M_0) gilt und

$$\left(\tilde{M}_1\right) \qquad \text{Für } A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{R} \text{ paarweise disjunkt, gilt}$$

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \quad (\text{endliche Additivität})$$

2.2 Bemerkung

(a) Wegen (M_0) ist jedes Prämaß ein Inhalt.

(b) Ist μ ein Prämaß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{R}$, so ist μ nach $(I.3.3)$ (aus Stochastik I) ein Maß.

2.3 Beispiele

Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω.

(a) Sei $\omega \in \Omega$ beliebig. Dann ist $\mathcal{E}_\omega : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$,

$$\mathcal{E}_\omega(A) := \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$. $\mathcal{E}_\omega$ heißt Punktmaß in ω.

(b) Ist $\mu_1, \mu_2, \ldots$ eine Folge von Inhalten (Prämaßen) auf $\mathfrak{R}$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \geq 0$.

$$\Rightarrow \quad \mu := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$$

ist Inhalt (Prämaß) auf $\mathfrak{R}$.

2.4 Eigenschaften (Inhalt)

Es sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$ und $A, B, A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{R}$

(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(b) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Isometrie)

(c) $A \subset B$, $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(d) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ (Sub-Additivität)

Beweis:

$$\begin{array}{rl} & A \cup B = A \,\dot\cup\, (B \setminus A) \quad B = (A \cap B) \,\dot\cup\, (B \setminus A) \\ \Rightarrow & \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \\ & \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \qquad (*) \\ \Rightarrow & \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(B \setminus A) \end{array}$$

Ist $\mu(B \setminus A) < \infty \Rightarrow$ Behauptung. Ist $\mu(B \setminus A) = +\infty \Rightarrow \mu(A \cup B) = +\infty$ und $\mu(B) = +\infty$ $\Rightarrow$ Behauptung.

Für $A \subset B$ folgt aus $(*)$

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A),$$

da $\mu \geq 0 \Rightarrow (b)$ und (c).

Zum Beweis von (d) setzt man $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$

$$\begin{array}{rl} \Rightarrow & (B_i) \text{ paarweise disjunkt} \\ \Rightarrow & \mu\left(\dot\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i); \end{array}$$

da $\dot\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ und $B_i \subset A_i$ folgt (d) aus (b). $\square$

Genau wie bei Maßen (vergleiche Stochastik I (1.20)) läßt sich die σ-Additivität (M_1) durch Stetigkeitsaussagen äquivalent beschreiben (siehe auch Stochastik I).

Bezeichnung: $E, E_1, E_2, \ldots$ Mengen

$$E_n \uparrow E \quad \Leftrightarrow \quad E_1 \subset E_2 \subset \ldots,\ E = \bigcup_i E_i,$$

$$E_n \downarrow E \quad \Leftrightarrow \quad E_1 \supset E_2 \supset \ldots,\ E = \bigcap_i E_i.$$

2.5 Satz

Es sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathfrak{R}$. Man betrachte die folgenden Aussagen:

(a) μ ist Prämaß.

(b) Für alle Folgen $(A_n) \subset \mathfrak{R}$ mit $A_n \uparrow A$ und $A \in \mathfrak{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

Stetigkeit von unten.

(c) Für alle Folgen $(A_n) \subset \mathfrak{R}$ mit $A_n \downarrow A$, $A \in \mathfrak{R}$ und[3] $\mu(A_n) < \infty$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

Stetigkeit von oben.

(d) Für alle Folgen $(A_n) \subset \mathfrak{R}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$ <u>und</u>[3] $\mu(A_1) < \infty$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

<u>$\emptyset$-Stetigkeit</u>.

Dann gilt:

$$(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Leftrightarrow (d).$$

Ist μ ein endlicher Inhalt auf $\mathfrak{R}$, das heißt $\mu(A) < \infty \, \forall A \in \mathfrak{R}$, so sind $(a) - (d)$ sogar äquivalent.

Beweis:

<u>$(a) \Rightarrow (b)$</u>: Sei $A_0 := \emptyset$ und $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$

$$\Rightarrow \quad B_n \text{ paarweise disjunkt mit } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \text{ und } A_n = B_1 \uplus \ldots \uplus B_n.$$

Da μ σ-additiv ist

$$\Rightarrow \quad \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

<u>$(b) \Rightarrow (a)$</u>: Seien $(A_n) \subset \mathfrak{R}$ paarweise disjunkt mit

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i =: A \in \mathfrak{R}.$$

Setze $B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n \uparrow A$.

$$\Rightarrow \quad \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung.}$$

<u>$(b) \Rightarrow (c)$</u>: Nach (2.4.c) gilt $\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$. Aus $A_n \downarrow A \Rightarrow A_1 \setminus A_n \uparrow A_1 \setminus A$.

$$\underset{(b)}{\Rightarrow} \quad \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Daraus folgt (c), da wegen (2.4.b) $\mu(A_n) \leq \mu(A_1) < \infty \, \forall n$ und $\mu(A) \leq \mu(A_1) < \infty$.

<u>$(c) \Rightarrow (d)$</u>: Trivial.

<u>$(d) \Rightarrow (c)$</u>:

$$A_n \downarrow A \quad \Rightarrow \quad A_n \setminus A \downarrow \emptyset.$$

Da $A_n \setminus A \subset A_n \subset A_1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \mu(A_n \setminus A) < \infty \, \forall n \\ &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) - \mu(A) = 0 \end{aligned}$$

und da $A_n, A \subset A_1 \Rightarrow \mu(A_n), \mu(A) < \infty \Rightarrow (c)$.

Sei nun μ ein endlicher Inhalt. Zu zeigen:

<u>$(d) \Rightarrow (b)$</u>: Sei $(A_n) \subset \mathfrak{R}$, $A_n \uparrow A \in \mathfrak{R}$

$$\Rightarrow \quad A \setminus A_n \downarrow \emptyset.$$

Da μ endlich folgt aus (d):

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A) - \mu(A_n) \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung.}$$

$\square$

[3] gehört nicht zur Definition

2.6 Bemerkung

Sei Ω abzählbar unendlich und

$$\mathfrak{R} = \left\{ A \subset \Omega \mid A \text{ oder } A^{\complement} \text{ endlich} \right\}$$

die Algebra aus (1.8.b):

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ endlich} \\ \infty & A^{\complement} \text{ endlich} \end{cases}$$

Dann ist μ ein Inhalt, μ ist $\emptyset$-stetig aber kein Prämaß!

2.7 Definition (Maß/ endliches Maß)

Jedes auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω definierte Prämaß heißt Maß (auf $\mathfrak{A}$). Gilt $\mu(\Omega) < \infty$, so heißt μ endliches Maß.

2.8 Beispiele

(a) Das Punktmaß $\mathcal{E}_\omega$ für $\omega \in \Omega$ ist ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Sei Ω abzählbar. Wie in Stochastik I (1.23) gezeigt definiert jede Zähldichte $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit $\sum\limits_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$ durch

$$\mu = \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) \cdot \mathcal{E}_\omega$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{POT}(\Omega))$ (vergleiche (2.3.b)). Es gilt $\mu(\Omega) = 1$ und μ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß.

(c) Sei $\Omega \neq \emptyset$ beliebig. Für $A \in \mathcal{POT}(\Omega)$ sei

$$|A| = \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\mu(A) := |A|$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{POT}(\Omega))$, das Zählmaß auf Ω.

Bevor wir zeigen, daß jedes Prämaß auf einem Ring $\mathfrak{R}$ zu einem Maß auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ fortgesetzt werden kann beweisen wir erst ein Kriterium, das die Eindeutigkeit dieser Fortsetzung sichert:

2.9 Satz (Eindeutigkeitssatz)

Es sei $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω und $E_n \in \mathcal{E}$ mit $E_n \uparrow \Omega$. Sind dann μ_1, μ_2 Maße auf $\mathfrak{A}$ mit

(i)

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) \quad \forall E \in \mathcal{E} \quad \text{und}$$

(ii)

$$\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty \quad \forall n \geq 1$$

so gilt $\mu_1 = \mu_2$, das heißt $\mu_1(A) = \mu_2(A) \; \forall A \in \mathfrak{A}$.

Beweis:

Sei zuerst $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) < \infty$ fest gewählt. Wir setzen

$$\mathfrak{D}_E := \{ D \in \mathfrak{A} \mid \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D) \}.$$

Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil, folgt aus (i), daß $\mathcal{E} \subset \mathfrak{D}_E$. Wir zeigen, daß $\mathfrak{D}_E$ ein Dynkin-System ist: Trivialerweise ist $\Omega \in \mathfrak{D}_E$, das heißt (DS_0) gilt. Sei $D \in \mathfrak{D}_E$; mit $(2.4.c)$ folgt

$$\begin{aligned} \mu_1\left(E \cap D^{\complement}\right) &= \mu_1(E \setminus (E \cap D)) = \mu_1(E) - \mu_1(E \cap D) \\ &= \mu_2(E) - \mu_2(E \cap D) = \mu_2\left(E \cap D^{\complement}\right), \end{aligned}$$

da wegen $\mu_1(E) < \infty$ auch $\mu_1(E \cap D) < \infty$ gilt.

$$\Rightarrow \quad D^{\complement} \in \mathfrak{D}_E, \text{ das heißt } (DS_1) \text{ gilt.}$$

Für paarweise disjunkte $D_n \in \mathfrak{D}_E$ folgt da μ_1, μ_2 Maße sind:

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \cap E\right) &= \mu_1\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (D_n \cap E)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(D_n \cap E) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(D_n \cap E) = \mu_2\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} (D_n \cap E)\right) \\ &= \mu_2\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \cap E\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} D_n \in \mathfrak{D}_E, \quad \text{das heißt } (DS_2).$$

Da $\mathcal{E} \subset \mathfrak{D}_E \Rightarrow \mathfrak{D}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{D}_E$ und wegen Satz (1.13) gilt:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathcal{E}) = \mathfrak{D}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{D}_E \subset \mathfrak{A},$$

also $\mathfrak{A} = \mathfrak{D}_E$, also $\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) < \infty$. Da man nach (ii) $E = E_n$ wählen darf, und $A \cap E_n \uparrow A$ folgt mit $(2.5.b)$

$$\mu_1(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(A \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(A \cap E_n) = \mu_2(A)$$

für jedes $A \in \mathfrak{A}$, das heißt

$$\mu_1 = \mu_2.$$

2.10 Folgerung

(a) Für die Borel'sche σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ist nach $(1.14.b)$ $\mathcal{E} = \{]-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger. Nach Satz (2.9) ist also jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $\mathbb{R}$ durch die Werte $F_{\mathbf{P}}(t) := \mathbf{P}(]-\infty, t])$ eindeutig bestimmt.
$F_{\mathbf{P}} : \mathbb{R} \to [0,1]$ heißt Verteilungsfunktion von $\mathbf{P}$. $F_{\mathbf{P}}$ ist monoton wachsend und stetig von rechts. Wir werden später sehen, daß zu jeder solchen Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ auch wieder ein (wie wir wissen eindeutiges) Wahrscheinlichkeitsmaß existiert.
Beispiel: Ist $\mathbf{P} = \mathcal{E}_x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 0 & t < x \\ 1 & t \geq x \end{cases}$$

(b) Das d-dimensionale Lebesgue-Maß λ^d ist durch die Werte $\lambda^d(]a,b]) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$ eindeutig bestimmt.
⟦ $\mathcal{E} = \left\{]a,b] : a, b \in \mathbb{R}^d\right\}$ ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$ und

$$E_n =](-n, \ldots, -n), (n, \ldots, n)]$$

erfüllt $E_n \uparrow \mathbb{R}^d$ und $\lambda^d(E_n) = (2n)^d < \infty$. ⟧

Zusätzlich zum Eindeutigkeitssatz (2.9) benötigen wir noch den Fortsetzungssatz. Wie wir später sehen werden ist es häufig leicht, ein Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ zu konstruieren. Die Frage ist nun ob dann ein Maß $\tilde{\mu}$ auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω existiert mit $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}$ und $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{R}$. Dies liefert der folgende Satz:

2.11 Satz (Fortsetzungssatz)

Jedes Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω kann auf mindestens eine Weise zu einem Maß $\tilde{\mu}$ auf $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ fortgesetzt werden, das heißt $\tilde{\mu}(R) = \mu(R)\ \forall R \in \mathfrak{R}$.

Beweis: (*Carathéodory*)

Für $Q \subset \Omega$ beliebig sei $\mathcal{U}(Q)$ die Menge aller Folgen $(A_n) \subset \mathfrak{R}$, welche Q überdecken, das heißt $Q \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Auf $\mathcal{POT}(\Omega)$ definieren wir $\mu^* : \mathcal{POT}(\Omega) \to [0, \infty]$

$$\text{(2.1)} \quad \mu^*(Q) := \begin{cases} \inf \left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : (A_n \in \mathfrak{U}(Q)) \right\} & \mathfrak{U}(Q) \neq \emptyset \\ +\infty & \mathfrak{U}(Q) = \emptyset \end{cases}$$

μ^* besitzt folgende Eigenschaften:

$$\begin{array}{ll} (2.2.A) & \mu^*(\emptyset) = 0 \\ (2.2.B) & Q_1 \subset Q_2 \Rightarrow \mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2) \\ (2.2.C) & \mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) \end{array}$$

für jede Folge $(Q_n) \subset \mathcal{POT}(\Omega)$.

(2.2.A) folgt sofort, da $(\emptyset, \emptyset, \ldots) \in \mathfrak{A}(\emptyset)$ und $\mu(\emptyset) = 0$. Falls $Q_1 \subset Q_2$ so ist $\mathfrak{U}(Q_2) \subset \mathfrak{U}(Q_1)$ $\Rightarrow$ (2.2.B). Für den Beweis von (2.2.C) reicht es $\mu^*(Q_n) < \infty\, \forall n$ anzunehmen, insbesondere also $\mathfrak{U}(Q_n) \neq \emptyset\, \forall n$. Zu $\varepsilon > 0$ beliebig und für $n \geq 1$ existiert einen Folge $(A_{n,m})_{m \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{U}(Q_n)$ so daß

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{n,m}) \leq \mu^*(Q_n) + 2^{-n}\varepsilon \qquad \text{(Definition von } \mu^*!\text{)}$$

Da $(A_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{U}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n\right)$ folgt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n,m}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(Q_n) + 2^{-n}\varepsilon\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow$ (2.2.C).

Beachte, daß aus (2.2.A) und (2.2.B)

$$\text{(2.2.}D\text{)} \qquad \mu^* \geq 0$$

folgt. Wesentlich ist nun die folgende Beobachtung:

Für alle $A \in \mathfrak{R}$ gilt

$$\begin{array}{lll} (2.2.E) & \mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*\left(Q \cap A^{\complement}\right) & \forall Q \in \mathcal{POT}(\Omega) \\ (2.2.F) & \mu^*(A) = \mu(A). & \end{array}$$

Es reicht (2.2.E) für $\mu^*(Q) < \infty$ zu zeigen, insbesondere $\mathfrak{U}(Q) \neq \emptyset$. Aus der Additivität von μ folgt für jede Folge $(A_n) \in \mathfrak{U}(Q)$, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A).$$

Da $(A_n \cap A)_n \in \mathfrak{U}(Q \cap A)$ und $(A_n \setminus A)_n \in \mathfrak{U}(Q \setminus A)$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*\left(Q \cap A^{\complement}\right)$$

$$\overset{\text{Infimum auf der}}{\underset{\text{linken Seite}}{\Rightarrow}} \quad \mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*\left(Q \cap A^{\complement}\right) \quad \text{das heißt } (2.2.E) \text{ gilt.}$$

Für $(A_n) \in \mathfrak{U}(A) \Rightarrow A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$$\Rightarrow \quad \mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu^*(A).$$

Andererseits ist $(A, \emptyset, \emptyset, \ldots) \in \mathfrak{U}(A)$

$$\Rightarrow \quad \mu^*(A) \leq \mu(A) \quad \Rightarrow \quad (2.2.F).$$

Wir werden nun zeigen, daß das System $\mathfrak{A}^*$ aller Mengen $A \in \mathcal{POT}(\Omega)$ für die $(2.2.E)$ gilt eine σ-Algebra in Ω ist und $\mu^*|_{\mathfrak{A}^*}$ ein Maß. Nach $(2.2.E)$ gilt $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}^* \Rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{A}^*$ und nach $(2.2.F)$ ist dann $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{R})}$ eine Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$. Dazu benötigen wir:

2.12 Definition (äußeres Maß)

Ein <u>äußeres Maß</u> auf einer Menge $\Omega \neq \emptyset$ heißt jede numerische Funktion $\mu^* : \mathcal{POT}(\Omega) \to [0, \infty]$ mit $(2.2.A)$-$(2.2.C)$. Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt <u>μ^*-meßbar</u>, falls sie $(2.2.E)$ erfüllt.

Der Beweis von Satz (2.11) wird nun durch den folgenden Satz beendet:

2.13 Satz

Es sei μ^* ein äußeres Maß auf $\Omega \neq \emptyset$. Dann ist das System $\mathfrak{A}^*$ aller μ^*-meßbaren Mengen $A \subset \Omega$ eine σ-Algebra in Ω. Weiter ist $\mu^*|_{\mathfrak{A}^*}$ ein Maß.

Beweis:
Aus $(2.2.C)$ folgt, da $(Q \cap A, Q \setminus A, \emptyset, \ldots) \in \mathfrak{U}(Q)$, daß

$$\mu^*(Q) = \mu^*((Q \cap A) \cup (Q \setminus A) \cup \emptyset \ldots) \leq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) + 0,$$

das heißt $(2.2.E)$ ist für $A \in \mathfrak{A}^*$ äquivalent zu

$$(2.2.E') \qquad \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*\left(Q \cap A^{\complement}\right) \quad \forall Q \in \mathcal{POT}(\Omega).$$

<u>Zu zeigen</u>: $\mathfrak{A}^*$ ist σ-Algebra: Trivialerweise erfüllt $A = \Omega$ $(2.2.E')$, also ist $\Omega \in \mathfrak{A}^*$. Wegen der Symmetrie in $(2.2.E')$ ist mit $A \in \mathfrak{A}^*$ auch $A^{\complement} \in \mathfrak{A}^*$. Wir zeigen nun, daß mit $A, B \in \mathfrak{A}^*$ auch $A \cup B \in \mathfrak{A}^*$ (da $\mathfrak{A}^*$ Komplement-stabil ist, folgt daß $\mathfrak{A}^*$ eine Algebra ist). Für jedes $Q \in \mathcal{POT}(\Omega)$ gilt nämlich

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap B) + \mu^*(Q \setminus B).$$

Ersetzt man nun Q durch $Q \cap A$ und durch $Q \setminus A = Q \cap A^{\complement}$ so erhält man für alle $Q \in \mathcal{POT}(\Omega)$:

$$\mu^*(Q \cap A) = \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*\left(Q \cap A \cap B^{\complement}\right),$$
$$\mu^*\left(Q \cap A^{\complement}\right) = \mu^*\left(Q \cap A^{\complement} \cap B\right) + \mu^*\left(Q \cap A^{\complement} \cap B^{\complement}\right)$$

und dann mit $(2.2.E')$ für alle $Q \in \mathcal{POT}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) \;=\; & \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*\left(Q \cap A \cap B^{\complement}\right) \\ & + \mu^*\left(Q \cap A^{\complement} \cap B\right) + \mu^*\left(Q \cap A^{\complement} \cap B^{\complement}\right) \end{aligned} \qquad (*)$$

Ersetzt man hier Q durch $Q \cap (A \cup B)$ so gilt $\forall Q \in \mathcal{POT}(\Omega)$

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) = \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*\left(Q \cap A \cap B^{\complement}\right) + \mu^*\left(Q \cap A^{\complement} \cap B\right) \qquad (\ddagger)$$

Dies zusammen mit $(*)$ liefert

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*\left(Q \cap (A \cup B)^{\complement}\right)$$

für alle $Q \in \mathcal{POT}(\Omega)$, das heißt $A \cup B \in \mathfrak{A}^*$. Insbesondere ist $\mathfrak{A}^*$ $\cap$-stabil.

Seien nun $(A_n) \subset \mathfrak{A}^*$ paarweise disjunkt und $A = \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n$. Wählt man in $(\ddagger)$ $A = A_1$ und $B = A_2$ so folgt, da $A \cap B = \emptyset$, daß

$$\mu^*(Q \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_2)$$

und dann durch Induktion

$$\mu^*\left(Q \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_i)$$

für alle $Q \in \mathcal{POT}(\Omega)$ und alle $n \geq 1$. Wie bereits gezeigt ist $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{A}^*$ und da $Q \setminus B_n \supset Q \setminus A$, also $\mu^*(Q \setminus B_n) \geq \mu^*(Q \setminus A)$, folgt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap B_n) + \mu^*(Q \setminus B_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*(Q \setminus A).$$

Mit $(2.2.C)$ folgt dann für alle $Q \in \mathcal{POT}(\Omega)$

$$\mu^*(Q) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*(Q \setminus A) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$$

und damit wie eben sogar

$$\mu^*(Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_i) + \mu^*(Q \setminus A) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A) \qquad (\spadesuit)$$

das heißt $A \in \mathfrak{A}^*$.

