Übungen zur Veranstaltung Stochastische Prozesse

Aufgabe 17: Es sei (X, Y) ein Gauß'scher Vektor im $\mathbb{R}^2$ mit Korrelationskoeffizient $\rho = \frac{\operatorname{Kov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ $(\sigma_X^2 = \operatorname{Var}(X),\ \sigma_Y^2 = \operatorname{Var}(Y))$. Weiter sei $\lambda = \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$ sowie $a = E(X) - \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} E(Y)$. Zeigen Sie, daß $\lambda Y + a$ eine Version von $E(X|Y)$ ist.

Aufgabe 18: Es sei X eine nichtnegative bzw. integrierbare numerischer Zufallsvariable. Zeigen Sie: Eine $\mathcal{C}$-meßbare, numerische, nichtnegative bzw. integrierbare Zufallsvariable X_0 ist genau dann eine Version der bedingten Erwartung $E(X|\mathcal{C})$, wenn

$$\int Z X_0 \, dP = \int Z X \, dP$$

für alle $\mathcal{C}$-meßbaren Zufallsvariablen Z gilt, welche nichtnegativ bzw. beschränkt sind.

Aufgabe 19:

a) Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Menge $A \in \mathfrak{A}^{\otimes n}$ heißt *permutationsinvariant*, falls für alle Permutationen $\sigma \in \mathcal{S}^n$ gilt:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in A \iff (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) =: \sigma((x_1, \ldots, x_n)) \in A.$$

$\mathcal{C}$ bezeichne die σ-Algebra der permutationsinvarianten Mengen. Zeigen Sie, daß für eine beliebige integrierbare Zufallsvariable $X : \Omega^n \to \mathbb{R}$

$$E(X|\mathcal{C}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}^n} X \circ \sigma.$$

b) $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie mit Hilfe von a), daß $E(X_1|S_n) = \frac{1}{n} S_n$.

Aufgabe 20: (Jensensche Ungleichung) Es sei X eine reelle integrierbare Zufallsvariable mit Werten in einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. $q : I \to \mathbb{R}$ sei konvex und monoton wachsend. Weiter sei $\mathcal{C} \subset \mathfrak{A}$ eine Unter-σ-Algebra. Zeigen Sie:

a) $E(X|\mathcal{C}) \in I$ P-f.s.

b) Falls $q \circ X$ quasi-integrierbar, so gilt
$$q(E(X|\mathcal{C})) \leq E(q \circ X|\mathcal{C})$$
(*Hinweis:* Verwenden Sie die 3-Schritt Methode zur Konstruktion des Erwartungswertes und die elementare Jensensche Ungleichung:
$$q(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 q(x_1) + ... + \lambda_n q(x_n)$$
mit $\sum \lambda_i = 1$.)

Abgabe: Donnerstag, den 25.November 2010 in der Vorlesung