Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Mathematische Logik und
Theoretische Informatik
Hannes Diener

UNIVERSITÄT SIEGEN

Lineare Algebra für Informatiker, SS12

Übungsblatt **6**, Musterlösungen werden in den Übungen am 23. Mai vorgestellt

---

Aufgabe 1. Geben Sie ein Beispiel an das zeigt, daß wenn U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraums V sind, dann $U_1 \cup U_2$ nicht wieder Unterraum sein muss.

Aufgabe 2. Beweisen Sie die Äquivalenz Satz 5.24: (1) $\iff$ (3).

Aufgabe 3. Seien in K^∞ Vektoren definiert durch $f_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $f_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $f_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$ usw.
Ist $B = \{f_1, f_2, \dots\}$ Basis? (Linear unabhängig? Erzeugendensystem?)

Aufgabe 4. Sei $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$ (also der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Bezeichne für $a \in \mathbb{R}$, f_a die Funktion definiert durch $f_a(x) = x + a$.

- Zeigen Sie, daß für $a \neq b$ die Funktionen f_a und f_b linear unabhängig sind.
- Zeigen Sie, daß jedoch für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Funktionen f_a, f_b, f_c linear abhängig sind.
- Heißt das, daß $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ Dimension 2 besitzt?

Aufgabe 5. Zum Austauschlemma:

(a) Zeigen Sie, daß $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0, 0)$ und $v_4 = (1, 0, 0, 0)$ Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.

(b) Welche der Vektoren in dieser Basis lassen sich durch den Vektor $w = (0, 0, 1, 0)$ ersetzen, wenn wir die Eigenschaft Basis zu sein nicht verlieren wollen?

Aufgabe 6. Finden Sie drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, so daß zwar je zwei linear unabhängig sind, nicht aber alle drei.

(Schwerere Aufgabe: Finden Sie abzählbar viele Vektoren die nicht linear unabhängig sind, aber von denen je zwei linear unabhängig sind).

Zusatzaufgabe 7. Zeigen Sie, daß $\{\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \in \mathbb{R}[X]\}$ keine Basis des $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist.

ENDE