Damit ist $\mathfrak{A}^*$ ein $\cap$-stabiles Dynkinsystem und nach Satz (1.11) somit eine σ-Algebra. Setzt man in $(\spadesuit)$

$$Q = A = \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i$$

so folgt

$$\mu^*\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

also ist $\mu^*|_{\mathfrak{A}^*}$ ein Maß. $\square$

Da jeder Ring $\mathfrak{R}$ $\cap$-stabil ist, benötigen wir im Hinblick auf den Eindeutigkeitssatz (2.9) noch eine Endlichkeitsbedingung um im Fortsetzungssatz (2.11) eine eindeutige Fortsetzung zu erhalten.

2.14 Definition (σ-endlich)

Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω heißt <u>σ-endlich</u>, wenn eine Folge $(A_n) \subset \mathfrak{R}$ existiert mit $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty$ $\forall n \geq 1$.

2.15 Beispiele

(a) Das Lebesgue'sche Prämaß λ^d auf $\mathbb{R}^d$ ist σ-endlich. Wähle $A_n =](-n,\ldots,-n),(n,\ldots,n)]$; so gilt $\lambda^d(A_n) = (2n)^d < \infty$ und $A_n \uparrow \mathbb{R}^d$.

(b) Das Zählmaß aus (2.8.c) ist genau dann σ-endlich, wenn Ω abzählbar ist.

(c) Ein Inhalt μ ist σ-endlich $\Leftrightarrow \exists (A'_n) \subset \mathfrak{R}$ mit $\mu(A'_n) < \infty$ und $A'_n \uparrow \Omega$.

$[\![$ „ $\Rightarrow$ ": Sei $(A_n) \subset \mathfrak{R}$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Setze $A'_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n \Rightarrow \mu(A'_n) < \infty$ und $A'_n \uparrow \Omega$.
„ $\Leftarrow$ ": $\surd$ $]\!]$

Zusammenfassend erhalten wir:

2.16 Satz

Jedes σ-endliche Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω kann auf genau eine Weise zu einem Maß $\tilde{\mu}$ auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{R})$ fortgesetz werden.

Beweis:
Existenz von $\tilde{\mu}$ folgt aus Satz (2.11), $\mathfrak{R}$ ist als Ring $\cap$-stabil (vergleiche (1.6)) und nach Voraussetzung (siehe auch (2.15.c)) $\exists E_n \in \mathfrak{R}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty$. (2.9) liefert dann die Behauptung.

2.17 Beispiel

Zum Abschluß diese Kapitels und zur Illustration von Satz (2.16) konstruieren wir nun das eindimensionale *Lebesgue*-Maß λ^1. Es sei

$$J = \{]a,b] \mid a \leq b,\, a,b \in \mathbb{R}\}$$

das System aller halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}$. Nach Stochastik I (2.16.1) ist $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{A}(J)$. J ist zwar $\cap$-stabil, aber kein Ring, da zum Beispiel (R_2) nicht gilt. Es bezeichne $\mathcal{F}$ das Mengensystem aller endlichen Vereinigungen von Intervalle aus J, das heißt

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i \,\middle|\, I_i \in J,\, n \geq 1 \right\}.$$

<u>1. Schritt</u>: $\mathcal{F}$ ist ein Ring.

$[\![$ Trivialerweise ist $\emptyset \in J \subset \mathcal{F}$, also gilt (R_0). (R_2) gilt nach Definition von $\mathcal{F}$. Bleibt (R_1) zu zeigen, das heißt mit $F,G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \setminus G \in \mathcal{F}$: Nach Definition existieren $I'_1,\ldots,I'_m \in J$ und $I''_1,\ldots,I''_n \in J$ mit $F = \bigcup_{i=1}^{m} I'_i$ und $G = \bigcup_{j=1}^{n} I''_j$.

$$\Rightarrow \quad F \setminus G = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcap_{j=1}^{n} \left(I'_i \setminus I''_j \right) \right)$$

und somit reicht es zu zeigen, daß $\bigcap_{j=1}^{n} \left(I'_i \setminus I''_j \right) \in \mathcal{F}$ ist. Klar ist, daß $I'_i \setminus I''_j \in \mathcal{F}$ ist. Also reicht es zu zeigen, daß der Durchschnitt zweier Elemente aus $\mathcal{F}$ zu $\mathcal{F}$ gehört: Seien F,G wie oben

$$\Rightarrow \quad F \cap G = \left(\bigcup_{i=1}^{m} I'_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} I''_j \right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} \underbrace{I'_i \cap I''_j}_{\in J} \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung.}$$

$]\!]$

<u>2. Schritt</u>: Es existiert genau ein Inhalt λ auf $\mathcal{F}$, so daß $\lambda\left(]a,b]\right) = b-a$ für alle $]a,b] \in J$ ist.

$\llbracket$ Jedes $F \in \mathcal{F}$ besitzt eine Darstellung

$$F = I_1 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} I_n \quad \text{mit } I_j \in J \quad (!)$$

Für jeden Inhalt λ auf $\mathcal{F}$ gilt dann

$$\lambda(F) = \lambda(I_1) + \ldots + \lambda(I_n),$$

das heißt λ ist bereits eindeutig durch Werte auf J festgelegt.
Für $I =]a,b] \in J$ sei $\lambda(I) = b-a$. Dann gilt:

(a) $I =]a,b] =]a,c] \mathbin{\dot\cup}]c,b] = I_1 \mathbin{\dot\cup} I_2$

$$\Rightarrow \quad \lambda(I) = b-a = (b-c)+(c-a) = \lambda(I_1) + \lambda(I_2)$$

und dann induktiv

$$\lambda\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} I_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i) \quad \text{für } I_i \in J \text{ paarweise disjunkt,}$$

falls $\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}} I_i = I =]a,b]$.

(b) Seien nun

$$F = I_1 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} I_n = J_1 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} J_m$$

zwei Darstellungen von $F \in \mathcal{F}$, so ist

$$\lambda(I_1) + \ldots + \lambda(I_n) = \lambda(J_1) + \ldots + \lambda(J_m)$$

zu zeigen. Es ist: $I_j \cap F = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{m}} (I_j \cap J_i) = I_j$

$$\stackrel{(a)}{\Rightarrow} \quad \lambda(I_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(I_j \cap J_i).$$

Analog folgt

$$\lambda(J_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(I_j \cap J_i)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda(I_j) = \sum_{j=1}^{m} \lambda(J_i).$$

(c) Nach (b) ist die Zahl

$$\lambda(F) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(I_j)$$

unabhängig von der Darstellung $F = I_1 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} I_n$ und somit ist λ auf $\mathcal{F}$ wohldefiniert, additiv und $\lambda(\emptyset) = 0$, also ist λ der eindeutige Inhalt. $\rrbracket$

<u>3. Schritt</u>: Der Inhalt λ auf $\mathcal{F}$ ist ein Prämaß.

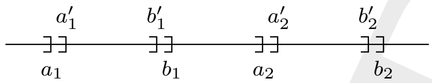
$\llbracket$ Da λ endlich ist, genügt es nach Satz (2.5) die $\emptyset$-Stetigkeit zu zeigen:
Sei $(F_n) \subset \mathcal{F}$, $F_n \downarrow \emptyset$. Es reicht zu zeigen, daß aus der Annahme

$$\delta := \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda(F_n) > 0$$

folgt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Nun ist $F_n = I_1 \cup \ldots \cup I_{m_n}$ mit $I_j \in J$



Durch Verkleinerung der Intervalle I_j erhalten wir ein $G_n \in \mathcal{F}$ mit $\overline{G_n} \subset F_n$ und $\lambda(F_n) - \lambda(G_n) \leq 2^{-n}\delta$. Wir setzen $H_n = G_1 \cap \ldots \cap G_n$

$$\Rightarrow \quad (H_n) \subset \mathcal{F} \text{ mit } H_n \supset H_{n+1} \quad \text{und} \quad \overline{H_n} \subset \overline{G_n} \subset F_n.$$

Da F_n beschränkt ist, ist $\left(\overline{H_n}\right)$ eine Folge kompakter Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $\overline{H_n} \downarrow$. Nach Aufgabe (2.10) oder Heuser - Analysis U - Satz 157.6 ist dann, falls $\overline{H_n} \neq \emptyset \, \forall n$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H_n} \neq \emptyset$$

und somit auch

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

Bleibt zu zeigen:

$$H_n \neq \emptyset \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dazu zeigen wir zuerst

$$\forall n \geq 1 : \lambda(H_n) \geq \lambda(F_n) - \delta\left(1 - 2^{-n}\right). \qquad (\#)$$

$\boxed{n = 1:}$ $H_1 = G_1$ und $\lambda(F_1) - \lambda(G_1) \leq 2^{-1}\delta$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda(G_1) \geq \lambda(F_1) - 2^{-1}\delta = \lambda(F_1) - \left(1 - 2^{-1}\right)\delta.$$

$\boxed{n \rightsquigarrow n+1:}$ Es ist $H_{n+1} = G_{n+1} \cap H_n$

$$\Rightarrow \quad \lambda(H_{n+1}) = \lambda(G_{n+1}) + \lambda(H_n) - \lambda(G_{n+1} \cup H_n).$$

Nach Induktionsvorsaussetzung gilt $\lambda(H_n) \geq \lambda(F_n) - \delta(1 - 2^{-n})$; nach Wahl von G_{n+1}:

$$\lambda(G_{n+1}) \geq \lambda(F_{n+1}) - 2^{-n-1}\delta \quad \text{sowie} \quad G_{n+1} \cup H_n \subset F_{n+1} \cup F_n = F_n$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(G_{n+1} \cup F_n) \leq \lambda(F_n).$$

Zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} \lambda(H_{n+1}) &\geq \lambda(F_{n+1}) - 2^{-n-1}\delta + \lambda(F_n) - \delta\left(1 - 2^{-n}\right) - \lambda(F_n) \\ &= \lambda(F_{n+1}) - \delta\left(1 - 2^{-n-1}\right). \end{aligned}$$

Also gilt (#).
Da $\lambda(F_n) \geq \delta \; \forall n \geq 1$ folgt aus (#), daß

$$\lambda(H_n) \geq 2^{-n}\delta > 0,$$

insbesondere $H_n \neq \emptyset$. $\rrbracket$

λ ist also ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{F}$ mit $\lambda(]a,b]) = b - a$. λ ist σ-endlich und somit nach Satz (2.16) ein eindeutiges Maß $\lambda^1 := \lambda$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{A}(\mathcal{F})$ mit $\lambda^1(]a,b]) = b - a$. λ^1 heißt eindimensionales <u>*Lebesgue*</u>-Maß.

2.18 Sprechweisen

(a) Sei $(E, \mathbf{d})$ ein (vollständiger) metrischer Raum.

$$\mathfrak{B}(E) = \mathfrak{A}(\{O \subset E \mid O \text{ offen}\})$$

heißt <u>*Borel*'sche σ-Algebra</u> in E (vergleiche $E = \mathbb{R}^d$).

(b) Seien $\Omega \neq \emptyset$, $\mathfrak{A}$ σ-Algebra in Ω. Dann heißt $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein <u>Meßraum</u>. $A \in \mathfrak{A}$ heißt <u>meßbar</u>.

(c) Ist μ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so wird $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein <u>Maßraum</u> genannt.
Ist speziell $\mu(\Omega) = 1$, so heißt $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein <u>Wahrscheinlichkeitsraum</u>.

2.19 Definition ($\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar)

(Vergleiche Stochastik I (4.1) Zufallsvariable.) Es seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ Meßräume und $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. T heißt <u>$\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar</u>, wenn

$$\forall A' \in \mathfrak{A}' : T^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \in A'\} \in \mathfrak{A}.$$

Wir schreiben dann auch

$$T : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}').$$

<u>Bemerkung</u>:

$$T : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}') \quad \Leftrightarrow \quad T^{-1}(\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{A}.$$

2.20 Beispiele

(Vergleiche Stochastik I)

(a) Jede konstante Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar.
⟦ Sei $T(\omega) = a \ \forall \omega \in \Omega$

$$\Rightarrow \quad T^{-1}(A') = \begin{cases} \Omega & a \in A' \\ \emptyset & a \notin A' \end{cases} \in \mathfrak{A} \text{ per Definition.}$$

⟧

(b) Sind E, E' metrische Räume, so ist jede stetige Abbildung $T : E \to E'$ $\mathfrak{B}(E)$-$\mathfrak{B}(E')$-meßbar.
⟦ Sei $\mathcal{O}'$ das System aller offenen Teilmengen in E'. Da T stetig

$$\Rightarrow \quad T^{-1}(O') \in \mathfrak{B}(E) \ \forall O' \in \mathcal{O}'.$$

Die Meßbarkeit folgt nun aus: ⟧

2.21 Satz

Es seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ Meßräume; $\mathcal{E}'$ sei ein Erzeuger von $\mathfrak{A}'$. Eine Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ ist genau dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar, wenn

$$T^{-1}(E') \in \mathfrak{A} \quad \forall E' \in \mathcal{E}'.$$

Beweis:
Sei

$$\mathcal{Q}' := \left\{Q' \in \mathcal{P}o\tau(\Omega') \mid \mathrm{T}^{-1}(Q') \in \mathfrak{A}\right\}.$$

Dann ist $\mathcal{Q}'$ eine σ-Algebra in Ω', also ist

$$\mathfrak{A}' \subset \mathcal{Q}' \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}' \subset \mathcal{Q}'.$$

Aus dieser Bedingung folgt $\mathcal{E}' \subset \mathfrak{A}'$, also ist $\mathfrak{A}' \subset \mathcal{Q}'$, das heißt

$$T^{-1}(A') \in \mathfrak{A} \quad \forall A' \in \mathfrak{A}'$$

$\square$

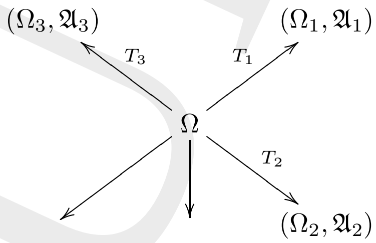
2.22 Eigenschaft

Es seien

$$T_1 : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \quad \text{und} \quad T_2 : (\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \to (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$$
$$\Rightarrow \quad T_2 \circ T_1 : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \to (\Omega_3, \mathfrak{A}_3)\,.$$

Beweis:
Einfaches Nachrechnen!

Sprechweise:
Es sei Ω eine Menge und $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ Meßräume und
$T_i : \Omega \to \Omega_i$.
Dann heißt



$$\mathfrak{A} := \mathfrak{A}\left(T_i : i \in I\right) := \mathfrak{A}\left(\bigcup_{i\in I} \underbrace{T_i^{-1}(\mathfrak{A})}_{\sigma\text{-Algebra in }\Omega}\right)$$

die von den <u>Abbildungen $(T_i)_{i\in I}$ erzeugte σ-Algebra</u> in Ω.
Dies ist die kleinste σ-Algebra, die alle Abbildungen $T_i : \Omega \to \Omega_i$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_i$-meßbar macht. Ist $I = \{1, \dots, n\}$ so schreiben wir auch $\mathfrak{A}(T_1, \dots, T_n)$. Für $n = 1$ gilt

$$\mathfrak{A}(T_1) = \mathfrak{A}\left(T^{-1}(\mathfrak{A}_1)\right) = T^{-1}(\mathfrak{A}_1)\,.$$

Ist daher auf Ω eine σ-Algbra $\mathfrak{A}$ gegeben, so gilt:

$$T : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}') \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A}'(T) \subset \mathfrak{A}.$$

Mit Hilfe meßbarer Abbildungen läßt sich ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ zu einem Maß auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$ transformieren:

2.23 Satz und Definition (Bildmaß)

Es sei $T : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}')$ und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann wird durch

$$\mathfrak{A}' \ni A' \mapsto \mu\left(T^{-1}(A')\right)$$

ein Maß μ' auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$ definiert. μ' heißt <u>Bild von μ unter T</u> und wird mit $T(\mu)$ bezeichnet. $T(\mu)$ heißt auch <u>Bildmaß</u> von μ (unter T), also $T(\mu)(A') = \mu\left(T^{-1}(A')\right)$.

Beweis:
Ist $A' = \emptyset$

$$\Rightarrow \quad T^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mu'(\emptyset) = \mu\left(T^{-1}(\emptyset)\right) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Seien

$$(A'_n) \subset \mathfrak{A}' \text{ paarweise disjunkt} \quad \Rightarrow \quad \left(T^{-1}(A'_n)\right) \subset \mathfrak{A} \text{ paarweise disjunkt}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mu'\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A'_n\right) &= \mu\left(T^{-1}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A'_n\right)\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} T^{-1}(A'_n)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(T^{-1}(A'_n)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu'(A'_n) \end{aligned}$$

□

2.24 Beispiel

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\Omega', \mathfrak{A}') = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ und $\mu = \lambda^1$ das Lebesguemaß; $a \in \mathbb{R}$ fest und $T(x) = x + a$ die Translation. T ist stetig und somit $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar. Sei $\lambda' = T(\lambda^1)$. Da T bijektiv

$$\Rightarrow \quad T^{-1}(]c,d]) =]c-a, d-a] \quad \Rightarrow \quad \lambda'(]c,d]) = \lambda^1(]c-a,d-a]) = d-c = \lambda^1(]c,d]) .$$

Da $J = \{]a,b]\}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ist folgt mit dem Eindeutigkeitssatz (2.9) $\lambda' = \lambda^1$, das heißt $T(\lambda^1) = \lambda^1$.
Man nennt diese Eigenschaft die <u>Translationsinvarianz</u> von λ^1.

Anschließend zeigen wir noch:

2.25 Satz

Auf $\mathcal{POT}(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$ existiert kein translationsinvariantes Maß λ mit $\lambda(]a,b]) = \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$.
Insbesondere gilt $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d) \neq \mathcal{POT}(\mathbb{R}^d)$.
Beweis:
Auf $\mathbb{R}^d$ definieren wir eine Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^d.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^d\big|_{\sim} = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}^d\} = \{x + \mathbb{Q}^d \mid x \in \mathbb{R}^d\} .$$

Es gilt:

$$[x] = [y] \quad \Leftrightarrow \quad x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x + \mathbb{Q}^d = y + \mathbb{Q}^d.$$

Da zu $\eta \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq \eta < n+1$ existiert, also $\eta - n \in [0,1[$

$$\Rightarrow \quad \forall [x] \in \mathbb{R}^d\big|_{\sim} \; \exists x_0 \in [x] : x_0 \in [0, \mathbb{1}] ,$$

wobei $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)$. Nach dem Auswahlaxiom gibt es also eine Menge $K \subset [0, \mathbb{1}[$, so daß

$$\mathbb{R}^d\big|_{\sim} = \{[x] \mid x \in K\} \quad \text{und} \quad \#([x] \cap K) = 1$$

für alle $[x] \in \mathbb{R}^d\big|_{\sim}$.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^d = \bigcup_{k \in K} (k + \mathbb{Q}^d) \underset{(1)}{\overset{!}{=}} \dot{\bigcup_{y \in \mathbb{Q}^d}} (y + K)$$

$$\text{und} \quad y_1 \neq y_2 \quad \underset{(2)}{\Rightarrow} \quad (y_1 + K) \cap (y_2 + K) = \emptyset \quad (y_1, y_2 \in \mathbb{Q}^d) .$$

$\llbracket$

(1)

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{k \in K} (k + \mathbb{Q}^d) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in K : x \in k + \mathbb{Q}^d \\ &\Leftrightarrow \quad \exists k \in K \, \exists y \in \mathbb{Q}^d : x = k + y \\ &\Leftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{Q}^d \, \exists k \in K : x = y + k \\ &\Leftrightarrow \quad \exists y \in \mathbb{Q}^d : x \in y + K \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{y \in \mathbb{Q}^d} (y + K) . \end{aligned}$$

(2) Annahme:

$$(y_1 + K) \cap (y_2 + K) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad \exists k, k' \in K : y_1 + k = y_2 + k' \quad \Rightarrow \quad k \sim k' \quad \overset{(*)}{\Rightarrow} \quad k = k' \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2 \quad \lightning$$

Zu $(*)$: Definition von K.

