Übungen zur Veranstaltung Stochastische Prozesse

Aufgabe 26: Das Spielkapital eines Spielers zum Zeitpunkt n betrage M_n falls er in jeder Runde eine Einheit setzt. Ein zweiter Spieler bestimmt seinen Einsatz X_n aufgrund der Beobachtung des Spielverlaufs $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$. Bezeichne $(\mathfrak{A}_n : n \geq 0)$ eine Filtration bzgl. der $(M_n : n \geq 0)$ adaptiert ist. Zeigen Sie, daß $(X_n : n \geq 1)$ vorhersagbar ist. Das Kapital des zweiten Spielers zum Zeitpunkt n ist das *diskrete stochastische Integral*

$$Y_n := X_0 \cdot M_0 + \sum_{j=1}^{n} X_j (M_j - M_{j-1}).$$

Wir nehmen an, daß jedes X_j beschränkt ist. Zeigen Sie:

(a) Ist $(M_n : n \geq 0)$ ein Supermartingal und $X_j \geq 0$ für alle j, so ist $(Y_n : n \geq 0)$ ein Supermartingal.

(b) Ist $(M_n : n \geq 0)$ ein Martingal, so ist auch $(Y_n : n \geq 0)$ ein Martingal.

Aufgabe 27: Es sei $((B_t^{(1)}, B_t^{(2)}) : t \geq 0)$ die zweidimensionale Brown'sche Bewegung und $\mathfrak{A}_t := \mathfrak{A}((B_s^{(1)}, B_s^{(2)}) : s \leq t)$ die kanonische Filtration. Zeigen Sie:

(a) Für $i = 1, 2$ ist $(B_t^{(i)} : t \geq 0)$ ein Martingal bzgl. $(\mathfrak{A}_t : t \geq 0)$.

(b) Für $t \geq 0$ sei $X_t := B_t^{(1)} \cdot B_t^{(2)}$. Überprüfen Sie, ob $(X_t : t \geq 0)$ ein Martingal bzgl. $(\mathfrak{A}_t : t \geq 0)$ ist.

Aufgabe 28: Es sei $(B_t : t \geq 0)$ eine Brown'sche Bewegung und $(\mathfrak{A}_t : t \geq 0)$ die kanonische Filtration. Für $t \geq 0$ sei $M_t := B_t^2 - t$. Zeigen Sie, daß $(M_t : t \geq 0)$ ein Martingal bzgl. $(\mathfrak{A}_t : t \geq 0)$ ist.

Aufgabe 29: Beweisen Sie mit Hilfe der Definition des Ito-Integrals, daß

$$\int_0^t s \, dB_s = tB_t - \int_0^t B_s \, ds$$

gilt. (*Hinweis:* Abelsche partielle Summantion [Heuser/Analysis 1], Seite 91.)

Abgabe: Donnerstag, den 20.01.2011