Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Mathematische Logik und
Theoretische Informatik
Hannes Diener

Lineare Algebra für Informatiker, SS13

Übungsblatt **3**

Aufgabe 1. Finden Sie über $\mathbb{Z}_4$ ein Polynom h mit $\deg h > 1$, so dass $h \cdot h = 1$ gilt.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $x_0, \dots, x_n \in K$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Konstruieren Sie ein Polynom $g \in K[X]$, so dass

$$g(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i > 0 \\ 1 & \text{falls } i = 0 \ . \end{cases}$$

Aufgabe 3. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit dem Verfahren von Gauß über den angegebenen Körpern:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 17 & 8 & 1 & -3 \\ 3 & -7 & 8 & -1 & -1 & 14 \\ -2 & 7 & -1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -7 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

über $\mathbb{Q}$.

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

über $\mathbb{F}_2$ und über $\mathbb{F}_3$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie ,dass die Gleichung $\sqrt{2}p + \sqrt{3}q + r = 0$ mit $p, q, r \in \mathbb{Q}$ lediglich die Lösung $p = q = r = 0$ besitzt.

Tipp: Einmal umstellen und quadrieren.

Zusatzaufgabe 5. Wir betrachten $(\mathbb{R}[X])\,[F]$, also die Poynome über den Polynomen über $\mathbb{R}$. (Wir können dies tun, da wir wissen, dass die Polynome über einem Ring selbst wieder einen Ring bilden). Bestimmen Sie in diesem Ring eine Nullstelle von

$$F^2 + (-X^2 + X - 2)F + (-X^3 + X^2 - X + 1).$$

Tipp: Eine Nullstelle ist ein Polynom vom Grad 1.

ENDE