$\rrbracket$

Wir nehmen nun an, daß λ wie in der Behauptung existiert

$$\Rightarrow \quad \lambda|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)} = \lambda^d.$$

<u>Annahme</u>:

$$K \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Da $\mathbb{R}^d = \dot{\bigcup}_{y \in \mathbb{Q}^d} (y + K)$ und λ σ-additiv, folgt

$$\sum_{y \in \mathbb{Q}^d} \lambda\,(y + K) = \lambda \left(\dot{\bigcup_{y \in \mathbb{Q}^d}} (y + K) \right) = \lambda\left(\mathbb{R}^d\right) = \infty.$$

Da λ translationsinvariant ist

$$\Rightarrow \quad \lambda\,(y + K) = \lambda\,(K) \quad \forall y \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad \lambda\,(K) > 0.$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} K \subset [0, \mathbb{1}[\quad &\Rightarrow \quad \dot{\bigcup_{y \in [0,1[\cap \mathbb{Q}^d}} (y + K) \subset [0, \mathbb{2}[\quad \text{mit } \mathbb{2} := (2, 2, \ldots, 2) \\ &\Rightarrow \quad \sum_{y \in [0,1[\cap \mathbb{Q}^d} \lambda\,(y + k) \leq \lambda\,([0, \mathbb{2}[) = 2^d < \infty \\ &\Rightarrow \quad \lambda\,(K) = 0 \qquad \lightning \end{aligned}$$

Also kann K nicht Borelsch sein und auf $\mathcal{POT}\left(\mathbb{R}^d\right)$ existiert kein Maß mit den gewünschten Eigenschaften. $\square$

Aufgaben:

Aufgabe 2.1:

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ überabzählbar und

$$\mathfrak{A} = \left\{ A \subset \Omega : A \text{ abzählbar oder } A^{\complement} \text{ abzählbar} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß durch $\mu_1(A) = \#A$ und

$$\mu_2(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ abzählbar} \\ \infty & A^{\complement} \text{ abzählbar} \end{cases}$$

Maße auf $\mathfrak{A}$ definiert werden.

(b) Zeigen sie, daß μ_2 $\emptyset$-stetig ist, μ_1 aber nicht.

Aufgabe 2.2:

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge mit endlich vielen Elementen. Man zeige, daß das Zählmaß ζ auf $\mathcal{POT}(\Omega)$ gleich $\sum\limits_{\omega \in \Omega} \varepsilon_\omega$ ist. Man zeige ferner, daß jedes Maß μ auf $\mathcal{POT}(\Omega)$ von der Form $\mu = \sum\limits_{\omega \in \Omega} \alpha_\omega \varepsilon_\omega$ mit $\alpha_\omega = \mu(\{\omega\})$ ist.

Aufgabe 2.3:

Es sei $\mathbf{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Dann heißt

$$F_{\mathbf{P}} : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad x \mapsto \mathbf{P}(]-\infty, x])$$

die Verteilungsfunktion von $\mathbf{P}$. Man zeige:

(a) $F_{\mathbf{P}}$ ist monoton wachsend.

(b) $F_{\mathbf{P}}$ ist stetig von rechts, das heißt $\lim\limits_{\substack{x \downarrow x_0 \\ x \neq x_0}} F_{\mathbf{P}}(x) = F_{\mathbf{P}}(x_0)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

(c) $\lim\limits_{x \uparrow x_0} F_{\mathbf{P}}(x)$ existiert für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_{\mathbf{P}}(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_{\mathbf{P}}(x) = 1$.

(e) $F_{\mathbf{P}}$ ist stetig $\Leftrightarrow \mathbf{P}(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.4:

Für ein Prämaß μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω sei

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \{A \in \mathcal{POT}(\Omega) : A \cap R \in \mathfrak{R} \text{ für alle } R \in \mathfrak{R}\}$$

und für $A \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ sei

$$\tilde{\mu}(A) = \sup\{\mu(R) : R \subset A,\, R \in \mathfrak{R}\}.$$

Zeigen Sie, daß $\widetilde{\mathfrak{R}}$ eine Algebra mit $\mathfrak{R} \subset \widetilde{\mathfrak{R}}$ ist und daß $\tilde{\mu}$ ein Prämaß auf $\widetilde{\mathfrak{R}}$ mit $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathfrak{R}$ ist. $\tilde{\mu}$ heißt Fortsetzung von μ auf $\widetilde{\mathfrak{R}}$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß $\tilde{\mu}$ ein Inhalt auf $\widetilde{\mathfrak{R}}$ ist und verwenden Sie dann Satz (2.5).

Aufgabe 2.5: μ-Nullmenge

Es sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω. Es sei

$$\mathcal{N}_\mu = \{N \in \mathfrak{A} : \mu(N) = 0\}$$

das System der <u>μ-Nullmengen</u>. Man zeige:

(a) $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$;

(b) Für $N \in \mathcal{N}_\mu$, $M \subset N$ mit $M \in \mathfrak{A}$ gilt $M \in \mathcal{N}_\mu$;

(c) Sind $N_n \in \mathcal{N}_\mu$ für alle $n \geq 1$, so gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}_\mu.$$

Aufgabe 2.6:

Es sei $f : \mathbb{R} \to [0,1]$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie dasjenige Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ welches F als Verteilungsfunktion besitzt.
Hinweis: Raten sie μ oder Aufgabe (2.9).

Aufgabe 2.7:

Das Intervall $A_0 = [0,1]$ zerlegen wir in drei gleich lange Teilintervalle und entfernen das Innere des mittleren. Die verbleibende Menge A_1 besteht dann aus zwei disjunkten abgeschlossenen Intervallen. Mit jedem dieser Intervalle verfahren wir wie vorher mit A_0. Die verbleibende Menge A_2 besteht nun aus vier disjunkten abgeschlossenen Teilintervallen. Mit diesen verfahren wir genauso, und so weiter. Auf diese Weise erhalten wir eine absteigende Folge (A_n) von Mengen. Wir setzen

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Zeigen sie

(a) $C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3} \mid a_n \in \{0,2\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$;

(b) C ist nicht abzählbar;

(c) C ist λ^1-Nullmenge.

Aufgabe 2.8:

Es sei μ ein endliches Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω und sei μ^* das zugehörige äußere Maß auf $\mathcal{P}ot(\Omega)$. Zeigen Sie: Zu jeder Menge $Q \in \mathcal{P}ot(\Omega)$ existiert eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften:

(i) $Q \subset A$;

(ii) $\mu^*(Q) = \mu(A)$;

(iii) $\mu(B) = 0$ für alle $B \in \mathfrak{A}$ mit $B \subset A \setminus Q$.

Hinweis: Man zeige die Existenz einer Folge $(A_n) \subset \mathfrak{A}$ mit $Q \subset A_n$ und $\mu(A_n) \leq \mu^*(Q) + n^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann leistet $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$ das Verlangte.

Aufgabe 2.9:

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine beschränkte monoton wachsende Funktion mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Weiter sei f stetig von rechts und $\lim_{x\uparrow x_0} f(x)$ existiere für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Wie in Beispiel (2.17) zeige man, daß genau ein Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ mit $\mu(]-\infty, x]) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert.
Hinweise:

(1) Es sei $\mathcal{F}$ wie in (2.17). Zeigen sie, daß genau ein Inhalt μ auf $\mathcal{F}$ mit $\mu(]a, b]) = f(b) - f(a)$ existiert.

(2) μ ist Prämaß auf $\mathcal{F}$.

Aufgabe 2.10:

Für $n \geq 1$ seien $H_n \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $H_n \neq \emptyset$. Weiter gelte $H_n \downarrow$, das heißt $H_{n+1} \subset H_n$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie, daß dann

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \neq \emptyset$$

gilt.

Aufgabe 2.11:

Es sei $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{POT}(\Omega')$. Zeigen sie, daß

$$T^{-1}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}')) = \mathfrak{A}\left(T^{-1}(\mathcal{E}')\right)$$

gilt.

Aufgabe 2.12:

Es sei $\mathbb{T} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^2$ mit der σ-Algebra

$$\mathfrak{B}(\mathbb{T}) = \mathbb{T} \cap \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Man beweise die Existenz eines Maßes $\nu \neq 0$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{T})$ welches bezüglich aller Drehungen von $\mathbb{T}$ invariant ist.
Hinweis: Man wähle ν als geeignetes Bild des Lebesgue-Maßes λ^1.

3. Kapitel: Integrationstheorie

In diesem Kapitel wollen wir auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ das Integral $\int_\Omega f \, \mathbf{d}\mu$ für eine möglichst große Klasse von Funktionen f definieren. Wir wählen dabei den Zugang aus Stochastik I.

3.0 Erinnerung

Es sei $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ die zwei-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$. Eine Menge heißt *Borel-Menge*, falls $A \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt numerische Funktion.

3.1 Definition ($\mathfrak{A}$-meßbar)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Meßraum. Eine numerische Funktion heißt ($\mathfrak{A}$)-meßbar, falls

$$\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < \alpha\} \in \mathfrak{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3.2 Bemerkung

Da

$$\{f < \alpha\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$$

und

$$\{]-\infty, \alpha[\mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ist, folgt aus Satz (2.21), daß

$$f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$$

für $\mathfrak{A}$-meßbares f.

⌈ Vergleiche (2.19): $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-Meßbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft, da hier nur Meßbarkeit auf einem Erzeuger von $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ gefordert wird. ⌋

3.3 Eigenschaften

Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Meßraum und $f, f_n, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbare numerische Funktionen, sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) $\alpha f + \beta g$, sowie $f \cdot g$ sind meßbar.

(b)

$$\begin{aligned}
\{f < g\} &:= \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < g(\omega)\} \\
\{f \leq g\} &:= \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq g(\omega)\} \\
\{f = g\} &:= \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = g(\omega)\} \\
\{f \neq g\} &:= \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}
\end{aligned}$$

gehören zu $\mathfrak{A}$.

(c)

$$\sup_{n \geq 1} f_n \qquad \inf_{n \geq 1} f_n \qquad \limsup_{n \to \infty} f_n \qquad \liminf_{n \to \infty} f_n$$

sind meßbare numerische Funktionen.

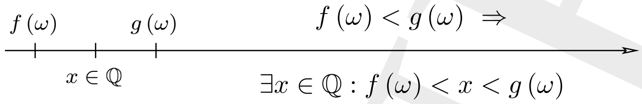
(d) Schreibt man $f = f_+ - f_-$ mit $f_+ = \max(f, 0)$ und $f_- = \max(-f, 0)$, so sind f_-, f_+ meßbar und damit ist auch $|f| = f_+ + f_-$ meßbar.

(e) f ist genau dann meßbar, won für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{f \leq \alpha\}$ oder $\{f \geq \alpha\}$ oder $\{f > \alpha\}$ oder $\{f < \alpha\}$ zu $\mathfrak{A}$ gehören.

Beweis:

(a) Stochasik I (3.9.2)

(b) Da $\mathbb{Q}$ abzählbar und $\{f < g\} = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{Q}} \underbrace{\{f < x\}}_{\in \mathfrak{A}} \cap \underbrace{\{x < g\}}_{\in \mathfrak{A}}$ folgt mit (e) die Behauptung.



Andere Fälle analog!

(c) Nach Stochastik I (3.9.5) sind $\sup\limits_n f_n$ und $\inf\limits_n f_n$ meßbar. Da

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{m\geq n} f_m \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} = \sup_{n\geq 1} \inf_{m\geq n} f_m$$

folgt die Behauptung.

(d) $x \mapsto \max(x, 0)$ ist stetig, also $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar. Mit (2.22) folgt daß f_+, f_- meßbar sind und nach (a) ist dann auch $|f| = f_+ + f_-$ meßbar.

(e)

$$\begin{aligned} \{f \geq \alpha\} &= \{f < \alpha\}^{\complement} \\ \{f > \alpha\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ f \geq \alpha + \frac{1}{n} \right\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\square$

3.4 Definition (meßbare Elementarfunktion, Integral)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Meßraum. $\mathcal{E}(\mathfrak{A}) = \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ ist die Menge aller reellwertigen meßbaren Funktionen $g \geq 0$, die nur endlich viele Werte annehmen. g heißt meßbare Elementarfunktion.

⌈ Bemerkung:

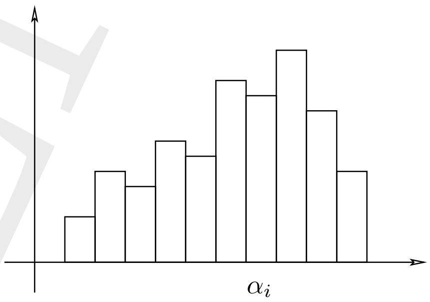
Ist

$$g(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \quad \Rightarrow \quad A_i = g^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathfrak{A}$$

und

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$$

mit paarweise disjunkten Borelmengen A_i und $\alpha_i \geq 0$.



⌋

Das Integral $\int_\Omega f \, \mathbf{d}\mu$ für eine meßbare numerische Funktion wird dann in 3 Schritten definiert:

3.4.1 Integral von meßbaren Elementarfunktionen

Sei $g \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 1_{A_i}$ mit $\alpha_i \geq 0$, $A_i \in \mathfrak{A}$. Dann heißt μ

$$\int g \, \mathbf{d}\mu := \int_\Omega g \, \mathbf{d}\mu := \int_\Omega g(\omega) \, \mathbf{d}\mu(\omega) := \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot \mu \{\omega \in \Omega \mid g(\omega) = x\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i)$$

das <u>Integral von g bezüglich μ</u>.

⟦ $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ mit paarweise disjunkten $A_i \in \mathfrak{A}$, $\alpha_i \geq 0$

$$\Rightarrow \quad \int g \, \mathbf{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i)$$

⟧

3.4.2 Integral nichtnegativer meßbarer numerischer Funktionen

Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ meßbar. Dann heißt

$$\int f \, \mathbf{d}\mu := \sup_{\substack{g \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}) \\ g \leq f}} \int g \, \mathbf{d}\mu$$

das <u>Integral von f bezüglich μ</u>.
Hier ist $\int f \, \mathbf{d}\mu = +\infty$ möglich; f heißt dann <u>quasiintegrierbar</u>. Ist $\int f \, \mathbf{d}\mu < \infty$ so heißt f <u>integrierbar</u>.

Wesentlich ist der folgende Satz:

3.5 Satz (*Beppo-Levi*)

Es seien $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ meßbar mit $f_n \leq f_{n+1}$, sowie $f := \sup\limits_{n \geq 1} f_n$. dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n \, \mathbf{d}\mu = \int f \, \mathbf{d}\mu.$$

Beweis: Siehe Stochastik I Satz (3.14).

Technisch wichtig ist auch:

3.6 Lemma

Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ meßbar. Dann existiert eine Folge $(f_n) \in \mathcal{E}(\mathfrak{A})$ mit $f_n \leq f_{n+1}$ und $f_n \to f$.
Beweis: Siehe Stochastik I Lemma (3.15).

3.4.3 Integral meßbarer numerischer Funktionen

Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar. $f = f_+ - f_-$ heißt integrierbar, falls

$$\int f_+ \, \mathbf{d}\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int f_- \, \mathbf{d}\mu < \infty.$$

In diesem Falle heißt

$$\int f \, \mathbf{d}\mu := \int f_+ \, \mathbf{d}\mu - \int f_- \, \mathbf{d}\mu$$

das <u>Integral von f bezüglich μ</u>.

3.7 Bezeichnungen

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a)
$$\mathcal{L}^1(\mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ meßbar und integrierbar}\}$$

(b) Ist $A \in \mathfrak{A}$ so setzen wir für meßbares $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$
$$\int_A f \, \mathbf{d}\mu := \int 1_A \cdot f \, \mathbf{d}\mu = \int_\Omega 1_A(\omega) \, f(\omega) \, \mathbf{d}\mu(\omega).$$

3.8 Eigenschaften

Seinen $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a)
$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \qquad & (\alpha f + \beta g)(\omega) := \alpha \cdot f(\omega) + \beta \cdot g(\omega) \\ \Rightarrow \quad & \alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu), \end{aligned}$$

insbesondere ist $\mathcal{L}^1(\mu)$ ein reeller Vektorraum.

(b)
$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int f \, \mathbf{d}\mu \leq \int g \, \mathbf{d}\mu$$

(c)
$$\left| \int f \, \mathbf{d}\mu \right| \leq \int |f| \, \mathbf{d}\mu$$

Insbesondere:
$$f \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad |f| \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Beweis:

(a) Durch einfaches Nachrechnen.

(b)
$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad f_+ \leq g_+ \text{ und } f_- \geq g_-$$
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int f \, \mathbf{d}\mu \quad & = \quad \int f_+ \, \mathbf{d}\mu - \int f_- \, \mathbf{d}\mu \\ & \underset{(3.13)}{\overset{\text{Stochastik I}}{\leq}} \int g_+ \, \mathbf{d}\mu - \int g_- \, \mathbf{d}\mu \\ & = \quad \int g \, \mathbf{d}\mu \end{aligned}$$

(c)
$$|f| = f_+ + f_- \quad \Rightarrow \quad f \leq |f| \text{ und } -f \leq |f|$$
$$\Rightarrow \quad \int f \, \mathbf{d}\mu \leq \int |f| \, \mathbf{d}\mu \quad \text{und} \quad -\int f \, \mathbf{d}\mu \leq \int |f| \, \mathbf{d}\mu$$
$$\Rightarrow \quad \left| \int f \, \mathbf{d}\mu \right| \leq \int |f| \, \mathbf{d}\mu$$

□

3.9 Sprechweise

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. sei A eine Eigenschaft derart, daß für alle $\omega \in \Omega$ definiert ist, ob ω diese Eigenschaft hat oder nicht. Wir sagen „A gilt (μ-) fast überall“, falls es eine μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ gibt, das heißt $\mu(N) = 0$, so daß alle Punkte $\omega \in N^{\complement}$ die Eigenschaft A besitzen.

3.10 Beispiele

Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$.

(a) $f = g$ (μ-) fast überall, das heißt

$$\exists N \in \mathfrak{A},\ \mu(N) = 0 \quad \forall \omega \in N^{\complement} : f(\omega) = g(\omega).$$

(b) $|f| < \infty$ (μ-) überall, das heißt

$$\exists N \in \mathfrak{A},\ \mu(N) = 0 \quad \forall \omega \in N^{\complement} : |f(\omega)| < \infty.$$

(c) $f \leq g$ (μ-) überall, $f \geq 0$ (μ-) überall, usw ...

3.11 Satz

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Sei $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ meßbar. Dann gilt

$$\int f \,\mathbf{d}\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \ (\mu\text{-}) \text{ fast überall.}$$

(b) Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar und $f = g$ μ-fast überall. Dann gilt:

(i)

$$f \geq 0,\ g \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int f \,\mathbf{d}\mu = \int g \,\mathbf{d}\mu;$$

(ii)

$$f \text{ integrierbar} \quad \Rightarrow \quad g \text{ integrierbar und } \int f \,\mathbf{d}\mu = \int g \,\mathbf{d}\mu.$$

(c) Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar und $|f| \leq g$ μ-fast überall. Dann gilt:

$$g \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Beweis:

(a)

$$f \text{ meßbar} \quad \Rightarrow \quad N := \{f \neq 0\} = \{f > 0\} \in \mathfrak{A}$$

Zu zeigen:

$$\int f \,\mathbf{d}\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu(N) = 0.$$

„ ⇒ “:

$$A_n = \left\{ f \geq \frac{1}{n} \right\} \in \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad A_n \uparrow N.$$

Da $\mu(N) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ (Stetigkeit von unten) ist $\mu(A_n) = 0\, \forall n \geq 1$ zu zeigen.

$$\text{Da } f \geq \frac{1}{n} 1_{A_n} \quad \Rightarrow \quad 0 = \int f \,\mathbf{d}\mu \geq \frac{1}{n} \int 1_{A_n} \,\mathbf{d}\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n) \quad \Rightarrow \quad \mu(A_n) = 0.$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei $u_n := n \cdot 1_N$

$$\Rightarrow \quad \int u_n \, \mathbf{d}\mu = n\mu(N) = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Sei $g := \sup_n u_n \Rightarrow u_n \uparrow g$ und mit Beppo-Levi (3.5)

$$\int g \, \mathbf{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int u_n \, \mathbf{d}\mu = 0.$$

Da $f \leq g$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \int f \, \mathbf{d}\mu \leq \int g \, \mathbf{d}\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung } (a).$$

(b) **(i)** $N := \{f \neq g\} \Rightarrow \mu(N) = 0$

$$\Rightarrow \quad \int_N f \, \mathbf{d}\mu = \int 1_N f \, \mathbf{d}\mu \stackrel{(a)}{=} 0 \stackrel{(a)}{=} \int 1_N g \, \mathbf{d}\mu = \int_N g \, \mathbf{d}\mu,$$

da $1_N f = 0$ μ-fast überall. Sei $M := N^{\complement}$; aus dem zweiten Schritt folgt

$$\int_M f \, \mathbf{d}\mu = \int_M g \, \mathbf{d}\mu,$$

da $f(\omega) = g(\omega)\ \forall \omega \in M$.

$$\Rightarrow \quad \int f \, \mathbf{d}\mu = \int_M f \, \mathbf{d}\mu + \int_N f \, \mathbf{d}\mu = \int_M g \, \mathbf{d}\mu + \int_N g \, \mathbf{d}\mu = \int g \, \mathbf{d}\mu.$$

(ii) Es gilt $f_+ = g_+$ μ-fast überall und $f_- = g_-$ μ-fast überall.

$$\stackrel{(i)}{\Rightarrow} \quad \int f_+ \, \mathbf{d}\mu = \int g_+ \, \mathbf{d}\mu \quad \text{und} \quad \int f_- \, \mathbf{d}\mu = \int g_- \, \mathbf{d}\mu.$$

Da f integrierbar $\Rightarrow g$ integrierbar und $\int f \, \mathbf{d}\mu = \int g \, \mathbf{d}\mu$.

