Übungen zur Veranstaltung Stochastische Prozesse

Aufgabe 13:

a) Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß P absolut stetig bezüglich des Zählmaßes ζ auf $\mathbb{N}$ ist und geben Sie eine Dichte von P bezüglich ζ an.

b) Es seien P, Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ mit Lebesquedichten, d.h. $P = f \cdot \lambda^1$ und $Q = g \cdot \lambda^1$. Charakterisieren Sie die Absolut-Stetigkeit von P bzgl. Q durch die Lebesquedichten und geben Sie eine Dichte von P bezüglich Q an.

Aufgabe 14: Zeigen Sie, daß ein endliches Maß ν genau dann μ-stetig ist, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt:

$$\mu(A) \leq \delta \implies \nu(A) \leq \varepsilon.$$

Aufgabe 15: Es sein $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-Raum, $(B_t)_{t\geq 0}$ normale Brown'sche Bewegung. Berechnen Sie $P\{\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty\}$. *Hinweis:* Betrachten Sie zuerst für $a > 0$ das Ereignis

$$\{|B_{2^{n+1}} - B_{2^n}| > a \cdot 2^{n/2} \text{ für unendlich viele } n\}.$$

Aufgabe 16: Es seien X und Y quadratisch integrierbare Zufallsvariable auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ und $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, daß

$$E_P(|X \cdot Y| \,|\mathcal{C}) \leq E_P(|X^2| \,|\mathcal{C}) \cdot E_P(|Y^2| \,|\mathcal{C})$$

P-fast sicher gilt.

Abgabe: Donnerstag, den 18.November 2010 in der Vorlesung