Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Lehrstuhl für Datenverarbeitung
Hannes Diener

Lineare Algebra für Informatiker

Probeklausur

30. Mai 2012

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie das multiplikative Inverse auch in dieser Form.

$$\text{(a)} \quad -\frac{1}{i} \qquad \text{(b)} \quad \frac{2}{i} + \frac{i}{1}$$

(c) Finden Sie außerdem alle x, die die folgende Gleichung lösen

$$\frac{1+x}{1-x} = i \ .$$

Lösung Da $(-i)(-\frac{1}{i}) = \frac{i}{i} = 1$, ist $-i$ das gesucht Inverse.
Vereinfachen wir diesen Term erhalten wir $\frac{1}{i}$, also ist i das Inverse.
Nach Umformung erhalten wir $x(1 + i) = i - 1$. Da das Inverse zu $(1 + i)$ gleich $(1 - i)/2$ ist gilt $x = (i - 1)(1 - i)/2$ dies können wir noch zu

$$x = \frac{i - 1 + 1 + i}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

vereinfachen.

Aufgabe 2 [8 Punkte]

Seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ gegeben durch $f(X) = 5X^4 + 6X^2 + 3X - 10$ und $g(X) = 5X + 2$

Finden Sie, mit Hilfe des Verfahren des Beweises von Satz 3.7 Polynome q und r, so daß

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \deg r < \deg g \ .$$

Lösung Wie in der Übung.

Aufgabe 3 [8 Punkte]

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit dem Verfahren von Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Lösung Durchgaussen wir das Ganze erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eine allgemeine Lösung ist also $x_4 = 1$, $x_3 = \lambda$, $x_2 = 3 - 2 - 2\lambda = 1 - 2\lambda$ und $x_1 = 6 - 4 - 3\lambda - 2(1 - 2\lambda) = 2 - 3\lambda - 2(1 - 2\lambda) = \lambda$.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Beweisen oder widerlegen Sie:
Für Matrizen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $n \geqslant 2$ gilt

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \ .$$

Lösung Falsch, gilt genau dann wenn $AB = BA$. Jedes Gegenbeispiel für $AB = BA$ ist ein Gegenbeispiel der Aussage.

Aufgabe 5 [10 Punkte]

- Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear unabhängige Vektoren in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, daß dann auch $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_2 - v_3$ and $w_3 = v_3 + v_1$ linear unabhängig sind.
- Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ beliebeige Vektoren in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, daß $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_2 - v_3$ and $w_3 = v_1 - v_3$ immer linear abhängig sind.

Lösung Sei $0 = k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3$. Dann, nach Einsetzen:

$$0 = k_1(v_1 - v_2) + k_2(v_2 - v_3) + k_3(v_3 + v_1)$$

oder umgeformt

$$0 = (k_1 + k_3)v_1 + (k_2 - k_1)v_2 + (k_3 - k_2)v_3 \ .$$

Da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig gilt also $k_1 = -k_3$, $k_2 = k_1$ und $k_3 = k_2$. Die einzige Lösung hierfür ist $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.
Da $w_1 + w_2 - w_3 = 0$ gilt kann die immer die Null als nicht-triviale Linearkombination gebildet werden.

Aufgabe 6 [10 Punkte]

Seien U_1, U_2 Unterräume eines K-Vektorraumes V. Beweisen oder widerlegen Sie:

- $U_1 \cap U_2$ ist ebenfalls Unterraum.
- $U_1 \cup U_2$ ist ebenfalls Unterraum.
- $U_1 \backslash U_2$ ist ebenfalls Unterraum.

Lösung

- Sei $u, v \in U_1 \cap U_2$, und $k \in K$. Dann ist insbesondere $u, v \in U_1$ und $u, v \in U_2$. Also auch $u + v \in U_1$ und $u + v \in U_2$. Zusammen $u + v \in U_1 \cap U_2$. Genauso ist auch $ku \in U_1$ und $k_u \in U_2$ und also $ku \in U_1 \cap U_2$.
- Falsch. Sei z.B. $V = \mathbb{R}^2$ und $U_i = \langle e_i \rangle$. Dann ist $U_1 \cup U_2$ nicht Unterraum, da zwar $e_1 \in U_1$ und $e_2 \in U_2$, also $e_1, e_2 \in U_1 \cup U_2$ aber $e_1 + e_2$ weder in U_1 noch in U_2 ist, also $e_1 + e_2 \notin U_1 \cup U_2$.
- Da auf alle Fälle $0 \in U_2$ ist ist $0 \notin U_1 \backslash U_2$, was ein Widerspruch ist. (Konkretes Beispiel: $V = U_1 = U_2$).

Aufgabe 7 [10 Punkte]

Sei V der Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume? (Ohne Beweis)

(a) $M_1 = \{f \in V \mid f(1) = f(-1)\}$

(b) $M_2 = \{f \in V \mid f(0) \cdot f(1) = 0\}$

(c) $M_3 = \{f \in V \mid f(0) = 1\}$

Lösung

(a) Ja

(b) Nein. Z.B. ist für $f(x) = x$ und $g(x) = 1 - x$ beide $f, g \in V$, aber $f + g = 1 \notin V$.

(c) Nein. Z.B. ist $f \in V$ für $f(x) = 1$, aber $f + f$ die konstante 2 Funktion, also $f + f \notin V$.

Zusatzaufgabe (Benötigt Wissen aus der Analysis).
Sei V der Vektorraum aller differenzierteren Funktion $[0, 1] \to \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie welche der folgenden Abbildungen linear sind.

(a) $\varphi_1 : V \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi_1(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

(b) $\varphi_2 : V \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi_2(f) = f'(0)$.

(c) $\varphi_3 : V \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi_3(f) = f(0) + f(1)$.