Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Mathematische Logik und
Theoretische Informatik
Hannes Diener

Lineare Algebra für Informatiker, SS12

Übungsblatt **2**, Musterlösungen werden in den Übungen am 25. April vorgestellt

---

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß für alle komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$

(b) $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

Aufgabe 2. Berechnen Sie $\Re(z)$, $\Im(z)$ und $|z|$ jeweils von:

(a) $z = \frac{1}{a+i}$, $a \in \mathbb{R}$

(b) $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$

(c) $z = (1+i)^4$

Aufgabe 3. Seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ gegeben durch $f(X) = 5X^4 + 6X^2 + 3X - 10$ und $g(X) = 5X + 2$

Finden Sie, mit Hilfe des Verfahren des Beweises von Satz 3.7 Polynome q und r, so daß

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \deg r < \deg g \ .$$

Anspruchsvollere (optionale) Variante: die gleiche Aufgabe, aber mit $\mathbb{Z}_7$ an Stelle von $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4. Die *Charakteristik* $\mathrm{char}(R)$ eines Rings $(R, +, \cdot)$ ist die kleinste natürliche Zahl n, so daß

$$\underbrace{1_R + \cdots + 1_R}_{n \text{ mal}} = 0_R$$

ist, sofern eine solche Zahl existiert. Existiert keine solche Zahl sagt man, daß der Ring Charakteristik 0 hat.[1]
Sei R ein nullteilerfreier Ring mit $n = \mathrm{char}(R) > 0$. Zeigen Sie, daß n eine Primzahl sein muss.

Tipp: Nehmen wir an n ist keine Primzahl, es gibt also p, q mit $1 < p, q < n$ und $n = pq$. Betrachten wir nun das Element

$$\underbrace{(1_R + \cdots + 1_R)}_{p \text{ mal}} \cdot \underbrace{(1_R + \cdots + 1_R)}_{q \text{ mal}}$$

näher.

Zusatzaufgabe 5. Besitzt $\mathbb{Q}$ einen echten Unterkörper? D.h. gibt es eine echte Teilmenge $K \subset \mathbb{Q}$, die mit der gleichen Addition und Multiplikation wie in $\mathbb{Q}$ ein Körper ist?

ENDE

[1] Im letzten Übungsblatt haben wir gesehen, daß ein endlicher Körper nie Charakteristik null hat.