(c) Sei $N := \{|f| > g\} \Rightarrow \mu(N) = 0$ und da $|f(\omega)| \leq g(\omega)\ \forall \omega \in N^{\complement}$

$$\Rightarrow \quad \int_{N^{\complement}} |f| \, \mathbf{d}\mu \leq \int_{N^{\complement}} g \, \mathbf{d}\mu.$$

Mit (a) gilt

$$\begin{aligned} \int |f| \, \mathbf{d}\mu &= \int_N |f| \, \mathbf{d}\mu + \int_{N^{\complement}} |f| \, \mathbf{d}\mu \\ &\leq \int_N g \, \mathbf{d}\mu + \int_{N^{\complement}} g \, \mathbf{d}\mu \\ &= \int g \, \mathbf{d}\mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |f| \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

$\square$

3.12 Satz (Lemma von *Fatou*)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ meßbar. Dann gilt:

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) \mathbf{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathbf{d}\mu.$$

Beweis:
Die Funktionen

$$f := \liminf_{n\to\infty} f_n \quad \text{und} \quad g_n := \inf_{m\geq n} f_m$$

sind meßbar. Nach der Definition von $\liminf$ (1.1) gilt $g_n \uparrow f$ und dann mit Beppo-Levi (3.5):

$$\int f \, \mathbf{d}\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int g_n \, \mathbf{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathbf{d}\mu.$$

Da $g_n \leq f_m \, \forall m \geq n$

$$\Rightarrow \quad \int g_n \, \mathbf{d}\mu \leq \int f_m \, \mathbf{d}\mu \quad \forall m \geq n \quad \Rightarrow \quad \int g_n \, \mathbf{d}\mu \leq \inf_{m\geq n} \int f_m \, \mathbf{d}\mu.$$

Also:

$$\begin{aligned} \int f \, \mathbf{d}\mu &= \int \liminf f_n \, \mathbf{d}\mu \left(= \lim_{n\to\infty} \int g_n \, \mathbf{d}\mu \right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \inf_{m\geq n} \int f_m \, \mathbf{d}\mu \\ &= \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, \mathbf{d}\mu \end{aligned}$$

□

Als letzten wesentlichen Konvergenzsatz brauchen wir noch den *Lebesgue*'schen Konvergenzsatz:

3.13 Konvergenzsatz (von *Lebesque* über majorisierte Konvergenz)

Es sei $(f_n) \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ und es existiere $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ μ-fast überall. Es existiere ein $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $g \geq 0$ mit $|f_n| \leq g$ μ-fast überall. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathbf{d}\mu = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \mathbf{d}\mu = \int f \, \mathbf{d}\mu$$

g heißt <u>integrierbare Majorante</u>.
Beweis:
Sei $f := \lim_{n\to\infty} f_n$. Dann ist f μ-fast überall wohldefiniert und wir setzen $f(\omega) = 0 \, \forall \omega \in N$, $\mu(N) = 0$.

$$|f_n| \leq g \, \mu\text{-fast überall} \, \forall n \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |f| \leq g \quad \mu\text{-fast überall}$$

und somit nach (3.11.c) $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Da nach Voraussetzung $-g \leq f_n \leq g$ μ-fast überall

$$\Rightarrow \quad 0 \leq f_n + g \leq 2g \, \mu\text{-fast überall} \quad \text{mit} \quad 2g \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Also reicht es den Fall $f_n \geq 0$ zu betrachten, da dann

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int f_n \, \mathbf{d}\mu + \int g \, \mathbf{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int f_n + g \, \mathbf{d}\mu \\ &= \int \lim_{n\to\infty} (f_n + g) \, \mathbf{d}\mu \\ &= \int f + g \, \mathbf{d}\mu \\ &= \int f \, \mathbf{d}\mu + \int g \, \mathbf{d}\mu. \end{aligned}$$

Sei nun $f_n \geq 0$ μ-fast überall. Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\int f \,\mathbf{d}\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathbf{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \,\mathbf{d}\mu.$$

Es bleibt

$$\int f \,\mathbf{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathbf{d}\mu$$

zu zeigen.
Eine weitere Anwendung des Lemmas von Fatou auf $g - f_n \geq 0$ liefert

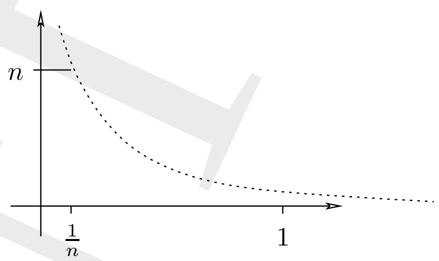
$$\begin{aligned}
\int g \,\mathbf{d}\mu - \int f \,\mathbf{d}\mu &= \int (g-f) \,\mathbf{d}\mu \\
&= \int \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) \,\mathbf{d}\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int (g - f_n) \,\mathbf{d}\mu \\
&= \int g \,\mathbf{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathbf{d}\mu \\
\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \int f_n \,\mathbf{d}\mu &\leq \int f \,\mathbf{d}\mu
\end{aligned}$$

□

3.14 Beispiel

Die Bedingung der Existenz einer integrierbaren Majorante in (3.13) ist notwendig:
Beachte

$$\left([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda^1\big|_{[0,1]}\right) \quad \text{und} \quad f_n(x) := \begin{cases} n & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad f_n \to 0 \quad \lambda^1\text{-fast überall (bis auf } x = 0).$$

Aber

$$\int f_n \,\mathbf{d}\lambda^1 = n\lambda^1\left(\left]0, \frac{1}{n}\right]\right) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \quad \forall n \geq 1.$$

Also

$$0 = \int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathbf{d}\lambda^1 \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathbf{d}\lambda^1 = 1.$$

Die (im wesentlichen) einzige mögliche Majorante ist $g(x) := \frac{1}{x}$, da aber

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \,\mathbf{d}x = \infty$$

ist, geht es schief.

Sei nun $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Meßraum und $T : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}')$. Nach (2.23) ist das Bildmaß $\mu' := T(\mu)$ definiert. Den Zusammenhang zwischen dem Integral bezüglich μ und μ' liefert:

3.15 Satz

Es sei $f' : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$-meßbar. Dann gilt

$$\int_{\Omega'} f' \, \mathbf{d}T(\mu) = \int_{\Omega} (f' \circ T) \, \mathbf{d}\mu \qquad \text{Transformationsformel.}$$

Beweis:
Nach (2.22) ist $f' \circ T : (\Omega, \mathfrak{A}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)\right)$. Sei zuerst $f' \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}')$, das heißt

$$\begin{aligned} f' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i'},\ \alpha_i \geq 0,\ A_i' \in \mathfrak{A}' \quad &\Rightarrow \quad f' \circ T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i'} \circ T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{\underbrace{T^{-1}(A_i')}_{\in \mathfrak{A}}} \\ &\Rightarrow \quad f' \circ T \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}). \end{aligned}$$

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} T(\mu)(A_i') = \mu\left(T^{-1}(A_i')\right) \quad \Rightarrow \quad \int f' \, \mathbf{d}T(\mu) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(\mu)(A_i') = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(T^{-1}(A_i')\right) \\ &= \quad \int f' \circ T \, \mathbf{d}\mu. \end{aligned}$$

Ist $f' \geq 0$ beliebig, wähle mit (3.6)

$$f_n' \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}') \quad \text{mit} \quad f_n' \leq f_{n+1}' \quad \text{und} \quad f_n' \uparrow f \quad \Rightarrow \quad f_n' \circ T \uparrow f' \circ T$$

und mit Beppo-Levi folgt:

$$\begin{aligned} \int f' \, \mathbf{d}T(\mu) \quad &\overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \quad \lim_{n\to\infty} \int f_n' \, \mathbf{d}T(\mu) \overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \lim_{n\to\infty} \int f_n' \circ T \, \mathbf{d}\mu \\ &= \quad \int f' \circ T \, \mathbf{d}\mu. \end{aligned}$$

□

3.16 Korollar

Sei $f' : (\Omega', \mathfrak{A}') \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$. Dann ist f' $T(\mu)$-integrierbar genau dann, wenn $f' \circ T$ μ-integrierbar und es gilt:

$$\int f' \, \mathbf{d}T(\mu) = \int f' \circ T \, \mathbf{d}\mu.$$

Beweis:
Nach (3.15) gilt

$$\int f_+' \, \mathbf{d}T(\mu) = \int f_+' \circ T \, \mathbf{d}\mu \quad \text{und} \quad \int f_-' \, \mathbf{d}T(\mu) = \int f_-' \circ T \, \mathbf{d}\mu$$

und offensichtlich

$$(f' \circ T)_+ = f_+' \circ T \quad \text{und} \quad (f' \circ T)_- = f_-' \circ T \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung.}$$

□

Aufgaben:

Aufgabe 3.1:

Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, daß dann auch $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ meßbar ist. Folgern Sie daraus, daß mit f auch f_+, f_- und $|f|$ meßbar sind.

Aufgabe 3.2:

Es sei Ω abzählbar und ζ das Zählmaß auf Ω. Bestimmen Sie $\mathcal{L}^1(\zeta)$ und geben Sie eine Formel für $\int f \,\mathbf{d}\zeta$ mit $f \in \mathcal{L}^1(\zeta)$ an.

Aufgabe 3.3:

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen sie, daß $|f| < \infty$ μ-fast überall gilt.

Aufgabe 3.4:

Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Zeigen Sie, daß f genau dann meßbar ist, wenn für alle $\alpha \in D$

$$\{f < \alpha\} \quad \text{oder} \quad \{f \leq \alpha\} \quad \text{oder} \quad \{f > \alpha\} \quad \text{oder} \quad \{f \geq \alpha\}$$

zu $\mathfrak{A}$ gehören.

Aufgabe 3.5:

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f meßbar bezüglich $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ist und berechnen Sie $\int f \,\mathbf{d}\lambda^1$.

Aufgabe 3.6:

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und (E, d) ein metrischer Raum. Weiter sei $f : E \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\omega \mapsto f(x, \omega)$ ist μ-integrierbar für alle $x \in E$;

(b) $x \mapsto f(x, \omega)$ ist stetig in $x_0 \in E$ für alle $\omega \in \Omega$;

(c) es existiert eine μ-integrierbare Funktion $h \geq 0$ auf Ω mit $|f(x, \omega)| \leq h(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ und alle $x \in E$.

Zeigen Sie, daß die auf E definierte Funktion

$$\varphi(x) = \int_\Omega f(x, \omega) \,\mathbf{d}\mu(\omega)$$

stetig in x_0 ist.

Hinweis: Konvergenzsatz von *Lebesgue*.

Aufgabe 3.7: *Hölder*-Ungleichung/ *Minkowski*-Ungleichung

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \geq 1$. Weiter sei

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ meßbar}, \int |f|^p \, \mathbf{d}\mu < \infty \right\}$$

der Raum der p-fach integrierbaren Funktionen und für $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ sei

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, \mathbf{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

die p-Halbnorm. Zeigen Sie, daß

(a) für $p > 1$ und $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad (\textit{Höldersche} \text{ Ungleichung})$$

(b) für $p \geq 1$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ gilt:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (\textit{Minkowski} \text{ Ungleichung})$$

Hinweis: Verwenden Sie die 3 Schrittdefinition des Integrals und im ersten Schritt die Hölder- beziehungsweise Minkoski-Ungleichung im $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3.8:

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum und $1 \leq p' \leq p < \infty$. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^{p'}(\mu).$$

Hinweis: Hölder Ungleichung.

4. Kapitel: Produktmaße und der Satz von Fubini

Seien $I = \{1, \ldots, n\}$, $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)_{i \in I}$

$$\Omega := \bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$$

der Produktraum. Für $i \in I$ sei $p_i : \Omega \to \Omega_i$ die Projektion $p_i(\omega_1, \ldots \omega_n) = \omega_i$. Dann heißt

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i := \mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n := \mathfrak{A}(p_1, \ldots, p_n)$$

das Produkt der σ-Algebren $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$, oder Produkt-$\sigma$-Algebra. Dies ist die kleinste σ-Algebra, die alle $p_i : \Omega \to \Omega_i$ $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$-$\mathfrak{A}_i$-meßbar macht.

Es gilt

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}\left(\bigcup_{i=1}^{n} p_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)\right).$$

4.1 Satz

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\mathcal{E}_i$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_i$ in Ω_i, so daß eine Folge $(E_{k,i})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_i$ mit $E_{k,i} \uparrow \Omega_i$ existiert. Dann ist

$$\{E_1 \times \ldots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i\}$$

ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n$.

Da $\mathfrak{A}_i := \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_i) \Rightarrow \{A_1 \times \ldots \times A_n \mid A_i \in \mathfrak{A}_i\}$ erzeugt $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$.

Beweis:

Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige σ-Algebra in Ω. Nach (2.21) reicht es zu zeigen:

$$\text{alle } p_i \text{ sind } \mathfrak{A}\text{-}\mathfrak{A}_i\text{-meßbar} \quad \Leftrightarrow \quad E_1 \times \ldots \times E_n \in \mathfrak{A} \quad \forall E_i \in \mathcal{E}_i.$$

Nach (2.21) ist p_i $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_i$-meßbar

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \forall E_i \in \mathcal{E}_i : p_i^{-1}(E_i) \in \mathfrak{A} \\ &\Rightarrow \quad E_1 \times \ldots \times E_n = p_1^{-1}(E_1) \cap \ldots \cap p_n^{-1}(E_n) \in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Sei umgekehrt $E_1 \times \ldots \times E_n \in \mathfrak{A}$ für alle $E_i \in \mathcal{E}_i$. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig aber fest

$$\Rightarrow \quad F_k := E_{k,1} \times \ldots \times E_{k,i-1} \times E_i \times E_{k,i+1} \times \ldots \times E_{k,n} \in \mathfrak{A} \quad \forall k$$

und

$$F_k \uparrow \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{i-1} \times E_i \times \Omega_{i+1} \times \ldots \times \Omega_n = p_i^{-1}(E_i) \in \mathfrak{A},$$

also ist p_i $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_i$-meßbar. □

Nach obigem Satz wird also $\mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n$ insbesondere von $\{A_1 \times \ldots \times A_n \mid A_i \in \mathfrak{A}_i\}$ erzeugt.

4.2 Beispiel

Nach Stochastik I (3.1) ist

$$\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right) = \mathfrak{A}\left(\{]a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^d\}\right),$$

wobei $]a, b] = \bigtimes_{i=1}^{d}]a_i, b_i]$ und $a = (a_1, \ldots, a_d)$, $b = (b_1, \ldots, b_d)$.

Setzt man $\Omega_i = \mathbb{R}$, $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ so gilt nach (2.17):

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{A}(\{]a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}).$$

Da für $a, b \in \mathbb{R}^d$

$$]a, b] =]a_1, b_1] \times \ldots \times]a_d, b_d]$$

folgt aus (4.1), daß

$$\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

gilt. Für das d-dimensionale Lebesgue-Maß gilt

$$\lambda^d(]a, b]) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i) = \lambda^1(]a_1, b_1]) \cdot \ldots \cdot \lambda^1(]a_d, b_d]).$$

Frage:

Seien $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)_{i=1,\ldots n}$ Maßräume und $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}(\mathcal{E}_i)$. Unter welchen Voraussetzungen folgen die Existenz und Eindeutigkeit eines Maßes π auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n$ mit

$$\pi(E_1 \times \ldots \times E_n) = \mu_1(E_1) \cdot \ldots \cdot \mu_n(E_n) \qquad (P)$$

für alle $E_i \in \mathcal{E}_i$?

Zur Eindeutigkeit:

4.3 Satz

Seien $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, \ldots, n$ Maßräume, $\mathfrak{A}_i := \mathfrak{A}(\mathcal{E}_i)$. Jedes $\mathcal{E}_i$ sei $\cap$-stabil und es existiere $(E_{k,i})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_i$ mit $E_{k,i} \uparrow \Omega_i$ und $\mu_i(E_{k,i}) < \infty \, \forall k, i$. Dann gibt es höchstens ein Maß π auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n$ mit der Eigenschaft (P).

Beweis:
Nach (4.1) erzeugt

$$\mathcal{E} := \{E_1 \times \ldots \times E_n \mid E_i \in \mathfrak{A}_i\}$$

die σ-Algebra $\mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n$. Da für alle $F_i \in \mathcal{E}_i$

$$\left(\bigtimes_{i=1}^{n} E_i\right) \cap \left(\bigtimes_{i=1}^{n} F_i\right) = \bigtimes_{i=1}^{n}(E_i \cap F_i)$$

ist $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil. Weiter ist

$$E_k := E_{k,1} \times \ldots \times E_{k,n} \uparrow \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$$

und $\pi(E_k) = \mu_1(E_{k,1}) \cdot \ldots \cdot \mu_n(E_{k,n}) < \infty \, \forall k \geq 1$. Aus dem Eindeutigkeitssatz (2.9) folgt dann die Behauptung. $\square$

Zur Frage der Existenz von π betrachten wir zuerst den Fall $n = 2$:
Gegeben seien Maßräume $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)_{i=1,2}$. Für $Q \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ und $\omega_i \in \Omega_i$ bezeichne

$$Q_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in Q\}$$

$$Q_{\omega_2} := \{\omega_1 \in \Omega_1 \mid (\omega_1, \omega_2) \in Q\}$$

den $\underline{\omega_i\text{-Schnitt}}$ von Q.

4.4 Lemma

Für $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$ und $Q \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ gilt

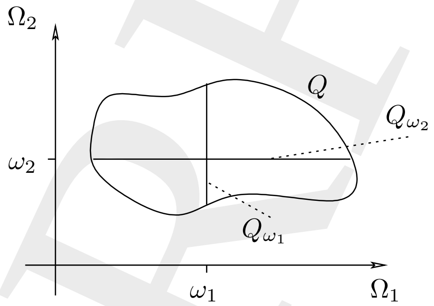
$$Q_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2 \quad \text{und} \quad Q_{\omega_2} \in \mathfrak{A}_1.$$

Beweis:
Sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ und $Q, Q_1, Q_2, \ldots \subset \Omega$. Für $\omega_1 \in \Omega_1$ gilt

$$(\Omega \setminus Q)_{\omega_1} = \Omega_2 \setminus Q_{\omega_1} \qquad (\sigma A_1)$$

und

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right)_{\omega_1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n)_{\omega_1} \qquad (\sigma A_2)\,.$$



Weiter gilt

$$\Omega_{\omega_1} = \Omega_2 \quad \text{und} \quad (A_1 \times A_2)_{\omega_1} = \begin{cases} A_2 & \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & \omega_1 \notin A_1 \end{cases} \qquad (\sigma A_0)$$

$\Rightarrow \{Q \subset \Omega \mid Q_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2\}$ ist σ-Algebra, welche alle Mengen $A_1 \times A_2$ mit $A_i \in \mathfrak{A}_i$ enthält. Nach (4.1) ist aber $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ die kleinste σ-Algebra, die alle Mengen $A_1 \times A_2$, $A_i \in \mathfrak{A}_i$ enthält

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \subset \{Q \subset \Omega \mid Q_{\omega_1} \in \mathfrak{A}_2\} \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung.}$$

$\square$

4.5 Lemma

Die Maße μ_1, μ_2 seien σ-endlich. Dann sind für $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ die Abbildungen

$$\omega_1 \mapsto \mu_2 (Q_{\omega_1}) \qquad \omega_2 \mapsto \mu_1 (Q_{\omega_2})$$

auf Ω_1 beziehungsweise Ω_2 definiert und meßbar.

