Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Mathematische Logik und
Theoretische Informatik
Hannes Diener

Lineare Algebra für Informatiker, SS13

Übungsblatt **8**

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \in M(n \times n, K)$ eine invertierbar Matrix und $k \in K$ mit $k \neq 0$, so ist auch kA invertierbar.

(b) Ist $A^2 = 0$, so sind auch $I_n - A$ und $I_n + A$ invertierbar.

Geben Sie ausserdem ein Beispiel an, das zeigt, daß die folgende Aussage falsch ist:

(c) Sind $A, B \in M(n \times n, K)$ invertierbar, so ist auch $A + B$ invertierbar.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Inversen der drei Typen von Elementarmatrizen und stellen Sie diese wieder als Elementarmatrizen dar.

Aufgabe 3. Seien $V = \mathbb{R}^2$, $\varphi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ lineare Abbildungen, B und C Basen von V und

$$M(\varphi, B, C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, M(\psi, C, B) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

.

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ mit $(a)_B = (1, 3)$ und $(b)_C = (4, 3)$. Bestimmen sie $(\varphi(a))_C$ und $(\psi(b))_B$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellung von $\psi \circ \varphi$ bezüglich B. Wie hängen ψ und φ zusammen?.

Aufgabe 4. Finden Sie das Inverse zu folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5. Sei $V = \mathbb{R}^3$, und

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

zwei Basen von V. Bestimmen Sie $M(\mathrm{id}, A, B)$.

Aufgabe 6. Sei V der Vektorraum der Polynome $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad $\leqslant 2$ mit der Basis $B = \{1, x, x^2\}$. Sei die Abbildung $\varphi : V \to V$ gegeben durch

$$\varphi(p(x)) = p(2x) + p(2) + p''(x) + \int_0^1 p(r)dr.$$

Zeigen Sie, dass φ linear ist und tatsächlich wieder nach V abbildet. Bestimmen Sie außerdem die Abbildungsmatrix von φ bezüglich B.

Zusatzaufgabe 7. Seien $A, B \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie, daß

$$A \sim B \iff \exists S, T \in M(n \times n, K) : S, T \text{ invertierbar und } AS = TB$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

Zusatzaufgabe 8. Sei $V = \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ der Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ mit der Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei außerdem $A \in V$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der Abbildungen $L : V \to V$ via $L(X) = AX$ und $R : V \to V$ via $R(X) = XA$ bezüglich der Basis B.

ENDE