Übungen zur Veranstaltung Stochastische Prozesse

Aufgabe 5: Es sei $(X_t : t \in \mathbb{R})$ ein quadratisch integrierbarer reellwertiger Prozeß mit stetiger Mittelwertfunktion $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und stetiger Kovarianzfunktion $\Sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß der Prozeß *stochastisch stetig* ist, d.h. für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{t \to s} P\{|X_t - X_s| \geq \varepsilon\} = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Hinweis: Tschebyscheff-Ungleichung.

Aufgabe 6: Es sei $(X_t : t \geq 0)$ ein Gauß'scher Prozeß mit Mittelwertfunktion $E(X_t) = 0$ für $t \geq 0$ und Kovarianzfunktion $\mathrm{Kov}(X_t, X_s) = \min(t, s)$ für $t, s \geq 0$.
Zeigen Sie, daß die folgenden Prozesse Gauß'sch sind und bestimmen Sie jeweils die Mittelwertfunktion und die Kovarianzfunktion:

(i) $B_t := (1+t)X_{t/(1+t)}$, $(t \geq 0)$
(ii) $C_t := \frac{1}{c}X_{c^2 t}$, $(t \geq 0)$ für ein $c > 0$
(iii) $D_t := X_{t+s} - X_t$, $(t \geq 0)$ für ein $s \geq 0$.
(iv) $E_t := \begin{cases} 0 & t = 0 \\ tX_{1/t} & t > 0 \end{cases}$

Aufgabe 7: Es sei Z eine reellwertige Zufallsvariable mit Verteilung $\mathcal{N}_{0,\tau}$ für ein $\tau \geq 0$. Zeigen Sie, daß $E|Z|^4 = 3\tau^2$ gilt.

Aufgabe 8:

a) Zeigen Sie, daß ein Gauß'scher Prozeß $(X_t : t \in [0,1])$ existiert mit $\mu(s) = 0$ und $\Sigma(s,t) = \min(s,t) - st$.
b) Beweisen Sie, daß $B_t := (1+t)X_{t/(1+t)}$ $(t \geq 0)$ eine Brown'sche Bewegung definiert.

Abgabe: Donnerstag, den 28.Oktober 2010 in der Vorlesung