

Lineare Algebra für Informatiker, SS13

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Sind V und W Vektorräume, so ist

$$V \times W = (V \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times W).$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie ein Komplement zu $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 3. Die Menge P_3 aller Polynome vom Grad kleiner gleich 3 sind ein Untervektorraum des Vektorraumes aller Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ausserdem sind die Polynome $p_1 = (1 - x)^3$, $p_2 = 3x(1 - x)^2$, $p_3 = 3x^2(1 - x)$, und $p_4 = x^3$ sind eine Basis von P_3 . (Beide Tatsachen müssen nicht gezeigt werden). Berechnen Sie die Koordinaten von $q = x^2$ und $q' = x + 2x^2 + 3x^3$ bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Sind V und W Vektorräume, $\varphi : V \rightarrow W$ ein Isomorphismus und $V = U_1 \oplus U_2$, so ist $W = \varphi(U_1) \oplus \varphi(U_2)$.

Aufgabe 5. Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume, $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, und $M \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Beweisen oder widerlegen Sie

$$\langle \varphi(M) \rangle = \varphi(\langle M \rangle).$$

Aufgabe 6. Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Abbildung zwischen den K -Vektorräumen V und W linear ist.

(a) $K = \mathbb{Q}, V = \mathbb{Q}, W = \mathbb{Q}, \varphi : x \mapsto 2x + 1$

- (b) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}, \varphi : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$
 - (c) $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, W = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \varphi : f \mapsto f + f$
 - (d) $K = \mathbb{R}, V = M(2 \times 3, \mathbb{R}), W = M(1 \times 3, \mathbb{R}), \varphi : A \mapsto (1, 2)A$
 - (e) $K = \mathbb{R}, V = W = M(2 \times 2, \mathbb{R}), \varphi : A \mapsto A^2 = AA$
-

Zusatzaufgabe 7. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n -dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass es genau dann eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ von mit $\text{Bi}(\varphi) = \text{Ke}(\varphi)$ gibt, wenn n gerade ist.

Zusatzaufgabe 8. Es seien U, V, W drei $\mathbb{R}$ -Vektorräume. Weiter seien $\varphi : U \rightarrow V$ und $\psi : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen, so dass $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$ ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie

$$V = \text{Bi}(\varphi) \oplus \text{Ke}(\psi) .$$

ENDE