Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler WS10/11

Übungen zur Veranstaltung Stochastische Prozesse

Aufgabe 20:

(a) Es sei X $\mathcal{N}_{0,\sigma^2}$-verteilt mit $\sigma > 0$. Zeigen Sie, daß $E(e^X) = e^{\sigma^2/2}$ gilt.

(b) Es sei $(B_t : t \geq 0)$ eine normale Brownsche Bewegung und $\mathfrak{A}_t := \mathfrak{A}_t^{\mathcal{B}}$ die kanonische Filtration. Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ fest und $t \geq 0$ sei

$$X_t := \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t) \quad \text{(geometrische Brownsche Bewegung)}$$

Zeigen Sie, daß $(X_t : t \geq 0)$ ein Martingal bezüglich $(\mathfrak{A}_t : t \geq 0)$ ist.

Aufgabe 21: Zeigen Sie, daß ein $(\mathfrak{A}_t : t \in I)$-adaptierter Prozeß $(X_t : t \in I)$ genau dann ein Submartingal [Martingal, Supermartingal] ist, wenn $E(1_C X_t) \geq E(1_C X_s)$ $[=, \leq]$ ist für alle $s, t \in I$, $s < t$ und alle $C \in \mathfrak{A}_s$.

Aufgabe 22: Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_t : t \in I)$ ein an die Filtration $(\mathfrak{A}_t : t \in I)$ adaptierter Prozeß. Zeigen Sie, daß die P-Vervollständigung $(\mathfrak{A}_t^0 : t \in I)$ eine Filtration ist und der Prozeß $(X_t : t \in I)$ auch an diese Filtration adaptiert ist. Zeigen Sie weiter, daß falls $(X_t : t \in I)$ ein (Sub/Super-)Martingal bzgl. $(\mathfrak{A}_t : t \in I)$ ist, so ist es auch eins bzgl. $(\mathfrak{A}_t^0 : t \in I)$.

Aufgabe 23: Es seien T_n Stopzeiten bzgl. der Filtration $(\mathfrak{A}_t : t \in \mathbb{R}_+)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß dann auch $\sup_n T_n$ und $\inf_n T_n$ Stopzeiten sind.

Abgabe: Donnerstag, den 2.Dezember 2010 in der Vorlesung