Beweis:
Sei $S_Q(\omega_1) := \mu_2(Q_{\omega_1})$. Wir zeigen, daß $S_Q : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Sei $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ wie oben.
<u>1. Schritt</u>: $\mu_2(\Omega) < \infty$.
Sei

$$\mathfrak{D} = \left\{D \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \mid S_D \text{ ist } \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) \text{ meßbar}\right\}.$$

Dann ist $\mathfrak{D}$ ein Dynkinsystem in $\Omega_1 \times \Omega_2$, da

$$S_\Omega(\omega_1) = \mu_2(\Omega_{\omega_1}) = \mu_2(\Omega_2) = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \Omega \in \mathfrak{D}.$$

Sei $D \in \mathfrak{D}$. Da

$$\begin{aligned} S_{\Omega \setminus D}(\omega_1) &= \mu_2\left((\Omega \setminus D)_{\omega_1}\right) = \mu_2(\Omega_2 \setminus D_{\omega_1}) \\ &= \mu_2(\Omega_2) - \mu_2(D_{\omega_1}) = S_\Omega(\omega_1) - S_D(\omega_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad D^{\complement} \in \mathfrak{D}.$$

Sind $(D_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{D}$ paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \quad S_{\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} D_n} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{D_n} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} D_n \in \mathfrak{D}.$$

Es ist $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{D}\, \forall A_i \in \mathfrak{A}_i$, da

$$S_{A_1 \times A_2} = \mu_2\left((A_1 \times A_2)_{\omega_1}\right) = \mu(A_2) \cdot 1_{A_1}.$$

Das System $\{A_1 \times A_2 \mid A_i \in \mathfrak{A}_i\}$ ist $\cap$-stabil und erzeugt $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ nach (4.1). Nach (1.13) gilt dann $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$, also die Behauptung.

<u>2.Schritt</u>:
Ist μ_2 nur σ-endlich $\Rightarrow \exists B_n \in \mathfrak{A}_2$ mit $B_n \uparrow \Omega_2$ und $\mu_2(B_n) < \infty \, \forall n \geq 1$. Für n fest ist

$$\mu_{2,n} : A_2 \mapsto \mu_2 (A_2 \cap B_n)$$

ein endliches Maß auf $\mathfrak{A}_2$. Nach dem ersten Schritt folgt:

$$\omega_1 \mapsto \mu_{2,n}(Q_{\omega_1}) \text{ ist für } Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \text{ bezüglich } \mathfrak{A}_1 \text{ meßbar.}$$

Da

$$\mu_2(Q_{\omega_1}) = \sup_{n \geq 1} \mu_{2,n}(\Omega_{\omega_1})$$

wegen der Stetigkeit von unten $\Rightarrow$ Behauptung. $\square$

4.6 Satz

Seien $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)_{i=1,2}$ σ-endliche Maßräume. Dann gibt es genau ein Maß π auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ mit $\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$ für alle $A_i \in \mathfrak{A}_i$. Für $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ gilt:

$$\pi(Q) = \int_{\Omega_1} \mu_2(\Omega_{\omega_1}) \, \mathbf{d}\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_2} \mu_1(\Omega_{\omega_2}) \, \mathbf{d}\mu_2(\omega_2).$$

π ist σ-endlich.

Beweis:
Für $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ sei $S_Q(\omega_1) := \mu_2(Q_{\omega_1})$ wie oben. Dann ist nach (4.5)

$$S_Q : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \to \left(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right) \qquad S_Q \geq 0.$$

Durch

$$\pi(Q) := \int S_Q(\omega_1) \, \mathbf{d}\mu_1(\omega_1)$$

wird eine Abbildung $\pi : \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definiert. Sind $(Q_n) \subset \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \quad S_{\dot\bigcup Q_n} = \sum S_{Q_n}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \pi\left(\dot\bigcup_n Q_n\right) \quad &= \quad \int S_{\dot\bigcup_n Q_n} \, \mathbf{d}\mu_1 = \int \sum_n S_{Q_n} \, \mathbf{d}\mu_1 \\
&\overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \quad \sum_n \int S_{Q_n} \, \mathbf{d}\mu_1 = \sum_n \pi(Q_n).
\end{aligned}$$

Da $S_\emptyset = 0 \Rightarrow \pi(\emptyset) = 0$, also ist π ein Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Da $S_{A_1 \times A_2} = \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}$

$$\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2).$$

Analog folgt:

$$\pi' : Q \mapsto \int \mu_1(Q_{\omega_2}) \, \mathbf{d}\mu_2(\omega_2)$$

ist Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ mit $\pi'(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$. Nach Satz (4.3) angewandt auf $\mathcal{E}_1 = \mathfrak{A}_1$, $\mathcal{E}_2 = \mathfrak{A}_2$ folgt $\pi = \pi'$. Wählt man $A_{i,n} \in \mathfrak{A}_i$ mit $A_{i,n} \uparrow \Omega_i$ und $\mu_i(A_{i,n}) < \infty \, \forall n$

$$\Rightarrow \quad A_{1,n} \times A_{2,n} \uparrow \Omega_1 \times \Omega_2 \quad \text{und} \quad \pi(A_{1,n} \times A_{2,n}) < \infty,$$

also ist π σ-endlich. $\square$

4.7 Definition (Produktmaß)

Das für zwei σ-endliche Maßräume $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$ durch die Eigenschaft

$$\pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

eindeutig bestimmte σ-endliche Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ heißt Produktmaß von μ_1 und μ_2 und wird mit $\mu_1 \otimes \mu_2$ bezeichnet.

4.8 Beispiel (*d*-dimensionales *Lebesgue*-Maß)

Das 2-dimensionale Lebesguemaß λ^2 auf $\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ kann nun als Produktmaß $\lambda^1 \otimes \lambda^1$ definiert werden. Nach (4.2) gilt $\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ und nach (4.6) existiert genau ein Maß λ^2 auf $\mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ mit

$$\lambda^2(]a,b]) = \lambda(]a_1,b_1]) \cdot \lambda(]a_2,b_2]) .$$

Es gilt also

$$\lambda^2 = \lambda^1 \otimes \lambda^1.$$

Induktiv kann man dann genauso das d-dimensionale *Lebesgue*-Maß λ^d auf $\left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R})^d\right)$ als Produktmaß

$$\lambda^d := \lambda^1 \otimes \ldots \otimes \lambda^1 \text{ auf } \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

definieren.

Sei nun $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega'$. Für $\omega_i \in \Omega_i$ sei

$$\begin{aligned} f_{\omega_1} &: \Omega_2 \to \Omega' \qquad & f_{\omega_1}(\omega_2) &:= f(\omega_1, \omega_2) \\ f_{\omega_2} &: \Omega_1 \to \Omega' \qquad & f_{\omega_2}(\omega_1) &:= f(\omega_1, \omega_2) \end{aligned}$$

f_{ω_i} heißt der ω_i-Schnitt von f.

4.9 Lemma

Für jeden Meßraum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und jede meßbare Abbildung

$$f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \to (\Omega', \mathfrak{A}')$$

ist f_{ω_1} $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{A}'$- und f_{ω_2} $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}'$-meßbar.
Beweis:
Für $A' \in \mathfrak{A}'$ ist

$$f_{\omega_1}^{-1}(A') = \left\{\omega_2 \in \Omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in f^{-1}(A')\right\} = \left(f^{-1}(A')\right)_{\omega_1}$$

und dann folgt die Behauptung aus (4.4). □

4.10 Satz (von *Tonelli*)

Seien $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)_{i=1,2}$ σ-endliche Maßräume und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sei $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)$-meßbar. Dann sind die Funktionen

$$\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1}(\omega_2)\, \mathbf{d}\mu_2(\omega_2) \qquad \omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2}(\omega_1)\, \mathbf{d}\mu_1(\omega_1)$$

$\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)$- beziehungsweise $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)$-meßbar. Es gilt

$$\begin{aligned} \int f \,\mathbf{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f_{\omega_2}(\omega_1)\, \mathbf{d}\mu_1(\omega_1) \right) \mathbf{d}\mu_2(\omega_2) \\ &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1}(\omega_2)\, \mathbf{d}\mu_2(\omega_2) \right) \mathbf{d}\mu_1(\omega_1) . \end{aligned}$$

Beweis:

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \qquad \mathfrak{A} := \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \qquad \pi := \mu_1 \otimes \mu_2$$

(1) Sei

$$f \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}) \quad \Rightarrow \quad f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot f_{Q^{(i)}} \qquad \alpha_i \geq 0 \qquad Q^{(i)} \in \mathfrak{A}.$$

Da

$$(1_Q)_{\omega_2} = 1_{Q_{\omega_2}} \quad \text{folgt} \quad f_{\omega_2} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 1_{Q^{(i)}_{\omega_2}}$$

$$\Rightarrow \quad \int f_{\omega_2} \,\mathbf{d}\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu_i \left(Q^{(i)}_{\omega_2}\right).$$

Nach Lemma (4.5) ist also $\omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} \,\mathbf{d}\mu_1$ $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)$-meßbar. Mit Satz (4.6) folgt

$$\begin{aligned}
\int \left(\int f_{\omega_2} \,\mathbf{d}\mu_1 \right) \mathbf{d}\mu_2(\omega_2) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \int \mu_1 \left(Q^{(i)}_{\omega_2}\right) \mathbf{d}\mu_2(\omega_2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \pi \left(Q^{(i)}\right) = \int f \,\mathbf{d}\pi.
\end{aligned}$$

Vertauscht man ω_1 und ω_2, so folgt die Behauptung für $f \in \mathcal{E}(\mathfrak{A})$.

(2) Sei $f \geq 0$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)$-meßbar. Wähle $u^{(n)} \in \mathcal{E}(\mathfrak{A})$ mit $u^{(n)} \uparrow f \Rightarrow u^{(n)}_{\omega_2} \in \mathcal{E}(\mathfrak{A}_1)$ und $u^{(n)}_{\omega_2} \uparrow f_{\omega_2}$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \omega_2 \mapsto \varphi^{(n)}(\omega_2) := \int u^{(n)}_{\omega_2} \,\mathbf{d}\mu_1 \quad \text{ist } \mathfrak{A}_2\text{-}\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)\text{-meßbar}$$

und $\varphi^{(n)}(\omega_2) \uparrow \int f_{\omega_2} \,\mathbf{d}\mu_1$ nach Beppo-Levi

$$\Rightarrow \quad \omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} \,\mathbf{d}\mu_1 \text{ ist } \mathfrak{A}_2\text{-}\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)\text{-meßbar.}$$

Nochmaliges Anwenden von Beppo-Levi liefert:

$$\begin{aligned}
\int \left(\int f_{\omega_2} \,\mathbf{d}\mu_1 \right) \mathbf{d}\mu_2(\omega_2) &\overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \lim_{n\to\infty} \int \varphi^{(n)}(\omega_2) \,\mathbf{d}\mu_2(\omega_2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int \left(\int u^{(n)}_{\omega_2} \,\mathbf{d}\mu_1 \right) \mathbf{d}\mu_2(\omega_2) \\
&\overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int u^{(n)} \,\mathbf{d}\pi \\
&\overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \int f \,\mathbf{d}\pi.
\end{aligned}$$

□

Bleibt noch der dritte Schritt:

4.11 Satz (von *Fubini*)

Seien $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)_{i=1,2}$ σ-endliche Maßräume; $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ sei $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbar. Dann ist f_{ω_1} für μ_1-fast alle ω_1 integrierbar bezüglich ω_2; f_{ω_2} für μ_2-fast alle ω_2 integrierbar bezüglich ω_1. Die μ_1 (beziehungsweise μ_2) fast überall definierten Funktionen

$$\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1}\,\mathbf{d}\mu_2 \quad \text{und} \quad \omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2}\,\mathbf{d}\mu_1$$

sind dann μ_1- (beziehungsweise μ_2-) integrierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}\int f\,\mathbf{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int \left(\int f_{\omega_1}\,\mathbf{d}\mu_2\right) \mathbf{d}\mu_1(\omega_1) \\ &= \int \left(\int f_{\omega_2}\,\mathbf{d}\mu_1\right) \mathbf{d}\mu_2(\omega_2).\end{aligned}$$

Beweis:

$$|f|_{\omega_i} = |f_{\omega_i}| \qquad \left(f^+\right)_{\omega_i} = (f_{\omega_i})^+ \qquad \left(f^-\right)_{\omega_i} = (f_{\omega_i})^-$$

Aus (4.10) folgt

$$\begin{aligned}\int \left(\int |f_{\omega_1}|\,\mathbf{d}\mu_2\right) \mathbf{d}\mu_1(\omega_1) &= \int \left(\int |f_{\omega_2}|\,\mathbf{d}\mu_1\right) \mathbf{d}\mu_2(\omega_2) \\ &= \int |f|\,\mathbf{d}\pi < \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ die μ_1-integrierbare Funktion $\omega_1 \mapsto \int |f_{\omega_1}|\,\mathbf{d}\mu_2$ ist μ_1-fast überall endlich, also für μ_1-fast alle ω_1 ist f_{ω_1} μ_2-integrierbar. Mit (4.10) ist dann die Funktion

$$\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1}\,\mathbf{d}\mu_2 = \int f^+_{\omega_1}\,\mathbf{d}\mu_2 - \int f^-_{\omega_1}\,\mathbf{d}\mu_2$$

μ_1-fast überall definiert und $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$-meßbar. Weiter gilt mit (4.10) angewandt auf f^+ und f^-, daß diese Funktion μ_1-integrierbar ist und

$$\begin{aligned}\int \left(\int f_{\omega_1}\,\mathbf{d}\mu_2\right) \mathbf{d}\mu_1(\omega_1) &= \int \left(\int f^+_{\omega_1}\,\mathbf{d}\mu_2\right) \mathbf{d}\mu_1(\omega_1) - \int \left(\int f^-_{\omega_1}\,\mathbf{d}\mu_2\right) \mathbf{d}\mu_1(\omega_1) \\ &= \int f^+\,\mathbf{d}\pi - \int f^-\,\mathbf{d}\pi \\ &= \int f\,\mathbf{d}\pi\end{aligned}$$

□

Man kann die Behauptung von Satz (4.11) auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}\int f\,\mathbf{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int\int f(\omega_1, \omega_2)\,\mathbf{d}\mu_1(\omega_1)\,\mathbf{d}\mu_2(\omega_2) \\ &= \int\int f(\omega_1, \omega_2)\,\mathbf{d}\mu_2(\omega_2)\,\mathbf{d}\mu_1(\omega_1).\end{aligned}$$

4.12 Beispiel

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f : (\Omega, \mathfrak{A}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$. Dann gilt für $p > 0$

$$\int |f|^p \, \mathbf{d}\mu = p \cdot \int_0^\infty t^{p-1} \cdot \mu\{|f| > t\} \, \mathbf{d}t.$$

Dazu betrachte

$$F : \Omega \times (0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \qquad F(\omega, t) = p \cdot t^{p-1} \cdot 1_{\{|f(\omega)|>t\}}(\omega).$$

Dann ist $F \geq 0$ und $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}((0,\infty))$-$\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)$-meßbar. Mit Satz (4.10) folgt für $\mu \otimes \lambda^1$:

$$\begin{aligned}
p \cdot \int_0^\infty t^{p-1} \cdot \mu\{|f| > t\} \, \mathbf{d}t &= p \cdot \int_0^\infty t^{p-1} \cdot \mu\{|f| > t\} \, \mathbf{d}\lambda^1(t) \\
&= \int_0^\infty p \cdot t^{p-1} \int_\Omega 1_{\{|f|>t\}} \, \mathbf{d}\mu \, \mathbf{d}\lambda^1(t) \\
&= \int_\Omega \int_0^\infty p \cdot t^{p-1} \cdot 1_{\{|f|>t\}} \, \mathbf{d}\lambda^1(t) \, \mathbf{d}\mu \\
&= \int_\Omega \int_0^{|f|} p \cdot t^{p-1} \, \mathbf{d}t \, \mathbf{d}\mu \\
&= \int_\Omega |f|^p \, \mathbf{d}\mu.
\end{aligned}$$

Sind nun $n \geq 2$ σ-endliche Maßräume $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$ gegeben, so definiert man induktiv (und eindeutig):

$$\begin{aligned}
\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n &:= (\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n-1}) \times \Omega_n \\
\mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n &:= (\mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_{n-1}) \otimes \mathfrak{A}_n \\
\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n &:= (\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n.
\end{aligned}$$

Dadurch wird die Produktbildung <u>assoziativ</u>!
<u>Schreibweisen</u>: Für je endlich viele σ-endliche Maßräume $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)_{i=1,\ldots,n}$ heißt

$$\left(\bigtimes_{i=1}^n \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathfrak{A}_i, \bigotimes_{i=1}^n \mu_i \right)$$

das <u>Produkt dieser Maßräume</u> und wird mit

$$\bigotimes_{i=1}^n (\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$$

bezeichnet.
Später werden wir auch unendliche Produkte behandeln.

Aufgaben:

Aufgabe 4.1:

Es sei $\lambda^2 = \lambda^1 \otimes \lambda^1$ das zweidimensionale Lebesgue-Maß auf $\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$. Es sei

$$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \in \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^2\right) \quad \text{und} \quad f = 1_A.$$

Zeigen Sie, daß $\int f \, \mathbf{d}\lambda^2 = 0$ gilt und daß f_{ω_1} für alle $\omega_1 \in \mathbb{Q}$ <u>nicht</u> λ^1-integrierbar ist.

Aufgabe 4.2:

Auf dem Maßraum $\left([0,1]^2, \mathfrak{B}\left([0,1]^2\right), \lambda^2\big|_{[0,1]^2}\right)$ betrachten wir die Funktion

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Berechnen Sie die iterierten Integrale

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, \mathbf{d}\lambda^1(y) \, \mathbf{d}\lambda^1(x) \quad \text{sowie} \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, \mathbf{d}\lambda^1(x) \, \mathbf{d}\lambda^1(y)$$

und untersuchen Sie ob f integrierbar bezüglich $\lambda^2\big|_{[0,1]^2}$ ist.

5. Kapitel: Zufallsvariable

Im folgenden sei immer $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ein <u>Wahrscheinlichkeitsraum</u>, das heißt $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ist ein Maßraum und $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

5.1 Definition (Zufallsvariable)

Jede meßbare Abbildung $X : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}')$ heißt <u>Zufallsvariable</u>. Falls $(\Omega', \mathfrak{A}') = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, so spricht man von einer <u>reellen Zufallsvariable</u>; im Falle von $(\Omega', \mathfrak{A}') = \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ von einer <u>numerischen Zufallsvariable</u> und im Falle von $(\Omega', \mathfrak{A}') = \left(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ von einem <u>Zufallsvektor</u>.

5.2 Korollar

Es sei $X : \Omega \to \Omega'$ und $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}(\mathcal{E}')$. Dann ist X eine

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{A}' \text{ Zufallsvariable} \quad \Leftrightarrow \quad \{X \in E'\} \in \mathfrak{A} \quad \forall E' \in \mathcal{E}'.$$

Beweis:
Satz (2.21). $\square$

5.3 Beispiel

(a)

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ist reelle Zufallsvariable} \quad \Leftrightarrow \quad \{X \le t\} \in \mathfrak{A} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\llbracket$ $\mathcal{E} = \{]-\infty, t] \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist Erzeuger von $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ $\rrbracket$

(b) Sind E, E' metrische Räume, so ist jede stetige Abbildung $X : E \to E'$ eine $\mathfrak{B}(E)$-$\mathfrak{B}(E')$-Zufallsvariable.

Zufallsvariablen sind also gerade die meßbaren Abbildungen. Insbesondere ist dann der Erwartungswert einer numerischen Zufallsvariabel als $\int X \, \mathbf{dP}$ definiert, falls dieses Integral existiert.

5.4 Definition (Erwartungswert)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine numerische Zufallsvariable. Falls

$$\int X_+ \, \mathbf{dP} < \infty \quad \text{und} \quad \int X_- \, \mathbf{dP} < \infty,$$

so heißt

$$\mathbf{E}(X) := \int X \, \mathbf{dP}$$

der <u>Erwartungswert</u> von X.

5.5 Eigenschaften

(a) $\mathbf{E}(X)$ existiert $\Leftrightarrow \mathbf{E}(|X|) < \infty$.

(b) Die Abbildung $\mathcal{L}^1(\mathbf{P}) \ni X \mapsto \mathbf{E}(X)$ ist linear.

(c) $X, Y \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $X \le Y \Rightarrow \mathbf{E}(X) \le \mathbf{E}(Y)$.

(d) $X \ge 0$ und $\mathbf{E}(X) = 0 \Rightarrow X = 0$ <u>fast sicher</u>, das heißt $\mathbf{P}$-fast überall.

