Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Hannes Diener

UNIVERSITÄT SIEGEN

Lineare Algebra für Informatiker

Probeklausur 2

11.Juli 2012

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Seien $s_1, \ldots, s_4$ die Spalten. Wie man sieht ist s_3 Linearkombination der ersten beiden: $s_3 = s_1 + s_2$. Allerdings sind s_1, s_2, s_4 linear unabhängig: Sei k_1, k_2, k_4 so daß

$$0 = k_1 s_1 + k_2 s_2 + k_4 s_4 \ .$$

Aus der zweiten Zeile folgt dann $-k_1 = 0$, also $k_1 = 0$. Eingesetzt in die erste Zeile ist dann $4k_2 = 0$, also $k_2 = 0$. Letztlich in die 4. Zeile eingesetzt erhalten wir $k_4 = 0$.
Insgesamt ist der Rang also 3 (maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten).

Aufgabe 2 [6 Punkte]

Bestimmen Sie, mit Hilfe des Dimensionssatz $\dim \operatorname{Ke} \varphi$ für

(a) $\varphi : K^6 \to K^3$, mit φ surjektiv,

(b) $\varphi : K^4 \to K^7$, mit $\dim \operatorname{Bi} \varphi = 3$,

(c) $\varphi : M(2 \times 2, K) \to M(2 \times 2, K)$, mit $\dim \operatorname{Bi} \varphi = 1$.

Lösung:

(a) Da φ surjektiv ist, ist $\dim \operatorname{Bi} \varphi = 3$. Also ist $\dim \operatorname{Ke} \varphi = 3$.

(b) Wie oben, $\dim \operatorname{Ke} \varphi = 1$.

(c) Da $\dim M(2 \times 2, K) = 4$, ist $\dim \operatorname{Ke} \varphi = 4 - 1 = 3$.

Aufgabe 3 [8 Punkte]

Bestimmen Sie mit Hilfe der Determinante, für welche $k \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

invertierbar ist.

Lösung: Zur Berechnung der Determinante entwickeln wir nach der zweiten Zeile (viele Nullen) und verwenden dann die Regel von Sarrus.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} k & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= k + k^2 = k(1+k) \end{aligned}$$

Da für $k \neq 0, -1$ dieser Ausdruck nicht null ist, ist die Matrix für diese Werte invertierbar.

Aufgabe 4 [8 Punkte]

Finden Sie das Inverse zu folgender Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Verwenden wir das Standardverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist das Inverse

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5 [6 Punkte]

Seien A, B und S $n \times n$-Matrizen, mit S invertierbar und

$$A = S^{-1}BS\ .$$

Begründen Sie ausführlich, warum $\det(A) = \det(B)$.

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, daß $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ist und $\det(A)^{-1} = \det(A^{-1})$. Also gilt

$$\det(A) = \det(S^{-1}BS) = \det(S^{-1})\det(B)\det(S) = \det(S)^{-1}\det(B)\det(S) = \det(B) \ .$$

Für den letzten Schritt beachten wir, daß die Multiplikation in Körpern kommutativ ist.

Aufgabe 6 [9 Punkte]

Zeigen Sie:

(a) Ist $A \in M(n \times n, K)$ eine invertierbar Matrix und $k \in K$ mit $k \neq 0$, so ist auch kA invertierbar.

(b) Ist $A^2 = 0$, so sind auch $I_n - A$ und $I_n + A$ invertierbar.

Geben Sie ausserdem ein Beispiel an, das zeigt, daß die folgende Aussage falsch ist:

(c) Sind $A, B \in M(n \times n, K)$ invertierbar, so ist auch $A + B$ invertierbar.

Lösung:

(a) Da A^{-1} und k^{-1} existieren ist:

$$(kA)(k^{-1}A^{-1}) = kk^{-1}AA^{-1} = 1I = I \ .$$

Ebenso

$$(k^{-1}A^{-1})(kA) = k^{-1}kA^{-1}A = 1I = I \ .$$

Also ist kA invertierbar nach Definition.

(b) Es gilt $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A + A - A^2 = I_n$. Genauso anderstherum. Also ist $I_n - A$ und $I_n + A$ invertierbar (sogar gegenseitig das Inverse).

(c) Sei $A = I_n$ und $B = -I_n$. Dann ist $A^2 = B^2 = I_n$, also beide invertierbar. Aber $A + B = 0$. Da für alle $n \times n$ Matrizen C gilt $0C = 0 = C0$, kann es kein Inverses zu 0 bzw. C geben.

Aufgabe 7 [12 Punkte]

Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sind $v_1, \dots, v_n$ Eigenvektoren mit dem gleichem Eigenwert k, so ist jeder nicht-triviale Vektor aus $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ein Eigenvektor zum Eigenwert k.

(b) Ist v ein Eigenvektor mit Eigenwert k und w einer mit Eigenwert ℓ, so ist $v + w$ Eigenvektor mit Eigenwert $k + \ell$.

(c) Ist v ein Eigenvektor von φ und gleichzeitig auch Eigenvektor von $\psi : W \to U$, so ist v auch Eigenvektor von $\psi \circ \varphi$.

(d) Ist k ein Eigenwert von φ und gleichzeitig auch Eigenwert von $\psi : W \to U$, so ist k auch Eigenwert von $\psi \circ \varphi$.

Lösung:

(a) Sei $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Also existieren $k_1, \ldots, k_n$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \ .$$

Dann ist aber, da φ linear ist

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i k v_i = k\left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i\right) = kv \ .$$

D.h. v ist Eigenvektor zum Eigenwert k.

(b) Ist Schmarrn. Z.b. ist zu I_3 nur 1 Eigenwert, aber mit jedem Vektor als Eigenvektor. Aber $e_1 + e_2$ hat nicht den Eigenwert $1 + 1 = 2$.

(c) Stimmt. Sei v Eigenvektor von φ zum Eigenwert k und von ψ zum Eigenwert ℓ. Dann ist

$$\psi(\varphi(v)) = \psi(kv) = k\psi(v) = k\ell v \ .$$

D.h. v ist Eigenvektor von $\psi \circ \varphi$ (mit Eigenwert $k\ell$).

(d) Falsch. Sei z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann hat φ_A und φ_B den Eigenwert 1 (und 0, aber das ist egal) (und zum Eigenvektor e_1 bzw. e_2, aber auch das ist hier nicht wichtig). Aber $\varphi_B \circ \varphi_A = \varphi_{BA} = \varphi_0 = 0$. D.h. die verknüpfte Abbildung hat nur den Eigenwert 0, aber nicht 1.

Aufgabe 8 [10 Punkte]

Finden Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrix in $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ und bestimmen sie zu jedem Eigenwert *einen* Eigenvektor.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist:

$$\begin{aligned} \det(A - kI) &= (1-k)(2-k)(1-k) + 0 + 0 - 0 - (1-k) - (1-k) \\ &= (1-k)^2(2-k) - 2(1-k) = (1-k)\left((1-k)(2-k) - 2\right) \\ &= (1-k)(k^2 - 3k) = (1-k)k(k-3) \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte $0, 1, 3$.