Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Mathematische Logik und
Theoretische Informatik
Hannes Diener

Lineare Algebra für Informatiker, SS13

Übungsblatt **1**

Aufgabe 1. In der Vorlesung wurde der Körper der komplexen Zahlen eingeführt. Die Grundmenge war $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, also die Menge aller Paare von reellen Zahlen. Ausserdem war die Addition $+_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ punkteweise definiert durch $(a, b) +_{\mathbb{C}} (c, d) \mapsto (a + c, b + d)$ und die Multiplikation durch $\cdot_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$(a, b) \cdot_{\mathbb{C}} (c, d) \mapsto (ac - bd, ad + bc) \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Multiplikation assoziativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Distributivgesetz gilt.

Aufgabe 2. Bei der Definition der komplexen Zahlen wurde der bekannte Körper $\mathbb{R}$ auf einen Körper mit der Grundmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ erweitert. Es gibt noch weitere Möglichkeiten, Körper auf ähnliche Weise zu erweitern. So zum Beispiel die Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ um $\sqrt{2}$, die mit $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ bezeichnet wird. Hierzu nimmt man als Grundmenge $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit der Addition $(a, b) +_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]} (c, d) = (a + c, b + d)$ und der Multiplikation $(a, b) \cdot_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]} (c, d) = (ac + 2bd, ad + bc)$.
Zeigen Sie:

(a) $(0, 1)^2 = (2, 0)$

(b) $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ bildet mit oben beschriebenen Verknüpfungen einen Körper.

(c) **Zusatz:** Es existiert kein $a \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ mit $a^2 = (3, 0)$.

Aufgabe 3. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$, mit $a, b \in \mathbb{R}$

(a) $\frac{2}{i}$

(b) $\frac{2}{i} + \frac{i}{2}$

(c) $\frac{2+3i}{1+4i}$

(d) i^n für alle $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 4. Berechnen Sie für die folgenden komplexen Zahlen $\Re(z)$, $\Im(z)$, $\bar{z}$, $\frac{1}{z}$ und z^2 :

(a) $z = 1 + i$

(b) $z = -3$

(c) $z = 2i$

(d) $z = 3 + 4i$

Aufgabe 5. Für $z = 1 - i$ und $w = 1 + i$ berechnen Sie $z \cdot w$ und $\frac{w}{z}$. Zeichnen Sie $z, w, z \cdot w$ und $\frac{w}{z}$ in der Gaußschen Zahlenebene ein. Welche Beziehungen gelten für die Winkel der 4 Zahlen?

Aufgabe 6. Skizzieren Sie folgende Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:

(a) $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

(b) $\{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) + \Re(z) \geqslant 0 \}$

(c) $\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z} \}$

Aufgabe 7. Betrachten wir den Körper $\mathbb{F}_5$, also mit vereinfachter Schreibweise den Körper mit der Grundmenge $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ und den Verknüpfungen

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

und

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

(a) Finden Sie $a \in \mathbb{N}$ und $b, c \in \mathbb{F}_5$, so dass $ab = ac$, aber $b \neq c$ ist. Warum ist dies kein Widerspruch zu Lemma 1.4.9.5 im Skript?

(b) Finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}_5$ mit $a^2 = b^2$ und $a \neq b$. Woher ist Ihnen diese Eigenschaft bekannt?

(c) Besitzt in diesem Körper die Gleichung

$$x^2 = -1$$

eine Lösung?
(Tipp: Überlegen Sie sich zuerst, was -1, also das additive Inverse zu 1 in diesem Körper ist.)
Hat in diesem Körper die Gleichung

$$x^2 - 3 = 0$$

eine Lösung?

Aufgabe 8. Begründen Sie, warum die folgenden Mengen mit den üblichen Verknüpfungen keine Körper sind:

(a) $\mathbb{Z}$

(b) $\mathbb{Z}_4$

(c) $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$

Hinweis: Zusatzaufgaben sind anspruchsvoller als andere Aufgaben. Ihre Bearbeitung ist optional, wird aber sehr empfohlen.

Zusatzaufgabe 9. Zeigen Sie, dass, wenn K ein endlicher Körper ist, dann gibt es eine natürliche Zahl n, so dass

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}} = 0$$

ist.

Zusatzaufgabe 10. Konstruieren Sie einen Körper mit vier Elementen. (Natürlich ohne die Lösung in Beutelspacher nachzulesen.)

ENDE