

Lineare Algebra für Informatiker, SS13

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Betrachten Sie die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Matrizen, sofern das Produkt definiert ist

- (a) $2D + E$
 - (b) $(CD)E$
 - (c) $AC + B$
 - (d) $D(B + E)$
 - (e) $B(D + E)$
 - (f) $BC + A$
-

Aufgabe 2. Berechnen Sie das folgende Produkt über $\mathbb{Z}_5$ und über $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3. Seien A, B, C, D, E Matrizen, wobei A die Größe 2×3 und E die Größe 5×7 hat. Welche Größen müssen B, C, D haben, damit der Term

$$(A + B)C + DE$$

definiert ist?

Aufgabe 4. (a) Finden Sie eine 2×2 Matrix A so daß

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) Warum kann es über $\mathbb{R}$ keine Matrix A geben, so daß

$$AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

Aufgabe 5. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie ein minimales $k \in \mathbb{N}$, so daß A^k die Nullmatrix über $\mathbb{R}$ ist und ein minimales $l \in \mathbb{N}$, so daß A^l die Nullmatrix über $\mathbb{Z}_4$ ist.

Aufgabe 6. Betrachten Sie die Rechnungen, um folgende Matrixprodukte zu bestimmen:

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Welche elementaren Zeilenumformungen würden, jeweils angewandt auf die rechte Matrix, das gleiche Ergebnis liefern?

Aufgabe 7.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen 3×3 - Matrizen mit den Einträgen 0 und 1 in Zeilenstufenform.

(b) Zusatz: Wieviele solcher $n \times m$ -Matrizen gibt es für feste n und m ?

Aufgabe 8. Seien die Einträge der $n \times n$ -Matrix A wie folgt gegeben:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = n - j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wieviele Zeilenvertauschungen werden benötigt, um aus A die Einheitsmatrix zu erzeugen? Zusatz: Bestimmen Sie unter Verwendung der Erkenntnisse aus Aufgabe 6 eine Matrix B , sodass $BA = E$ ist.

Zusatzaufgabe 9. Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie unter Verwendung der Erkenntnisse aus Aufgabe 6 eine Matrix B , sodass BA eine Matrix in Zeilenstufenform ist.

Zusatzaufgabe 10. In welchen Ringen R ist die Aussage aus Aufgabe 4.b wahr, wenn wir $\mathbb{R}$ durch R ersetzen?

ENDE