Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Mathematische Logik und
Theoretische Informatik
Hannes Diener

# Lineare Algebra für Informatiker, SS12

Übungsblatt **4**, Musterlösungen werden in den Übungen am 9. Mai vorgestellt

---

**Aufgabe 1.** Seien $a, b, c, d \in K$ Elemente eines beliebigen Körpers. Zeigen Sie, daß wenn $ad - bc \neq 0$, dann können wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeichenumformungen in $I_2$ umwandeln.
(Hinweis: Behandeln Sie zuerst den Fall das $a \neq 0$ ist. In dem Fall das $a = 0$ folgt, daß weder $b$ noch $c$ null sein können.)
Was bedeutet das für das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$?

---

**Aufgabe 2.** Schreiben Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ in Matrizenform und lösen Sie diese mit dem Verfahren von Gauss.

(a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

---

**Aufgabe 3.** Betrachten Sie die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Matrizen, sofern das Produkt definiert ist

(a) $2D + E$

(b) $(CD)E$

(c) $AC + B$

(d) $D(B + E)$

(e) $B(D + E)$

(f) $BC + A$

---

**Aufgabe 4.** Seien $A, B, C, D, E$ Matrizen, wobei $A$ die Größe $2 \times 3$ und $E$ die Größe $5 \times 7$ hat. Welche Größen müssen $B, C, D$ haben, damit der Term

$$(A + B)C + DE$$

definiert ist?

---

**Aufgabe 5.** (a) Finden Sie eine $2 \times 2$ Matrix $A$ so daß

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) Warum kann es über $\mathbb{R}$ keine Matrix $A$ geben, so daß

$$AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

---

**Zusatzaufgabe 6.** In welchen Ringen $R$ ist die Aussage aus Aufgabe 5.b wahr, wenn wir $\mathbb{R}$ durch $R$ ersetzen?

ENDE