Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Mathematische Logik und
Theoretische Informatik
Hannes Diener

Lineare Algebra für Informatiker, SS13

Übungsblatt **6**

Aufgabe 1. Geben Sie ein Beispiel an das zeigt, daß wenn U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraums V sind, dann $U_1 \cup U_2$ nicht wieder Unterraum sein muss.

Aufgabe 2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(c) $\{x + y, y^2) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geqslant x_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3. Seien in K^∞ Vektoren definiert durch $f_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $f_2 = (0, 1, 0, \dots)$, $f_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$ usw.
Ist $B = \{f_1, f_2, \dots\}$ Basis? (Linear unabhängig? Erzeugendensystem?)

Aufgabe 4. Sei $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$ (also der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Bezeichne für $a \in \mathbb{R}$, f_a die Funktion definiert durch $f_a(x) = x + a$.

- Zeigen Sie, daß für $a \neq b$ die Funktionen f_a und f_b linear unabhängig sind.
- Zeigen Sie, daß jedoch für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Funktionen f_a, f_b, f_c linear abhängig sind.
- Heißt das, daß $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ Dimension 2 besitzt?

Aufgabe 5. Es sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Warum kann $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ auf den ersten Blick nicht Basis von $\mathbb{R}^3$ sein?

(b) Kann man einen Vektor aus $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ entfernen, so dass der Rest eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet?

(c) Welche Dimension besitzt $\langle\{v_1, v_2, v_3, v_4\}\rangle$?

Aufgabe 6. Zum Austauschlemma:

(a) Zeigen Sie, daß $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0, 0)$ und $v_4 = (1, 0, 0, 0)$ Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.

(b) Welche der Vektoren in dieser Basis lassen sich durch den Vektor $w = (0, 0, 1, 0)$ ersetzen, wenn wir die Eigenschaft Basis zu sein nicht verlieren wollen?

Aufgabe 7. Untersuchen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme der Form$Ax = b$ auf ihre Lösbarkeit. Welche Rückschlüsse können Sie von ihren Ergebnissen auf die Eigenschaften der Spaltenvektoren der Matrizen untereinander und zum Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ziehen?

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

(c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Aufgabe 8. Sei $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^n$. Bestimmen sie die Koordinaten für alle v_i $1 \leqslant i \leqslant n$ bezüglich dieser Basis.

Zusatzaufgabe 9.

Sei $B = \{v_1, v_2\}$ Basis von $\mathbb{R}^2$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Seien außerdem (a, b) die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich B und (c, d) die Koordinaten von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich B. Bestimmen Sie das Produnkt

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Zusatzaufgabe 10. Bestimmen Sie eine Basis von $\langle \{x^2, x^2 + x, x^2 + 1, x^2 + x + 1, x^7 + x^5\} \rangle \subseteq \mathbb{R}[x]$

ENDE