

Lineare Algebra für Informatiker, SS13

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für alle komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

(b) $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Aufgabe 2. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$:

(a) $z^2 + 1 = 0$

(b) $2z^2 + 3z + 5 = 0$

(c) $z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$

(d) $z^4 - 1 = 0$

Aufgabe 3. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt die als Eulersche Formel bekannte Gleichung

$$e^{ix} = \sin(x) + i \cos(x).$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Gleichung die nach einer Abstimmung unter Mathematikern schönste Formel der Mathematik

$$e^{i\pi} = -1.$$

Diese Formel gilt als besonders schön, da sie (insbesondere umgeschrieben zu $e^{i\pi} + 1 = 0$) die fünf fundamentalen Konstanten der Mathematik in einer erstaunlich einfachen Formel vereint.

Zeigen Sie außerdem, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ $|e^{ix}| = 1$ gilt.

Aufgabe 4. Seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ gegeben durch $f(X) = 5X^4 + 6X^2 + 3X - 10$ und $g(X) = 5X + 2$

Finden Sie, mit Hilfe des Verfahrens aus der Vorlesung Polynome q und r , so dass

$$f = qg + r \quad \text{und} \quad \deg r < \deg g.$$

Aufgabe 5. Sei R ein Ring, M eine beliebige nichtleere Menge und $S = \text{Abb}(M, R)$ die Menge aller Abbildungen von M nach R . Wir definieren $+$ und $\cdot$ auf S durch

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), \quad (f \cdot g)(m) = f(m) \cdot g(m).$$

- (a) Zeigen Sie, dass S ein Ring ist.
 - (b) Ist S ein Körper, wenn R ein Körper ist?
-

Aufgabe 6. Die *Charakteristik* $\text{char}(R)$ eines Rings $(R, +, \cdot)$ ist die kleinste natürliche Zahl n , so dass

$$\underbrace{1_R + \cdots + 1_R}_{n \text{ mal}} = 0_R$$

ist, sofern eine solche Zahl existiert. Existiert keine solche Zahl, sagt man, dass der Ring Charakteristik 0 hat.¹

Sei R ein nullteilerfreier Ring mit $n = \text{char}(R) > 0$. Zeigen Sie, dass n eine Primzahl sein muss.

Tipp: Nehmen wir an n ist keine Primzahl, es gibt also p, q mit $1 < p, q < n$ und $n = pq$. Betrachten wir nun das Element

$$\underbrace{(1_R + \cdots + 1_R)}_{p \text{ mal}} \cdot \underbrace{(1_R + \cdots + 1_R)}_{q \text{ mal}}$$

näher.

Aufgabe 7. Ist R ein Ring und für $a \in R$ mit $a \neq 0$ existiert ein $b \in R$ mit $b \neq 0$ und $a \cdot b = 0$, so heißt a Nullteiler. Besitzt ein Ring keine Nullteiler, so heißt er nullteilerfrei. Zeigen Sie:

- (a) Jeder Körper ist nullteilerfrei.
 - (b) Ist R ein kommutativer Ring, so ist der Polynomring $R[x]$ ebenfalls kommutativ.
-

Zusatzaufgabe 8.

- (a) Bestimmen Sie alle Nullteiler von $\mathbb{Z}_6$.
 - (b) Lösen Sie die Gleichung $3x^2 + 3x = 0$ in $\mathbb{Z}_6$.
-

¹Im letzten Übungsblatt haben wir gesehen, dass ein endlicher Körper nie Charakteristik 0 hat.

Zusatzaufgabe 9. Besitzt $\mathbb{Q}$ einen echten Unterkörper? D.h. gibt es eine echte Teilmenge $K \subset \mathbb{Q}$, die mit der gleichen Addition und Multiplikation wie in $\mathbb{Q}$ ein Körper ist?

Zusatzaufgabe 10. Diese Aufgabe richtet sich hauptsächlich an Studenten, die im vergangenen Semester DMI gehört haben. In dieser Vorlesung haben Sie den euklidischen Algorithmus kennengelernt, der dazu dient, den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen zu berechnen. Die Idee des ggT lässt sich auch auf Polynome übertragen. Gesucht wird hierbei das "größte" gemeinsame Polynom h , welches zwei vorgegebene Polynome f und g teilt. Die Größe bezieht sich hierbei auf den Rang des Polynoms. Das Prinzip des euklidischen Algorithmus lässt sich auf diesen Fall verallgemeinern. Berechnen Sie mit dessen Hilfe den ggT von $f = x^4 + x^3 + x + 1$ und $g = x^2 - 1$.

ENDE