Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Mathematische Logik und
Theoretische Informatik
Hannes Diener

Lineare Algebra für Informatiker, SS12

Übungsblatt **3**, Musterlösungen werden in den Übungen am 2. Mai vorgestellt

---

Aufgabe 1. Sei R ein Ring. Zeigen Sie (teilweise), daß auch $R[X]$ mit denen in der Vorlesung definierten Verknüpfungen $+, \cdot$ ein kommutativer Ring ist.

(a) Zeigen Sie, daß die Addition und die Multiplikation ein neutrales Element besitzt.

(b) Zeigen Sie, daß das Distributivitätsgesetz gilt.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von Lemma 3.6, daß wenn R nullteilerfrei ist, dann auch $R[X]$.

Aufgabe 2. Finden Sie über $\mathbb{Z}_4$ ein Polynom h mit $\deg h > 1$, so daß $h \cdot h = 1$ gilt.
Warum widerspricht dies nicht Lemma 3.6?

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $x_0, \ldots, x_n \in K$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Konstruieren Sie ein Polynom $g \in K[X]$, so daß

$$g(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i > 0 \\ 1 & \text{falls } i = 0\ . \end{cases}$$

Aufgabe 4. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ mit dem Verfahren von Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 17 & 8 & 1 & -3 \\ 3 & -7 & 8 & -1 & -1 & 14 \\ -2 & 7 & -1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -7 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

Zusatzaufgabe 5. Sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie, daß auf der Menge $K[X] \times (K[X] \backslash 0)$ durch

$$(g,h) \sim (g',h') \iff gh' = g'h$$

eine Äquivalenzrelation gegeben ist.
Die Menge der Äquivalenzklassen sei mit $K(X)$ bezeichnet. Für die Äquivalenzklasse mit Repräsentanten (g,h) wollen wir auch $\frac{g}{h}$ schreiben (reine Notation!!).

(b) Zeigen Sie, daß in $K(X)$ die Verknüpfungen

$$\frac{g}{h} + \frac{g'}{h'} = \frac{gh' + hg'}{hh'}, \quad \frac{g}{h} \cdot \frac{g'}{h'} = \frac{gg'}{hh'}$$

wohldefiniert sind.

(c) Zeigen Sie schließlich, daß $K(X)$ mit diesen Verknüpfungen ein Körper ist.

ENDE