Übungen zur Veranstaltung Stochastische Prozesse

Aufgabe 20: Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $B \in \mathfrak{A}$ mit $0 < P(B) < 1$ sowie $\mathcal{C} = \mathfrak{A}(\{B\})$. Weiter sei $X = \mathrm{id} : \Omega \to \Omega$ die Identität. Zeigen Sie, daß durch $K : \Omega \times \mathfrak{A} \to [0,1]$,

$$K(\omega, A) := 1_B(\omega) P(A|B) + 1_{B^c}(\omega) P(A|B^c)$$

eine Version der bedingten Verteilung $P_{X|\mathcal{C}}$ von X unter $\mathcal{C}$ gegeben ist.

Aufgabe 21: Es seien $X_1 : \Omega \to E_1$ und $X_2 : \Omega \to E_2$ unabhängige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $f : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ meßbar sowie $f(X_1, X_2)$ integrierbar. Zeigen Sie, daß $x_1 \mapsto E(f(x_1, X_2))$ eine Version von $E(f(X_1, X_2)|X_1 = \cdot)$ ist.

Aufgabe 22:

(a) Es sei X $\mathcal{N}_{0,\sigma^2}$-verteilt mit $\sigma > 0$. Zeigen Sie, daß $E(e^X) = e^{\sigma^2/2}$ gilt.

(b) Es sei $(B_t : t \geq 0)$ eine normale Brownsche Bewegung und $\mathfrak{A}_t := \mathfrak{A}_t^{\mathcal{B}}$ die kanonische Filtration. Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ fest und $t \geq 0$ sei

$$X_t := \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t) \quad \text{(geometrische Brownsche Bewegung)}$$

Zeigen Sie, daß $(X_t : t \geq 0)$ ein Martingal bezüglich $(\mathfrak{A}_t : t \geq 0)$ ist.

Aufgabe 23: Zeigen Sie, daß ein $(\mathfrak{A}_t : t \in I)$-adaptierter Prozeß $(X_t : t \in I)$ genau dann ein Submartingal [Martingal, Supermartingal] ist, wenn $E(1_C X_t) \geq E(1_C X_s)$ $[=, \leq]$ ist für alle $s, t \in I$, $s < t$ und alle $C \in \mathfrak{A}_s$.

Abgabe: Donnerstag, den 2.Dezember 2010 in der Vorlesung