

Lineare Algebra für Informatiker, SS13
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Beweisen oder widerlegen Sie:

Für Matrizen $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $n \geq 2$ gilt

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, die Vektorraumaxiome V2-V8 für K^n

Aufgabe 3.

- Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum. Zeigen Sie, daß dann auch $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_2 - v_3$ and $w_3 = v_3 + v_1$ linear unabhängig sind.
- Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ beliebige Vektoren in einem Vektorraum. Zeigen Sie, daß $w_1 = v_1 - v_2$, $w_2 = v_2 - v_3$ and $w_3 = v_1 - v_3$ immer linear abhängig sind.

Aufgabe 4. Sei $V = \mathbb{R}^3$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren linear abhängig?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5. Stellen Sie w als Linearkombinationen von v_1, v_2 und v_3 dar.

(a)

$$w = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{[0,1]}$ (der $\mathbb{R}$ Vektorraum aller Funktionen $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$).

- (a) $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$
- (b) $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$
- (c) $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in \mathbb{R}[X]\}$
- (d) $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist differenzierbar}\}$
- (e) $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{es gibt } x \in [0, 1] \text{ mit } f(x) = 0\}$
- (f) $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x + 1)\}$

Aufgabe 7. Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: Ist U ein Unterraum eines Vektorraumes V , dann gilt für alle $u, u' \in V$

- $u, u' \notin U \implies u + u' \notin U$
- $u, u' \notin U \implies u + u' \in U$
- $u \notin U, u' \in U \implies u + u' \notin U$

Aufgabe 8. Wieviele Elemente besitzt der Vektorraum $\mathbb{Z}_p^n$?

Zusatzaufgabe 9. Beweisen oder widerlegen Sie:

Sind $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ und es existieren keine $a, b \in \mathbb{R}$ mit $av_1 + bv_2 = v_3$, so sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

Zusatzaufgabe 10. Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Sei X eine beliebige Menge. Zeigen Sie, daß die Menge aller Teilmengen von X zusammen mit $+$: $\mathcal{P}(X)^2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$ und $\cdot$: $\mathbb{F}_2 \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definiert durch

$$Y + Z = Y \triangle Z \quad (= (Y \cup Z) \setminus (Y \cap Z))$$

und

$$0 \cdot Y = \emptyset \quad \text{und} \quad 1 \cdot Y = Y$$

ein $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum ist.

ENDE