5.6 Sprechweisen

Im Falle von Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ sagt man anstatt fast überall, <u>fast sicher</u> (f.s.). Das heißt $X = Y$ fast sicher $\Leftrightarrow \mathbf{P}\{X \neq Y\} = 0$ oder $\mathbf{P}\{X = Y\} = 1$, und so weiter …

5.7 Lemma (*Markoff-Tschebyscheff*-Ungleichung)

Sei $X : (\Omega, \mathfrak{A}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ und $\alpha, p > 0$. Dann gilt:

$$\mathbf{P}\{|X| \geq \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha^p} \mathbf{E}\left(|\mathbf{X}|^p\right).$$

Beweis:
Sei $A_\alpha := \{|X| \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{E}\left(|X|^p\right) = \int_\Omega |X|^p \, \mathbf{dP} \geq \int_{A_\alpha} |X|^p \, \mathbf{dP} \geq \int_{A_\alpha} \alpha^p \, \mathbf{dP} = \alpha^p \cdot \mathbf{P}\left(A_\alpha\right).$$

□

5.8 Definition (Konvergenzarten)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X_n) eine Folge reeller Zufallsvariabler und X eine reelle Zufallsvariable, $p \geq 1$.

(a) X_n konvergiert gegen X <u>(**P**-) stochastisch</u>, falls für alle $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Wir schreiben $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ für $n \to \infty$.

(b) X_n konvergiert gegen X im <u>p-ten Mittel</u>, falls

$$\mathbf{E}\left(|X_n - X|^p\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

(c) X_n konvergiert gegen X <u>(**P**-) fast sicher</u>, falls

$$\mathbf{P}\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1.$$

Wir schreiben: $\lim\limits_{n \to \infty} X_n = X$ fast sicher.

5.9 Satz

Sei (X_n) eine Folge reeller Zufallsvariablen, welche stochastisch/ im p-ten Mittel/ fast sicher gegen eine Zufallsvariable X konvergiert. Dann ist X fast sicher eindeutig bestimmt, das heißt ist Y ein weiterer solcher Grenzwert, so gilt $X = Y$ fast sicher.
Beweis:

(c) $X_n \to X$ fast sicher und $X_n \to Y$ fast sicher

$$\Rightarrow \quad \exists N_1, N_2 \in \mathfrak{A}, \mathbf{P}(N_i) = 0 \quad \text{und} \quad \begin{array}{ll} X_n(\omega) \to X(\omega) & \forall \omega \in N_1^{\complement}, \\ X_n(\omega) \to Y(\omega) & \forall \omega \in N_2^{\complement}. \end{array}$$

Sei $N = N_1 \cup N_2 \Rightarrow \mathbf{P}(N) = 0$ und für alle $\omega \in N^{\complement} = N_1^{\complement} \cap N_2^{\complement}$ gilt

$$X_n(\omega) \begin{array}{l} \nearrow X(\omega) \\ \searrow Y(\omega) \end{array}$$

Analysis I $\Rightarrow X(\omega) = Y(\omega) \; \forall \omega \in N^{\complement}$, das heißt $X = Y$ fast sicher.

(b) $X_n \to X$ und $X_n \to Y$ im p-ten Mittel. Sei $\|X\|_p := (\mathbf{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}}$, die Minkowski-Norm

$$\Rightarrow \quad \|X-Y\|_p = \|(X-X_n)-(Y-X_n)\|_p \leq \|X-X_n\|_p + \|Y-X_n\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \|X-Y\|_p^p = \int |X-Y|^p \, \mathbf{dP}.$$

Aus (3.11) folgt

$$|X-Y|^p = 0 \text{ fast sicher} \quad \Leftrightarrow \quad X = Y \text{ fast sicher}.$$

(a) $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \{|X-Y| \geq \varepsilon\} &= \{|(X-X_n)-(Y-X_n)| \geq \varepsilon\} \\
&\subset \left\{|X-X_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|Y-X_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\
\Rightarrow \quad \mathbf{P}\{|X-Y| \geq \varepsilon\} &\leq \mathbf{P}\left\{|X-X_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} + \mathbf{P}\left\{|Y-X_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \xrightarrow{n\to\infty} 0+0=0 \\
\Rightarrow \quad \mathbf{P}\left\{|X-Y| \geq \frac{1}{k}\right\} &= 0 \quad \forall k \geq 1.
\end{aligned}$$

Da

$$\{X \neq Y\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{|X-Y| \geq \frac{1}{k}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}\{X \neq Y\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\mathbf{P}\left\{|X-Y| \geq \frac{1}{k}\right\}}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = Y \text{ fast sicher.}$$

□

Wir untersuchen im folgenden die Zusammenhänge zwischen diesen verschiedenen, für die Stochastik wichtigen Begriffen:

5.10 Satz

$X_n \to X$ im p-ten Mittel ($p \geq 1$)

$$\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X.$$

Beweis:
Mit der *Markoff-Tschebyscheff*-Ungleichung folgt für $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \cdot \mathbf{E}(|X_n - X|^p) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

5.11 Beispiel

Die Umkehrung in Satz (5.10) ist im allgemeinen falsch: Betrachte

$$\left([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda^1|_{[0,1]}\right) = (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) \quad \text{und} \quad X_n = n \cdot 1_{]0,\frac{1}{n}[}.$$

Da für $n \geq \varepsilon$

$$\mathbf{P}\{|X_n| \geq \varepsilon\} = \lambda^1\left(\left]0, \frac{1}{n}\right[\right) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Aber

$$\mathbf{E}(|X_n - 0|^p) = \mathbf{E}(|X_n|^p) = n^p \cdot \lambda^1\left(\left]0, \frac{1}{n}\right[\right) = n^{p-1} \not\to 0$$

für jedes $p \geq 1$.

Zur Charakterisierung der fast sicheren Konvergenz haben wir:

5.12 Satz

Sei (X_n) eine Folge reeller Zuvallsvariablen und X eine reelle Zufallsvariable. Dann sind äquivalent:

(a)

$$X_n \to X \quad \text{fast sicher}$$

(b)

$$\forall \alpha > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{m\geq n} |X_m - X| \geq \alpha\right\} = 0$$

(c)

$$\forall \alpha > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{m\geq n} |X_m - X| > \alpha\right\} = 0$$

(d)

$$\forall \alpha > 0 : \mathbf{P}\left\{\limsup_{n\to\infty} |X_n - X| > \alpha\right\} = 0$$

Beweis:
Da

$$X_n \to X \quad \text{fast sicher} \quad \Leftrightarrow \quad |X_n - X| \to 0 \quad \text{fast sicher}$$

reicht es den Fall $X = 0$ zu betrachten.
<u>$(a) \Leftrightarrow (b)$</u>:
Für $\alpha > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n^\alpha := \left\{\sup_{m\geq n} |X_m| \geq \alpha\right\}.$$

Dann gilt $A_n^\alpha \downarrow$ für $n \to \infty$ und $A_n^\alpha \downarrow$ für $\alpha \to \infty$

$$\Rightarrow \quad A_n^{\frac{1}{k}} \uparrow \quad \text{für } k \to \infty.$$

Sei

$$A = \left\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\right\} = \left\{\omega \in \Omega \mid \limsup_{n\to\infty} |X_n(\omega)| = 0\right\}.$$

Dann gilt

$$A \overset{(*)}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{\frac{1}{k}}\right)^{\complement} = \bigcap_{\alpha>0} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_n^\alpha\right)^{\complement} \in \mathfrak{A}$$

$$\Rightarrow \quad A^{\complement} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{k}} = \bigcup_{\alpha>0} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{k}} \uparrow A^{\complement} \quad \text{für } k \to \infty \quad \text{sowie} \quad A_n^{\frac{1}{k}} \downarrow \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m^{\frac{1}{k}} \quad \text{für } n \to \infty \quad \text{da } A_n^{\frac{1}{k}} \downarrow.$$

$$\underset{\text{Stetigkeit}}{\Rightarrow} \quad \mathbf{P}\left(A^{\complement}\right) = \sup_{k\geq 1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{1}{k}}\right) = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq 1} \mathbf{P}\left(A_n^{\frac{1}{k}}\right).$$

Da $X_n \to 0$ fast sicher $\Leftrightarrow \mathbf{P}\left(A^{\complement}\right) = 0$ ist dies äquivalent zu

$$\inf_{n\geq 1} \mathbf{P}\left(A_n^{\frac{1}{k}}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(A_n^{\frac{1}{k}}\right) = 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Da

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(A_n^{\frac{1}{k}}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{m\geq n} |X_m| \geq \frac{1}{k}\right\}$$

folgt $(a) \Leftrightarrow (b)$.

Zu $(*)$:
„ $\subset$ “:

$$\begin{aligned}
\omega \in A \quad &\Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} |X_n(\omega)| = 0 \\
&\Rightarrow \quad \forall k \geq 1 : |X_n(\omega)| \leq \frac{1}{k} \\
&\Rightarrow \quad \forall k \geq 1\, \exists n_0 \geq 1 : |X_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\, \forall m \geq n_0 \\
&\Rightarrow \quad \forall k \geq 1\, \exists n_0 \geq 1 : \sup_{m\geq n_0} |X_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \\
&\Rightarrow \quad \omega \in \left(A_n^{\frac{1}{k}}\right)^{\complement} \\
&\Rightarrow \quad \omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_n^{\frac{1}{k}}\right)^{\complement}
\end{aligned}$$

„ $\subset$ “: Rückwärts.

<u>$(b) \Leftrightarrow (c)$</u>:
Für $0 < \alpha' < \alpha$ und eine numerische Zufallsvariable Y gilt immer

$$\{Y > \alpha\} \subset \{Y \geq \alpha\} \subset \{Y > \alpha'\} \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung.}$$

<u>$(c) \Leftrightarrow (d)$</u>:
Wir behaupten, daß

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{m\geq n} |X_m| > \alpha\right\} &\overset{(!)}{=} \mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \{|X_n| > \alpha\}\right) \\
&= \mathbf{P}\left\{\limsup_{n\to\infty} |X_n| > \alpha\right\}
\end{aligned}$$

woraus $(c) \Leftrightarrow (d)$ folgt.
Dazu sei

$$B_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m| > \alpha\} \quad \text{und} \quad B = \limsup_{n\to\infty} \{|X_n| > \alpha\}$$

$$\Rightarrow \quad B_n \downarrow B \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}\left\{\sup_{m\geq n} |X_m| > \alpha\right\}.$$

□

5.13 Korollar

Sei (X_n) eine Folge reeller Zufallsvariablen und $X_n \to X$ fast sicher

$$\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X.$$

Beweis:
Da

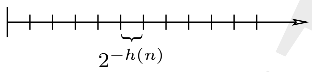
$$\{|X_n - X| \geq \alpha\} \subset \left\{\sup_{m\geq n} |X_m - X| \geq \alpha\right\}$$

$$\overset{(5.12)}{\Rightarrow} \quad \mathbf{P}\{|X_n - X| \geq \alpha\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{m\geq n} |X_m - X| \geq \alpha\right\} \to 0$$

□

5.14 Beispiel

Sei
$$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) = \left([0,1[\,, \mathfrak{B}([0,1[)\,, \lambda^1\big|_{[0,1[}\right)$$
wie in Beispiel (5.11). Für $n \geq 1$ schreibe $n = 2^{h(n)} + k(n)$ mit $0 \leq k(n) < 2^{h(n)}$ und $h(n) \in \mathbb{N}$. Dann sind $h(n), k(n)$ eindeutig bestimmt und $h(n) \to \infty$ mit $n \to \infty$.



Setze $A_n = \left[k(n) \cdot 2^{-h(n)}, (k(n)+1) \cdot 2^{-h(n)}\right[$ und $X_n = 1_{A_n}$. Für $p \geq 1$ folgt dann:
$$\mathbf{E}(|X_n|^p) = \mathbf{E}(|X_n|) = \lambda^1(A_n) = 2^{-h(n)} \to 0 \quad \Rightarrow \quad X_n \to 0$$
im p-ten Mittel, also nach (5.10)
$$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$
Aber:
Für $\omega \in [0,1[$ fest und $h = 0,1,\ldots$ existiert genau ein $k = k(h)$ mit $\omega \in \left[k \cdot 2^{-h}, (k+1) \cdot 2^{-h}\right[$
$$\Rightarrow \quad X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \infty\text{-oft} \\ 0 & \infty\text{-oft} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (X_n(\omega)) \text{ nicht konvergent für jedes } \omega \in \Omega.$$
Also kann (X_n) nicht fast sicher konvergieren.

5.15 Satz

Sei (X_n) eine Folge reeller Zufallsvariablen und $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$. Dann existiert eine Teilfolge $(X_{n_k})_k$, so daß $X_{n_k} \to X$ fast sicher für $k \to \infty$.

Beweis:
Für $\alpha > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\{|X_n - X_m| \geq \alpha\} \subset \left\{|X_n - X| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \cup \left\{|X_m - X| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}\{|X_n - X_m| \geq \alpha\} < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N_\varepsilon(\alpha) \quad (\varepsilon > 0 \text{ beliebig}).$$
Sei $\eta_k > 0$ mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty$ fest gewählt
$$\Rightarrow \quad \forall k \geq 1\, \exists n_k\, \forall m \geq n_k \quad \mathbf{P}\{|X_m - X_{n_k}| \geq \eta_k\} \leq \eta_k.$$
Dabei wählen wir induktiv $n_k < n_{k+1}$ $\forall k \geq 1$. Sei
$$A_k := \left\{\left|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\right| \geq \eta_k\right\}$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) = 0.$$
Für $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup\limits_{n \to \infty} A_n$ folgt somit $\mathbf{P}(A) = 0$, da $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k \downarrow A$ und $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k)$ $\forall n \geq 1$.

Für $\omega \in A^{\complement} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k^{\complement} \Rightarrow \omega \in \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k^{\complement}$ füer ein $n \geq 1$ fest $\Rightarrow \omega \in A_k^{\complement}\ \forall k \geq n = n(\omega)$ gilt dann

$$\left|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)\right| < \eta_k$$

für alle $k \geq n(\omega)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow && \sum_{k=1}^{\infty} \left(X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\right) \quad \text{absolut konvergent} \\
&\Rightarrow && \left(X_{n_k}(\omega)\right)_{k\geq 1} \quad \text{konvergent} \\
&\Rightarrow && X_{n_k} \to X^* \quad \text{fast sicher} \\
&\underset{(5.13)}{\Rightarrow} && X_{n_k} \xrightarrow{\mathbf{P}} X^* \\
&\underset{(5.9)}{\Rightarrow} && X^* = X \quad \text{fast sicher} \quad \text{da } X_{n_k} \xrightarrow{\mathbf{P}} X \text{ nach Voraussetzung} \\
&\Rightarrow && X_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} X \quad \text{fast sicher}
\end{aligned}$$

□

5.16 Korollar

Sei (X_n) eine Folge reeller Zufallsvariablen, X eine reelle Zufallsvariable. Dann gilt

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \quad \Leftrightarrow \quad \text{Jede Teilfolge } (X_{n_k})_k \subset (X_n)_n \text{ enthält eine weitere Teilfolge } \left(X_{n_{k_l}}\right)_l \subset (X_{n_k})_k \text{ mit } X_{n_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} X \text{ fast sicher.}$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Sei $(X_{n_k})_k \subset (X_n)_n$ beliebig

$$\Rightarrow \quad X_{n_k} \xrightarrow{\mathbf{P}} X \quad \underset{(5.15)}{\Rightarrow} \quad \exists \text{ Teilfolge } \left(X_{n_{k_l}}\right)_l \subset (X_{n_k})_k \text{ mit } X_{n_{k_l}} \to X \text{ fast sicher.}$$

„$\Leftarrow$“: Zu jeder Teilfolge $(X_{n_k})_k \subset (X_n)_n$ existiert eine Teilfolge $\left(X_{n_{k_l}}\right)_l \subset (X_{n_k})_k$ mit

$$\begin{aligned}
X_{n_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} X \text{ fast sicher} \quad &\underset{(5.13)}{\Rightarrow} \quad X_{n_{k_l}} \xrightarrow{\mathbf{P}} X \text{ für } l \to \infty \\
&\Rightarrow \quad \forall \alpha > 0 : \mathbf{P}\left\{\left|X_{n_{k_l}} - X\right| \geq \alpha\right\} \to 0.
\end{aligned}$$

Sei $a_n = \mathbf{P}\{|X_n - X| \geq \alpha\}$. Wir haben gezeigt, daß jede Teilfolge $(a_{n_k})_k \subset (a_n)_n$ eine weitere Teilfolge $\left(a_{n_{k_l}}\right)_l \subset (a_{n_k})_k$ enthält mit $a_{n_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} 0$

$$\Leftrightarrow \quad a_n \to 0 \text{ für } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X.$$

□

5.17 Satz

Seien (X_n) eine Folge reeller p-fach integrierbarer Zufallsvariablen, X p-fach interierbare Zufallsvariable $(p \geq 1)$. Gilt $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ und es existiert eine p-fach integrierbare Zufallsvariable Y mit $|X_n| \leq Y$ fast sicher $\forall n \geq 1$

$$\Rightarrow \quad X_n \to X \text{ im } p\text{-ten Mittel.}$$

Beweis:
Da

$$|X_n - X|^p \le (|X_n| + |X|)^p \overset{(\clubsuit)}{\le} 2^{p+1} \cdot |Y|^p$$

ist $|X_n - X|$ p-fach integrierbar.
Sei $a_n = \mathbf{E}\left(|X_n - X|^p\right)$. Nach (5.16) existiert zu jeder Teilfolge $(n_k) \subset (n)$ eine weitere Teilfolge $(n_{k_l}) \subset (n_k)$ mit $X_{n_{k_l}} \xrightarrow{l\to\infty} X$ fast sicher. Da

$$|X_n - X|^p \le 2^{p+1} \cdot |Y|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$$

folgt mit dem Konvergenzsatz von *Lebesgue*:

$$a_{n_{k_l}} = \mathbf{E}\left(\left|X_{n_{k_l}} - X\right|^p\right) \xrightarrow{l\to\infty} 0.$$

Wir haben also gezeigt:

$$\begin{aligned} \forall \text{ Teilfolgen } (n_k) \subset (n)\ \exists\, (n_{k_l}) \subset (n_k) \text{ mit } a_{n_{k_l}} \to 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a_n \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad X_n \to X \text{ im } p\text{-ten Mittel.} \end{aligned}$$

Zu ($\clubsuit$): Induktion: $p \rightsquigarrow p+1$, $a, b \in \mathbb{R}_0^+$

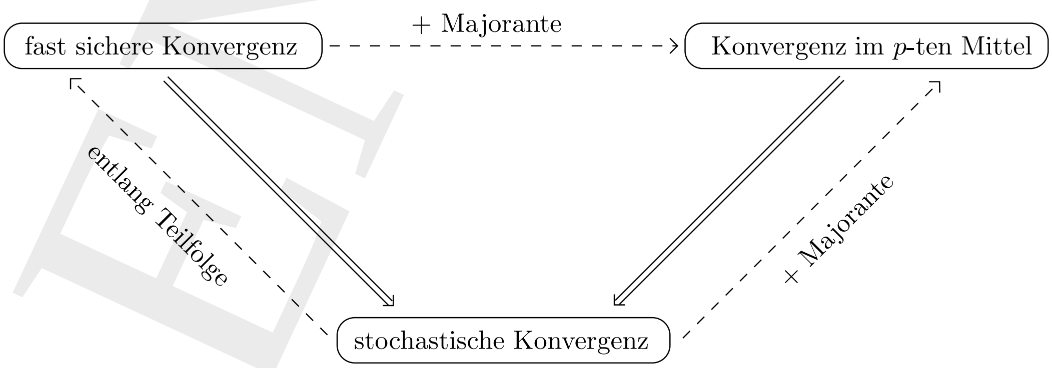
$$\begin{aligned} (a+b)^{p+1} &= (a+b)^p \cdot (a+b) \\ &\underset{\text{voraussetzung}}{\overset{\text{Induktions-}}{\le}} 2^p \cdot (a^p + b^p) \cdot (a+b) \\ &= 2^p \cdot \left(a^{p+1} + b^{p+1} + ab^p + a^p b\right) \end{aligned}$$

Sei ohne Einschränkung $a \ge b$:

$$\begin{aligned} & 2^p \cdot \left(a^{p+1} + b^{p+1} + ab^p + a^p b\right) \\ = \ & 2^p \cdot \left(a^{p+1} + b^{p+1} + (b + a - b) \cdot b^p + a^p \cdot (a + b - a)\right) \\ = \ & 2^p \cdot \left(a^{p+1} + b^{p+1} + a^{p+1} + b^{p+1} + (a-b) \cdot b^p + a^p \cdot (b-a)\right) \\ = \ & 2^p \cdot \left(a^{p+1} + b^{p+1} + a^{p+1} + b^{p+1}\right) + 2^p \cdot \underbrace{\left((b-a) \cdot (a^p - b^p)\right)}_{\le 0} \\ \le \ & 2^{p+1} \cdot \left(a^{p+1} + b^{p+1}\right) \end{aligned}$$

□

Zusammengefaßt haben wir also:



5.18 Satz und Definition

Es sei $X : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}')$ und $\mathbf{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann wird durch $\mathbf{P}_X : \mathfrak{A}' \to \mathbb{R}_+$, $\mathbf{P}_X(A') := \mathbf{P}\{X \in A'\}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$ definiert. $\mathbf{P}_X$ heißt die Verteilung von X unter $\mathbf{P}$.

