Übungen zur Veranstaltung Stochastische Prozesse

Aufgabe 9:

a) Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein reelwertiger Prozess mit stetigen Pfaden. Man zeige, dass für alle $0 \leq a < b$ die Abbildung $\omega \mapsto \int_a^b X_t(\omega)dt$ meßbar ist.

b) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine normale B.B. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $\int_0^1 B_s ds$.

Aufgabe 10:

a) Zeigen Sie, daß man einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ finden kann, auf dem zwei unabhängige Brownsche Bewegungen $(B_{1,t} : t \geq 0)$ und $(B_{2,t} : t \geq 0)$ existierten.

b) Bestimmen sie den Erwartungswert von $\sqrt{B_{1,t}^2 + B_{2,t}^2}$. *Hinweis*: Polarkoordinaten.

Aufgabe 11: Es sei $(B_t : t \geq 0)$ eine Brown'sche Bewegung. Die *Brown'sche Brücke* ist der durch $Z_t := tB_1 - B_t$ definierte Prozeß $(Z_t : t \in [0,1])$. Zeigen Sie, daß dies ein Gauß'scher Prozeß mit stetigen Pfaden ist, und berechnen Sie Mittelwert und Kovarianzfunkion. Hat die Brown'sche Brücke unabhängige Zuwächse?

Aufgabe 12: Es sei $(B_t : t \geq 0)$ eine normale Brown'sche Bewegung. Für $\alpha, \beta > 0$ sei

$$X_t := e^{-\alpha t} B_{\beta \exp(2\alpha t)} \quad (t \geq 0).$$

Zeigen Sie, daß $(X_t : t \geq 0)$ ein Gauß'scher Prozeß mit f.s. stetigen Pfaden ist und berechnen Sie die Mittelwertfunktion und die Kovarianzfunktion. ($(X_t : t \geq 0)$ wird *Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß* genannt.)

Abgabe: Donnerstag, den 04.November 2010 in der Vorlesung