Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Mathematische Logik und
Theoretische Informatik
Hannes Diener

Lineare Algebra für Informatiker, SS12

Übungsblatt **7**, Musterlösungen werden in den Übungen am 6. Juni vorgestellt

---

Aufgabe 1. Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume, $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung, und $M \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Beweisen oder widerlegen Sie

$$\langle \varphi(M) \rangle = \varphi(\langle M \rangle) \ .$$

Aufgabe 2. Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W linear ist.

(a) $K = \mathbb{Q}, V = \mathbb{Q}, W = \mathbb{Q}, \varphi : x \mapsto 2x + 1$

(b) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}, \varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$

(c) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, W = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \varphi : f \mapsto f + f$

(d) $K = \mathbb{R}, V = M(2 \times 3, \mathbb{R}), W = M(1 \times 3, \mathbb{R}), \varphi : A \mapsto (1, 2)A$

(e) $K = \mathbb{R}, V = W = M(2 \times 2, \mathbb{R}), \varphi : A \mapsto A^2 = AA$

Aufgabe 3. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass es genau dann eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ von mit $\mathrm{Bi}(\varphi) = \mathrm{Ke}(\varphi)$ gibt, wenn n gerade ist.

Aufgabe 4. Es seien U, V, W drei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Weiter seien $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen, so daß $\psi \circ \varphi : U \to W$ ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie

$$V = \mathrm{Bi}(\varphi) \oplus \mathrm{Ke}(\psi) \ .$$

ENDE