Beweis:
Siehe Stochastik I (4.7).

5.19 Bezeichnungen

Sind $X_i : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ mit $i \in I = \{1, \dots, n\}$, so heißt die Verteilung von

$$X := (X_i : i \in I) : (\Omega, \mathfrak{A}) \to \left(\bigtimes_{i \in I} \Omega_i, \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{A}_i \right)$$

$\mathbf{P}(X_i : i \in I)$ die gemeinsame Verteilung der X_i. Nach (5.18) ist $\left(\bigtimes_{i \in I} \Omega_i, \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{A}_i, \mathbf{P}_{(X_i : i \in I)} \right)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für $i_1, \dots, i_k \in I$ paarweise verschieden heißt $\mathbf{P}_{\left(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}\right)}$ die (endlich dimensionale) Randverteilung von $(X_i : i \in I)$.
Diese Begriffe werden im folgenden Kapitel wichtig.

5.20 Beispiel (n-facher Münzwurf)

$$\Omega = \{0,1\}^n \qquad \mathfrak{A} = \mathcal{POT}(\Omega) \qquad \mathbf{P} = \mathfrak{L}_\Omega$$

Es sei $X_i : \Omega \to \{0,1\}$, $X_i(\omega_1, \dots, \omega_n) = \omega_i \Rightarrow \mathbf{P}_{X_i} = \frac{1}{2}E_0 + \frac{1}{2}E_1 = \mathcal{B}_{1,\frac{1}{2}}$. Für $k < n$ sei $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. So gilt für die Randverteilung $\mathbf{P}_{\left(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}\right)}$ auf $\left(\{0,1\}^k, \mathcal{POT}\left(\{0,1\}^k\right) \right)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\left(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}\right)} &= \mathbf{P}\{X_{i_1} = \omega_1, \dots, X_{i_k} = \omega_k\} \\
&= \mathbf{P}\{X_{i_1} = \omega_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}\{X_{i_k} = \omega_k\} \\
&= \mathbf{P}_{X_{i_1}}(\{\omega_1\}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_{X_{i_k}}(\{\omega_k\}) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}_{\left(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}\right)} = \mathfrak{L}_{\{0,1\}^k}.$$

Aufgaben:

Aufgabe 5.1:

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable mit

$$\mathbf{P}\{|X| > t\} = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ t^{-\alpha} & \text{für } t > 1 \end{cases}$$

für ein geignetes $\alpha > 0$. Bestimmen Sie die Menge aller $p \geq 0$ für die $\mathbf{E}(|X|^p) < \infty$ gilt.

Aufgabe 5.2:

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (X_n) eine Folge reeller Zufallsvariablen auf Ω. Zeigen Sie, daß

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \quad \text{stochastisch für } n \to \infty$$

genau dann wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ existiert, so daß für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $\mathbf{P}\{|X_n| > \varepsilon\} < \varepsilon$ gilt.

Aufgabe 5.3:

Es seien X_n, X reelle Zufallsvariablen $(n \geq 1)$ mit $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ für $n \to \infty$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, daß

$$f(X_n) \xrightarrow{\mathbf{P}} f(X) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Aufgabe 5.4:

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und

$$\mathcal{Z} := \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X \text{ reelle Zufallsvariable}\}$$

die Menge aller reeller Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei für $X, Y \in \mathcal{Z}$ der Abstand von X zu Y definiert durch $\mathbf{d}(X, Y) := \mathbf{E}\left(\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|}\right)$. Zeigen Sie, daß

(a) $\mathbf{d}(\cdot, \cdot)$ eine Pseudometrik auf $\mathcal{Z}$ ist, das heißt für $X, Y, Z \in \mathcal{Z}$ gilt:

- **(i)** $\mathbf{d}(X, Y) = 0$ genau dann wenn $X = Y$ $\mathbf{P}$-fast sicher.
- **(ii)** $\mathbf{d}(X, Y) = \mathbf{d}(Y, X)$.
- **(iii)** $\mathbf{d}(X, Y) \leq \mathbf{d}(X, Z) + \mathbf{d}(Z, Y)$.

(b) Es sei $(X_n) \subset \mathcal{Z}$ und $X \in \mathcal{Z}$. Zeigen Sie, daß

$$X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X \text{ für } n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{d}(X_n, X) \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Aufgabe 5.5: *Cauchy*-Kriterium

Es sei (X_n) eine Folge reeller Zufallsvariablen. Zeigen Sie, daß (X_n) genau dann stochastisch konvergiert, wenn (X_n) das *Cauchy*-Kriterium erfüllt, das heißt für alle $\varepsilon > 0$ und alle $\alpha > 0$ existiert ein $n_0 \geq 1$ so daß

$$\mathbf{P}\{|X_n - X_m| \geq \alpha\} < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq n_0.$$

Hinweis: Die Methode des Beweises von Satz (5.15) ist nützlich.

6. Kapitel: Unabhängigkeit

Wir werden nun die in Stochastik I schon bewiesenen Eigenschaften von Unabhängigkeit um einige weitere ergänzen und zeigen, daß Folgen unabhängiger Zufallsvariablen mit vorgegebenen Verteilungen existieren.

6.1 Definition (Unabhängigkeit)

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge.

(a) Ein System $(A_i)_{i\in I} \subset \mathfrak{A}$ heißt <u>unabhängig</u>, falls für alle $J \subset I$ endlich

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbf{P}(A_j)$$

gilt.

(b) Seien allgemeiner $\mathcal{E}_i \subset \mathfrak{A}$ für $i \in I$. Dann heißen die Systeme $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ <u>unabhängig</u>, falls

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbf{P}(A_j)$$

für alle $J \subset I$ endlich und alle $A_j \in \mathcal{E}_j$ $(j \in J)$.

(c) Seien $X_i : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ Zufallsvariablen. Dann heißen die $(X_i)_{i\in I}$ <u>unabhängig</u>, falls

$$\mathbf{P}\left(\{X_j \in A_j \text{ für alle } j \in J\}\right) = \prod_{j\in J} \mathbf{P}\{X_j \in A_j\}$$

für alle $J \subset I$ endlich und $A_j \in \mathfrak{A}_j$ $(j \in J)$.

6.2 Bemerkung

Sei $\mathfrak{A}(X_i) = X_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)$ die von X_i erzeugte σ-Algebra $\subset \mathfrak{A}$. Dann sind die $(X_i)_{i\in I}$ unabhängig genau dann wenn die Systeme $(\mathfrak{A}(X_i))_{i\in I}$ unabhängig sind.

$\llbracket$ $$\mathbf{P}\{X_i \in A_i \, \forall i \in J\} = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in J} X_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)\right)$$ $\rrbracket$

6.3 Beispiel

Sei

$$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) = \left([0,1[\,, \mathfrak{B}([0,1[)\,, \lambda^1\big|_{[0,1[}\right)$$

und

$$A_n = \dot{\bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1}} \left[\frac{2j}{2^n}, \frac{2j+1}{2^n}\right[\;\widehat{=}\; \text{„}n\text{-te Binärstelle} = 0\text{“}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}(A_n) = 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

und

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_{n-1}}\right) \quad \text{für } i_1 < \ldots < i_n.$$

Für $J \subset I = \{1, 2, \ldots\}$ endlich gilt dann:

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{1}{2^{\#J}} = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j) \quad \Rightarrow \quad (A_i)_{i \in I} \text{ sind unabhängig.}$$

Ist $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$ die i-te Binärstelle

$$\Rightarrow \quad (X_i)_{i \in I} \text{ sind unabhängig und } \mathbf{P}_{X_i} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{E}_0 + \frac{1}{2}\mathcal{E}_1 = \mathfrak{L}_{\{0,1\}}.$$

6.4 Bemerkung

Ist $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$, $\mathcal{E}_i \subset \mathfrak{A}$ eine Familie unabhängiger Mengensysteme und $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{E}_i$ für $i \in I$ so ist trivialerweise das System $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ unabhängig.

6.5 Satz

Sei $(\mathcal{E}_i)_{i \in I}$ eine unabhängige Familie von Ereignissystemen $\mathcal{E}_i \subset \mathfrak{A}$. Dann ist auch die Familie $(\mathfrak{D}(\mathcal{E}_i))_{i \in I}$ der erzeugten Dynkin-Systeme unabhängig.

Beweis:

Es reicht die Unabhängigkeit für $J \subset I$ endlich zu zeigen. Sei also ohne Einschränkung I endlich, sei ferner $i_0 \in I$ beliebig aber fest,

$$\mathfrak{D}_{i_0} := \left\{E \in \mathfrak{A} \mid (\mathcal{E}'_i)_{i \in I} \text{ ist unabhängige Familie}\right\}$$

wobei

$$\mathcal{E}'_i = \begin{cases} \mathcal{E}_i & i \neq i_0 \\ \{E\} & i = i_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{i_0} \subset \mathfrak{D}_{i_0}.$$

Dann ist $\mathfrak{D}_{i_0}$ ein Dynkin-System:

(1) $\Omega \in \mathfrak{D}_{i_0}$, da für $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I \setminus \{i_0\}$ gilt

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap \Omega) = \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_n}) \cdot \mathbf{P}(\Omega)$$

für $A_{i_j} \in \mathcal{E}_{i_j}$ beliebig.

(2) Sei $E \in \mathfrak{D}_{i_0}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap E^{\complement}\right) &= \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap \Omega) - \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap E) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_n}) \cdot \mathbf{P}(\Omega) - \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_n}) \cdot \mathbf{P}(E) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_n}) \cdot \mathbf{P}\left(E^{\complement}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad E^{\complement} \in \mathfrak{D}_{i_0}.$$

(3) Sind $E_k \in \mathfrak{D}_{i_0}$ für $k \geq 1$ paarweise disjunkt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbf{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} E_k\right) &= \mathbf{P}\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} (A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap E_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \cap E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_n}) \cdot \mathbf{P}(E_k) \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_n}) \cdot \mathbf{P}\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} E_k\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} E_k \in \mathfrak{D}_{i_0}.$$

Da

$$\mathcal{E}_{i_0} \subset \mathfrak{D}_{i_0} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{D}\left(\mathcal{E}_{i_0}\right) \subset \mathfrak{D}_{i_0}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Das System } \overline{\mathcal{E}_i} := \begin{cases} \mathcal{E}_i & i \neq i_0 \\ \mathfrak{D}\left(\mathcal{E}_{i_0}\right) & i = i_0 \end{cases} \quad \text{ist unabhängige Familie.}$$

Nun für $i_0' \neq i_0$ und so weiter. Nach endlich vielen Schritten folgt dann die Behauptung. □

6.6 Korollar

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_i : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ Zufallsvariablen, sowie $\mathcal{E}_i$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}_i$ für $i \in I$. Dann ist $(X_i)_{i \in I}$ unabhängig

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{P}\left\{X_j \in E_j \text{ für alle } j \in J\right\} = \prod_{j \in J} \mathbf{P}\left\{X_j \in E_j\right\}$$

für alle $J \subset I$ endlich und $E_j \in \mathcal{E}_j$ $(j \in J)$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: $\quad\surd$

„$\Leftarrow$“: Sei

$$\overline{\mathcal{E}_i} := \left\{X_i^{-1}\left(E_i\right) \mid E_i \in \mathcal{E}_i\right\} \subseteq \Omega.$$

$\Rightarrow \overline{\mathcal{E}_i}$ ist $\cap$-stabil und nach Voraussetzung ist $\left(\overline{\mathcal{E}_i}\right)_{i \in I}$ ein unabhängiges Erzeugendensystem.

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{D}\left(\overline{\mathcal{E}_i}\right) \overset{(1.13)}{=} \mathfrak{A}\left(\overline{\mathcal{E}_i}\right) = \left\{X_i^{-1}\left(A_i\right) : A_i \in \mathfrak{A}_i\right\}$$

sind unabhängig. Nach Bemerkung (6.2) ist dies äquivalent zur Unabhängigkeit von $(X_i)_{i \in I}$. □

6.7 Beispiel

Falls $\Omega_i = \mathbb{R}$, $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, so sind reelle Zufallsvariablen genau dann unabhängig, wenn

$$\mathbf{P}\left\{X_j \leq t_j \text{ für alle } j \in J\right\} = \prod_{j \in J} \mathbf{P}\left\{Y_j \leq t_j\right\}$$

für alle $J \subset I$ endlich und $t_j \in \mathbb{R}$ $(j \in J)$.

⟦ $\quad \mathcal{E}_i := \{]-\infty, t] \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$! ⟧

6.8 Lemma

Seien $X_i : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ Zufallsvariablen und $f_i : (\Omega_i, \mathfrak{A}_i) \to (\Omega_i', \mathfrak{A}_i')$ meßbare Abbildungen, $i \in I$. Dann folgt aus der Unabhängigkeit von $(X_i)_{i \in I}$ die Unabhängigkeit von $(f_i \circ X_i)_{i \in I}$.

Beweis:

Für $i \in I$ und $A_i \in \mathfrak{A}_i'$ folgt:

$$\left(f_i \circ X_i\right)^{-1}\left(A_i\right) = X_i^{-1}\left(f_i^{-1}\left(A_i\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A}\left(f_i \circ X_i\right) \subset \mathfrak{A}\left(X_i\right).$$

Mit Bemerkung (6.4) und Bemerkung (6.2) folgt die Behauptung. □

Die Umkehrung von (6.8) ist natürlich falsch. Betrachte zum Beispiel $f_i \equiv 0$.

Für $I = \{1, \ldots, n\}$ endlich läßt sich die Unabhängigkeit von $(X_i)_{i \in I}$ durch die wahrscheinlichkeitstheoretische Eigenschaft der gemeinsamen Verteilung charakterisieren:

6.9 Satz

Endlich viele Zufallsvariablen

$$X_i : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_i, \mathfrak{A}_i)\,,\ i \in \{1, \ldots, n\}$$

sind genau dann unabhängig, wenn

$$\mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)} = \mathbf{P}_{X_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}_{X_n}.$$

Beweis:
Sei

$$\Omega' := \bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}' := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i \quad \text{sowie} \quad Y := (X_1, \ldots, X_n)\,.$$

$$\Rightarrow \quad Y : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega', \mathfrak{A}') \;\text{ ist Zufallsvariable.}$$

Für $i \in I$ sei $A_i \in \mathfrak{A}_i$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}_Y \left(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right) = \mathbf{P} \left\{ Y \in \bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right\} = \mathbf{P}\left\{ X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n \right\}$$

sowie

$$\mathbf{P}_{X_i}(A_i) = \mathbf{P}\left\{ X_i \in A_i \right\}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)} = \mathbf{P}_Y = \mathbf{P}_{X_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}_{X_n} \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{P}_Y \left(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right) = \mathbf{P}_{X_1}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_{X_n}(A_n) \qquad \text{(vergleiche (4.3))} \\
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{P}\left\{ X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n \right\} = \mathbf{P}\left\{ X_1 \in A_1 \right\} \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}\left\{ X_n \in A_n \right\} \\
\Leftrightarrow \quad & X_1, \ldots, X_n \;\text{ unabhängig.}
\end{aligned}$$

□

6.10 Korollar

Es seien $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mathbf{P}_i)$ mit $i \in I = \{1, \ldots, n\}$ Wahrscheinlichkeitsräume. Dann existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ und unabhängige Zufallsvariablen $X_i : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ mit $\mathbf{P}_{X_i} = \mathbf{P}_i$ für alle $i \in I$.
Beweis:
Sei

$$\Omega := \bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i \qquad \mathfrak{A} := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i \quad \text{sowie} \quad \mathbf{P} := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i$$

und

$$X_i(\omega_1, \ldots, \omega_n) := \omega_i \quad \Rightarrow \quad X_i : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$$

und nach Definition von $\mathbf{P}$ folgt

$$\mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)} \left(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right) = \mathbf{P}_{\mathrm{id}} \left(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i \right) = \mathbf{P}_1(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_n(A_n)$$

nach Definition von $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i$ folgt:

$$\mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)} = \mathbf{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}_n$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{X_j}(A_j) = \mathbf{P}\left\{ X_j \in A_j \right\} &= \mathbf{P}\left(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1} \times A_j \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_n \right) \\
&= \mathbf{P}_1(\Omega_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_{j-1}(\Omega_{j-1}) \cdot \mathbf{P}_j(A_j) \cdot \mathbf{P}_{j+1}(\Omega_{j+1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}_n(\Omega_n) \\
&= \mathbf{P}_j(A_j)\,.
\end{aligned}$$

Also

$$\mathbf{P}_{X_j} = \mathbf{P}_j.$$

Mit Satz (6.9) folgt die Behauptung. □

Im folgenden wollen wir nun Satz (6.9) und Korollar (6.10) auf unendlich viele Zufallsvariablen (auch überabzählbar viele) erweitern. Dazu benötigen wir zuerst das unendliche Produktmaß, welches das Produktmaß aus §4 erweitert.

Im folgenden sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mathbf{P}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsräumen. Für $\emptyset \neq K \subset I$ sei $\Omega_K := \bigtimes_{i \in K} \Omega_i$ und speiell $\Omega := \Omega_I$.

Für $\emptyset \neq J \subset K$ sei

$$\begin{aligned} P_J^K &: \Omega_K \to \Omega_J \\ P_J^K\left((\omega_i \mid i \in K)\right) &:= (\omega_i \mid i \in J) \end{aligned} \qquad (P_1)$$

die Projektionsabbildung.

Wir setzen

$$P_J := P_J^I \quad \text{für } K = I \quad \text{und} \quad P_i^K := P_{\{i\}}^K \quad \text{für } J = \{i\}\,,$$

speziell also:

$$P_i = P_i^I.$$

Trivialerweise gilt:

$$P_J^L = P_J^K \circ P_K^L \quad \text{für } J \subset K \subset L \qquad (P_2)$$

insbesondere

$$P_J = P_J^K \circ P_K \quad \text{für } J \subset K.$$

Sei $\mathcal{H} := \mathcal{H}(I) = \{J \subset I \mid J \text{ endlich}, \ J \neq \emptyset\}$. Nach §4 sind für $J \in \mathcal{H}(I)$ die σ-Algebren beziehungsweise Produktwahrscheinlichkeitsmaße

$$\mathfrak{A}_J := \bigotimes_{j \in J} \mathfrak{A}_j \quad \mathbf{P}_J := \bigotimes_{j \in J} \mathbf{P}_j \qquad (P_3)$$

definiert.

6.11 Definition (Produkt-σ-Algebra der $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$)

Sei $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ-Algebren.

$$\mathfrak{A} := \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{A}_i := \mathfrak{A}\left(\{P_i \mid i \in I\}\right)$$

ist die kleinste σ-Algebra bezüglich der alle Projektionen $P_i : \Omega \to \Omega_i$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_i$-meßbar sind. $\mathfrak{A}$ heißt Produkt-σ-Algebra der $(\mathfrak{A}_i)_{i \in I}$.

Für $J \in \mathcal{H}$ ist dann P_J $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_J$-meßbar, denn

$$P_J^{-1}\left(\bigtimes_{j \in J} A_j\right) = \bigcap_{j \in J} P_j^{-1}(A_j) \in \mathfrak{A} \quad \text{für alle} \ \bigtimes_{j \in J} A_j \in \mathfrak{A}_J$$

und

$$\left\{\bigtimes_{j \in J} A_j \mid A_j \in \mathfrak{A}_j\right\}$$

erzeugen $\mathfrak{A}_J$. Satz (2.21) und die Definition von $\mathfrak{A}_J$ liefern dann die Meßbarkeit.

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{A}\left(\{P_i \mid i \in I\}\right) = \mathfrak{A}\left(\{P_J \mid J \in \mathcal{H}\}\right) \qquad (P_4)$$

$[\![$ Da jedes P_J $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_J$-meßbar ist folgt „ $\supset$ “. Umgekehrt gilt:

$$\{P_i \mid i \in I\} \subset \{P_J \mid J \in \mathcal{H}\} \quad \Rightarrow \quad „\subset“$$

$]\!]$

Gesucht ist nun ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ so daß

$$\mathbf{P}\left(P_J^{-1}\left(\bigtimes_{j\in J} A_j\right)\right) = \prod_{j\in J} \mathbf{P}_j\left(A_j\right)$$

für alle $J \in \mathcal{H}$ und alle $A_j \in \mathfrak{A}_j$, $j \in J$. Da nach Satz (4.6)

$$\mathbf{P}_J\left(\bigtimes_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbf{P}_j\left(A_j\right)$$

das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{A}_J$ mit dieser Eigenschaft ist, lautet unsere Frage: Gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $P_J(\mathbf{P}) = \mathbf{P}_J$ für alle $J \in \mathcal{H}$?

