Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Mathematische Logik und
Theoretische Informatik
Hannes Diener

# Lineare Algebra für Informatiker, SS12

Übungsblatt **5**, Musterlösungen werden in den Übungen am 16. Mai vorgestellt

---

**Aufgabe 1.** Beweisen oder widerlegen Sie:
Für Matrizen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $n \geqslant 2$ gilt

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \ .$$

---

**Aufgabe 2.** Sei $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, die Vektorraumaxiome V2-V8 für $K^n$

---

**Aufgabe 3.**

- Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum. Zeigen Sie, daß dann auch $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_2 - v_3$ and $w_3 = v_3 + v_1$ linear unabhängig sind.
- Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ beliebeige Vektoren in einem Vektorraum. Zeigen Sie, daß $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_2 - v_3$ and $w_3 = v_1 - v_3$ immer linear abhängig sind.

---

**Aufgabe 4.** Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{[0,1]}$ (der $\mathbb{R}$ Vektorraum aller Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$).

(a) $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$

(b) $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$

(c) $\{\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \in \mathbb{R}[X]\}$

(d) $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$

(e) $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{es gibt } x \in [0,1] \text{ mit } f(x) = 0\}$

---

**Aufgabe 5.** Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: Ist $U$ ein Unterraum eines Vektorraumes $V$, dann gilt für alle $u, u' \in V$

- $u, u' \notin U \implies u + u' \notin U$
- $u, u' \notin U \implies u + u' \in U$
- $u \notin U, u' \in U \implies u + u' \notin U$

---

**Zusatzaufgabe 6.** Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Sei $X$ eine beliebige Menge. Zeigen Sie, daß die Menge aller Teilmengen von $X$ zusammen mit $+ : \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)^2$ und $\cdot : \mathbb{F}_2 \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)^2$ definiert durch

$$Y + Z = Y \vartriangle Z \quad (= (Y \cup Z) \backslash (Y \cap Z))$$

und

$$0 \cdot Y = \varnothing \quad \text{und} \quad 1 \cdot Y = Y$$

ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum ist.

ENDE