Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler WS10/11

Übungen zur Veranstaltung Stochastische Prozesse

Aufgabe 1: X, Y seien unabhängige Gauß'sche Vektoren im $\mathbb{R}^d$.

a) Zeigen Sie, daß auch $X + Y$ ein Gauß'scher Vektor ist.

b) Berechnen Sie den Erwartungswertvektor und die Kovarianzmatrix von $X + Y$ aus denen von X und Y.

Aufgabe 2:

a) X sei ein $\mathcal{N}_{\mu,\Sigma}$-verteilter Zufallsvektor im $\mathbb{R}^d$, Σ sei invertierbar. Zeigen Sie, daß P_X die Lebesque-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det \Sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

besitzt. (*Hinweis:* Für jede invertierbare Matrix K gilt $\int f(Kx)d\lambda^d(x) = \frac{1}{\det K}\int f(y)d\lambda^d(y)$. $\mathcal{N}_{0,I}$ hat die Dichte $x \mapsto (2\pi)^{-d/2}\exp(-\|x\|^2/2)$.)

b) Zeigen Sie, daß die charakteristische Funktion von X die Form

$$\widehat{P_X}(\xi) = \exp\left(i\langle \xi, \mu\rangle - \frac{1}{2}\langle \xi, \Sigma\xi\rangle\right)$$

für $\xi \in \mathbb{R}^d$ hat.

Aufgabe 3: Die Verteilung von (X_1, X_2) besitze die λ^2-Dichte

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)\right)$$

für ein $|\rho| < 1$. Zeigen Sie, daß (X_1, X_2) ein Gauß'scher Vektor im $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 4: Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$-verteilt mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \geq 0$. Zeigen Sie:

a) Für $|\alpha| < 1$ konvergiert

$$Z(\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j X_j$$

im 2-ten Mittel.

b) $Z(\alpha)$ ist normalverteilt.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $Z(\alpha)$.

Abgabe: Donnerstag, den 21.Oktober 2010 in der Vorlesung