6.12 Satz

Auf der σ-Algebra $\mathfrak{A} = \bigotimes_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ mit

$$P_J(\mathbf{P}) = \mathbf{P}_J \quad \text{für alle } J \in \mathcal{H} \qquad (P_5)$$

Beweis:
Ist I endlich, so folgt die Behauptung aus §4. Sei also I nicht endlich.
Vorbetrachtungen:

(1) Für $J, K \in \mathcal{H}$, $J \subset K$

$$\Rightarrow \quad P_J^K : \Omega_K \to \Omega_J \text{ ist } \mathfrak{A}_K\text{-}\mathfrak{A}_J\text{-meßbar.}$$

⟦ $\bigtimes_{i\in J} A_i$ mit $A_i \in \mathfrak{A}_i$, $i \in J$ erzeugen $\mathfrak{A}_J$ und $\left(P_J^K\right)^{-1}\left(\bigtimes_{i\in J} A_i\right) = \bigtimes_{i\in K} A_i' \in \mathfrak{A}_K$ mit $A_i' = A_i$ für $i \in J$ und $A_i' = \Omega_i$ für $i \in K \setminus J$. Mit (2.21) folgt dann die Behauptung. ⟧

$$\Rightarrow \quad \prod_{i\in K} \mathbf{P}_i\left(A_i'\right) = \prod_{i\in J} \mathbf{P}_i\left(A_i\right) \overset{\text{Eindeutig-}}{\underset{\text{keitssatz}}{\Rightarrow}} \quad P_J^K\left(\mathbf{P}_K\right) = \mathbf{P}_J \quad \text{für } K, J \in \mathcal{H} \text{ mit } J \subset K.$$

(2) Für $J \in \mathcal{H}$ sei $\mathcal{Z}_J := P_J^{-1}\left(\mathfrak{A}_J\right)$ die σ-Algebra der <u>J-Zylindermengen</u>

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \left(P_J^K\right)^{-1}\left(\mathfrak{A}_J\right) \subset \mathfrak{A}_K \quad \text{und somit} \quad \mathcal{Z}_J \subset \mathcal{Z}_K \text{ für } J \subset K \text{ und } J, K \in \mathcal{H}.$$

⟦

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_J &= P_J^{-1}\left(\mathfrak{A}_J\right) = \left(P_J^K \circ P_K\right)^{-1}\left(\mathfrak{A}_J\right) \\ &= \left(P_K\right)^{-1}\left(\left(P_J^K\right)^{-1}\left(\mathfrak{A}_J\right)\right) \subset \left(P_K^{-1}\right)\left(\mathfrak{A}_K\right) = \mathcal{Z}_K. \end{aligned}$$

⟧

(3) Sei $\mathcal{Z} = \bigcup_{J\in\mathcal{H}} \mathcal{Z}_J$ das <u>System der Zylindermengen</u>. Für $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z} \Rightarrow \exists J_1, J_2 \in \mathcal{H} : Z_i \in \mathcal{Z}_{J_i}$.
Sei $J = J_1 \cup J_2 \in \mathcal{H} \overset{(2)}{\Rightarrow} Z_i \in \mathcal{Z}_J \Rightarrow \mathcal{Z}$ ist Algebra (aber im allgemienen keine σ-Algebra).
Wegen (P_4) gilt

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathcal{Z}).$$

<u>1. Schritt</u>: Existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ mit (P_5)

$$\Rightarrow \quad Z = (P_J)^{-1}(A), \, A \in \mathfrak{A}_J \quad \text{mit} \quad \mathbf{P}(Z) = P_J(\mathbf{P})(A) = \mathbf{P}_J(A).$$

Dies ist wohldefiniert: Sei

$$Z = (P_J)^{-1}(A) = (P_K)^{-1}(B) \quad \text{mit } J, K \in \mathcal{H}, \, A \in \mathfrak{A}_J, \, B \in \mathfrak{A}_K.$$

Ist $J \subset K$

$$\Rightarrow \quad P_J^{-1}(A) = \left(P_J^K \circ P_K\right)^{-1}(A) = (P_K)^{-1}\left(\left(P_J^K\right)^{-1}(A)\right)$$

$$\Rightarrow \quad P_K^{-1}(B) = P_K^{-1}(B') \quad \text{mit } B' = \left(P_J^K\right)^{-1}(A) \in \mathfrak{A}_K.$$

Da $P_K : \Omega \to \Omega_K$ eine Projektion ist folgt:

$$B = B' = \left(P_J^K\right)^{-1}(A)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}_K(B) = \mathbf{P}_K\left(\left(P_J^K\right)^{-1}(A)\right) = \left(P_J^K\right)(\mathbf{P}_K)(A) = \mathbf{P}_J(A) = \mathbf{P}(Z).$$

Sind J, K beliebig, so setzt man $L = J \cup K \Rightarrow J \subset L$ und $K \subset L$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \exists C \in \mathfrak{A}_L \text{ mit } Z = (P_L)^{-1}(C) = P_J^{-1}(A) = P_K^{-1}(B)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}(Z) = \mathbf{P}_L(C) = \mathbf{P}_J(A) = \mathbf{P}_K(B) \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung.}$$

Also wird durch $\mathbf{P}_0 : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}_+$, $\mathbf{P}_0\left(P_J^{-1}(A)\right) := \mathbf{P}_J(A)$, $J \in \mathcal{H}$ und $A \in \mathfrak{A}_J$ eine Funktion definiert.

<u>2. Schritt</u>: $\mathbf{P}_0$ ist Inhalt auf Z. Trivialerweise ist $\mathbf{P}_0 \geq 0$ und $\mathbf{P}_0(\emptyset) = \mathbf{P}_0\left(P_J^{-1}(\emptyset)\right) = \mathbf{P}_J(\emptyset) = 0$ für $J \in \mathcal{H}$ beliebig. Sind $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$ disjunkt, so existiert ein $J \in \mathcal{H}$ mit

$$Z_i = \left(P_J^{-1}\right)(A_i) \quad \text{mit } A_i \in \mathfrak{A}_J.$$

Also:

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_0(Z_1 \cup Z_2) &= \mathbf{P}_0\left(P_J^{-1}(A_1) \cup P_J^{-1}(A_2)\right) \\ &= \mathbf{P}_0\left(P_J^{-1}(A_1 \cup A_2)\right) \\ &= \mathbf{P}_J(A_1 \cup A_2) \\ &= \mathbf{P}_J(A_1) + \mathbf{P}_J(A_2) \\ &= \mathbf{P}_0(Z_1) + \mathbf{P}_0(Z_2). \end{aligned}$$

Um den Fortsetzungssatz (2.16) zu verwenden, müssen wir noch zeigen, daß der Inhalt $\mathbf{P}_0$ ein Prämaß ist, das heißt σ-additiv:

<u>3. Schritt</u>: Für $Z \in \mathcal{Z}$ und $J \in \mathcal{H}$ ist für jedes $\overline{\omega}_J \in \Omega_J$

$$Z^{\overline{\omega}_J} := \left\{\omega \in \Omega \mid \left(\overline{\omega}_J, P_{I \setminus J}(\omega)\right) \in Z\right\} \in \mathcal{Z}.$$

Es ist $\omega \in Z^{\overline{\omega}_J} \Leftrightarrow$ ersetzt man in ω die zu $i \in J$ gehörenden Koordinaten durch die entsprechenden von $\overline{\omega}_J$ so erhält man einen Punkt aus Z. Es gilt

$$\mathbf{P}_0(Z) = \int \mathbf{P}_0\left(Z^{\omega_J}\right) \mathbf{dP}_J(\omega_J) \qquad (P_6)$$

$\llbracket$ Für $Z \in \mathcal{Z}$ $\exists K \in \mathcal{H}$, $A \in \mathfrak{A}_K : Z = P_K^{-1}(A)$. Da I unendlich können wir wegen $\mathcal{Z}_{K_1} \subset \mathcal{Z}_{K_2}$ für $K_1 \subset K_2$ ohne Einschränkung $J \subset K$ und $J \neq K$ ($J \subsetneq K$) annehmen.

$$\Rightarrow \quad A_{\omega_J} = \left\{\omega \in \Omega_K \mid \omega = (\omega_J, \omega') \in A, \, \omega' \in \Omega_{K \setminus J}\right\} \in \mathfrak{A}_K$$

$$\Rightarrow \quad Z^{\omega_J} = P_{K \setminus J}^{-1}(A_{\omega_J}) \quad \Rightarrow \quad Z^{\omega_J} \in \mathcal{Z}.$$

Mit Lemma (4.4) angewandt auf $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_J$, $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_{K\setminus J}$

$$\Rightarrow \quad A_{\omega_J} \in \mathfrak{A}_{K\setminus J} \quad \Rightarrow \quad Z^{\omega_J} = \left(P_{K\setminus J}\right)^{-1}(A_{\omega_J}) \in \mathcal{Z}_{K\setminus J}.$$

Da $\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_J \otimes \mathbf{P}_{K\setminus J}$ folgt aus Satz (4.6)

$$\mathbf{P}_0(Z) = \mathbf{P}_K(A) = \int \mathbf{P}_{K\setminus J}(A_{\omega_J})\, \mathbf{dP}_J(\omega_J)\,.$$

Da

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{K\setminus J}(A_{\omega_J}) &= P_{K\setminus J}(\mathbf{P}_0)(A_{\omega_J}) \\
&= \mathbf{P}_0\left(\left(P_{K\setminus J}\right)^{-1}(A_{\omega_J})\right) \\
&= \mathbf{P}_0\left(Z^{\omega_J}\right)
\end{aligned}$$

folgt (P_6). $\rrbracket$

<u>Nächster Schritt</u>: Wegen Satz (2.5) reicht es zu zeigen, daß $\mathbf{P}_0$ $\emptyset$-stetig ist. Seien $Z_n \in \mathcal{Z}$, $Z_n \downarrow$ und $\alpha := \inf\limits_{n\geq 1} \mathbf{P}_0(Z_n) > 0$.

Zu zeigen:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \neq \emptyset.$$

Es ist $Z_n = (P_{J_n})^{-1}(A_n)$ mit $J_n \in \mathcal{H}$, $A_n \in \mathfrak{A}_n$; ohne Einschränkung $J_1 \subset J_2 \subset \ldots$ Nach dem dritten Schritt ist $\omega_{J_1} \mapsto \mathbf{P}_0\left(Z_n^{\omega_{J_1}}\right)$ $\mathfrak{A}_{J_1}$-$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-meßbar (siehe Lemma (4.5))

$$\Rightarrow \quad Q_n := \left\{\omega_{J_1} \in \Omega_{J_1} : \mathbf{P}_0\left(Z_n^{\omega_{J_1}}\right) \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \in \mathfrak{A}_{J_1} \quad \forall n \geq 1.$$

$$\begin{aligned}
\overset{(P_6)}{\Rightarrow} \quad \alpha \leq \mathbf{P}_0(Z_n) &= \int \mathbf{P}_0\left(Z_n^{\omega_{J_1}}\right) \mathbf{dP}_{J_1}(\omega_{J_1}) \\
&= \int_{Q_n} \underbrace{\mathbf{P}\left(Z_n^{\omega_{J_1}}\right)}_{\leq 1} \mathbf{dP}_{J_1}(\omega_{J_1}) + \int_{Q_n^{\complement}} \underbrace{\mathbf{P}\left(Z_n^{\omega_{J_1}}\right)}_{\leq \frac{\alpha}{2}} \mathbf{dP}_{J_1}(\omega_{J_1}) \\
&\leq \mathbf{P}_{J_1}(Q_n) + \frac{\alpha}{2} \cdot \mathbf{P}_{J_1}\left(Q_n^{\complement}\right) \\
&\leq \mathbf{P}_{J_1}(Q_n) + \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}_{J_1}(Q_n) \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Da $Z_n \downarrow$

$$\Rightarrow \quad Z_n^{\omega_{J_1}} \downarrow \quad \forall \omega_{J_1} \in \Omega_{J_1} \quad \Rightarrow \quad Q_n \downarrow.$$

Da $\mathbf{P}_{J_1}$ $\emptyset$-steig ist

$$\Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists \omega_{J_1} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n \quad \text{mit } \mathbf{P}_0\left(Z_n^{\omega_{J_1}}\right) \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Noch ein Schritt:

$$J_2 \neq J_1 \overset{\text{wie oben}}{\Rightarrow} \exists \omega_{J_2 \setminus J_1} \in \Omega_{J_2 \setminus J_1} : \mathbf{P}_0 \left(\left(Z_n^{\omega_{J_1}} \right)^{\omega_{J_2 \setminus J_1}} \right) \geq 2^{-2} \alpha.$$

Wir setzen $\omega_{J_2} := \left(\omega_{J_1}, \omega_{J_2 \setminus J_1} \right) \in \Omega_{J_2}$ und es folgt

$$\left(Z^{\omega_{J_1}} \right)^{\omega_{J_2 \setminus J_1}} = Z^{\omega_{J_2}}$$

und somit

$$\mathbf{P}_0 \left(Z_n^{\omega_{J_2}} \right) \geq 2^{-2} \alpha > 0 \quad \text{sowie} \quad P_{J_1}^{J_2} \left(\omega_{J_2} \right) = \omega_{J_1}.$$

Ist $J_2 = J_1$, so können wir $\omega_{J_2} := \omega_{J_1}$ wählen. Induktiv folgt:

$$\forall k \geq 1 \, \exists \omega_{J_k} \in \Omega_{J_k} \quad \text{mit} \quad \forall n \geq 1 : \mathbf{P}_0 \left(Z_n^{\omega_{J_k}} \right) \geq 2^{-k} \alpha \quad \text{und} \quad P_{J_k}^{J_{k+1}} \left(\omega_{J_{k+1}} \right) = \omega_{J_k}$$

$$\Rightarrow \quad \exists \omega_0 \in \Omega : P_{J_k} \left(\omega_0 \right) = \omega_{J_k} \quad \forall k \geq 1.$$

Es muß $Z_n^{\omega_{J_n}} \neq \emptyset$ gelten

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \tilde{\omega}_n \in \Omega \quad \text{mit} \quad \left(\omega_{J_n}, P_{I \setminus J_n} \left(\tilde{\omega}_n \right) \right) \in Z_n \\ &\Rightarrow \quad \left(\omega_{J_n}, P_{I \setminus J_n} \left(\omega_0 \right) \right) = \left(P_{J_n} \left(\omega_0 \right), P_{I \setminus J_n} \left(\omega_0 \right) \right) = \omega_0 \in Z_n \quad \forall n \geq 1 \\ &\Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \neq \emptyset. \end{aligned}$$

□

6.13 Definition (Produktraum)

(Vergleiche §4) Es seien $\left(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mathbf{P}_i \right)_{i \in I}$ Wahrscheinlichkeitsräume. Das nach Satz (6.12) eindeutig bestimmte Produktmaß wird mit $\bigotimes_{i \in I} \mathbf{P}_i$ bezeichnet. Der Raum

$$\left(\bigtimes_{i \in I} \Omega_i, \bigotimes_{i \in I} \mathfrak{A}_i, \bigotimes_{i \in I} \mathbf{P}_i \right)$$

heißt <u>Produktraum</u> und wir schreiben auch

$$\bigotimes_{i \in I} \mathbf{P}_i \left(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mathbf{P}_i \right).$$

Wie in Satz (6.9) läßt sich nun die Unabhängigkeit einer Familie von Zufallsvariablen $\left(X_i \right)_{i \in I}$ für beliebige Indexmengen I durch die gemeinsame Verteilung charakterisieren:

6.14 Satz

Eine Familie $\left(X_i \right)_{i \in I}$ von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ist genau dann unabhängig, wenn

$$\mathbf{P}_{(X_i : i \in I)} = \bigotimes_{i \in I} \mathbf{P}_{X_i}$$

gilt.

Beweis:

Analog Zu (6.9)!

6.15 Korollar

Zu jeder Familie $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mathbf{P}_i)_{i\in I}$ von Wahrscheinlichkeitsräumen existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ und Zufallsvariablen $X_i : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ die unabhängig sind und $\mathbf{P}_{X_i} = \mathbf{P}_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Beweis:

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) = \bigotimes\limits_{i\in I} (\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mathbf{P}_i)$ und $X_i : \Omega \to \Omega_i$ die Projektion (also $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_i$-meßbar).

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}_{X_i} = \mathbf{P}_i \quad \text{nach Definition von } \mathbf{P} = \bigotimes_{i\in I} \mathbf{P}_i.$$

Es ist $(X_i : i \in I) : \Omega \to \Omega$ die Identität

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P}_{(X_i : i\in I)} = \mathbf{P}_{\text{id}} = \mathbf{P} = \bigotimes_{i\in I} \mathbf{P}_i = \bigotimes_{i\in I} \mathbf{P}_{X_i}.$$

Mit Satz (6.14) folgt dann die Behauptung. □

Aufgaben:

Aufgabe 6.1: Einfache symmetrische Irrfahrt

Es sei $(X_i)_{i\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten reellen Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}_{X_i} = \frac{1}{2}\varepsilon_{-1} + \frac{1}{2}\varepsilon_{+1}$ sowie $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ und $S_0 = 0$. $(S_n)_{n\geq 0}$ heißt einfache symmetrische Irrfahrt. Weiter sei $Y_n = 1_{\{S_n=0\}}$. Zeigen Sie, daß $Y_n \to 0$ stochastisch und im p-ten Mittel für jedes $p \geq 1$.

Aufgabe 6.2:

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie, daß

$$\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left(X_i\right)$$

wenn alle $X_i \geq 0$ oder alle X_i integrierbar sind. Im zweiten Fall ist auch das Produkt integrierbar.

Aufgabe 6.3:

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie:

(a) Zwei Ereignisse $A, B \in \mathfrak{A}$ sind genau dann unabhängig, wenn A und $B^{\complement}$ unabhängig sind.

(b) Ist $\mathbf{P}(B) = 0$ oder $\mathbf{P}(B) = 1$ so sind A, B unabhängig für jedes $A \in \mathfrak{A}$.

(c) Sind die Ereignisse $A, B, C \in \mathfrak{A}$ unabhängig so sind $A \cup B$ und C unabhängig.

(d) Sind X, Y, Z unabhängige reelle Zufallsvariablen so sind auch die Paare von Zufallsvariablen $X + Y, Z$ sowie XY, Z unabhängig.

Aufgabe 6.4:

Es seien X, Y unabhängige reelle Zufallsvariablen mit Verteilungen $\mu = f \cdot \lambda^1$ beziehungsweise $\nu = g \cdot \lambda^1$ und (uneigentlich) *Riemann*-integrierbare Dichten $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, daß $Y \neq 0$ fast sicher.

(a) Zeigen Sie, daß der Quotient $Q := XY^{-1}$ die Verteilung $q \cdot \lambda^1$ mit der Dichte

$$q(z) = \int f(zy)\, g(y)\, |y| \, \mathbf{d}\lambda^1(y)$$

besitzt.

(b) Man berechne q im Fall $\mu = \nu = \mathcal{N}_{0;1}$.

Aufgabe 6.5:

Man beweise die Existenz einer unabhängigen Folge $(X_n)_n$ reeller Zufallsvariablen auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, wobei jedes X_n den beiden folgenden Bedingungen genügt.

(a) $\mathbf{P}\{X_n = 1\} = \mathbf{P}\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}(1 - 2^{-n})$,

(b) $\mathbf{P}\{X_n = 2^n\} = \mathbf{P}\{X_n = -2^n\} = 2^{-n-1}$.

In beiden Fällen berechne man die Varianzen $\mathbf{V}(X_n)$.

Aufgabe 6.6:

(a) Es seien $X : (\Omega, \mathfrak{A}) \to (\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $Y : (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \to (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraium $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.
Man zeige: Für alle $M \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ gilt

$$\mathbf{P}\left\{(X,Y) \in M\right\} = \int_{\Omega_1} \mathbf{P}\left\{(x,Y) \in M\right\} \mathbf{dP}_X(x).$$

(b) Es seien X, Y unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Berechnen Sie die *Lebesgue*-Dichte der Verteilung von $\frac{X}{X+Y}$.
Hinweis: Teil (a)!

Aufgabe 6.7:

Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge unabhängiger $\mathcal{B}_{1;p}$-verteilter Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ und für $m \in \mathbb{N}$ sei $T_m : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Wartezeit auf den m-ten Erfolg, das heißt

$$T_m := \inf\left\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i = m\right\}.$$

Man zeige:

(a) $\mathbf{P}\left\{T_{m+1} - T_m = k\right\} = \mathbf{P}\left\{T_1 = k\right\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $m \geq 1$.

(b) Die Folge $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_{m+1} - T_m, \ldots$ ist unabhängig.

Index