Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Mathematische Logik und
Theoretische Informatik
Hannes Diener

Lineare Algebra für Informatiker, SS13

Übungsblatt **9**

Aufgabe 1. Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie mit Hilfe des Dimensionssatz $\dim \operatorname{Ke} \varphi$ für

(a) $\varphi : K^5 \to K^7$, mit $\dim \operatorname{Bi} \varphi = 3$,

(b) $\varphi : K^6 \to K^3$, mit φ surjektiv,

(c) $\varphi : M(2 \times 2, K) \to M(2 \times 2, K)$, mit $\dim \operatorname{Bi} \varphi = 3$.

Aufgabe 3. Zerlegen Sie die folgende Matrix in Elementarmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Zerlegen Sie die Matrizen aus Aufgabe 4 von Blatt 8 in Elementarmatrizen. Nutzen Sie dazu Ihre Schritte zur Berechnung der Inversen.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper.

(a) Finden Sie eine Abbildung $f : K^\infty \to K^\infty$, so dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist.

(b) Finden Sie eine Abbildung $g : K^\infty \to K^\infty$, so dass g surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Warum stehen diese Abbildungen nicht im Widerspruch zum Dimensionssatz?

Aufgabe 6. Bestimmen Sie Kern und Bild der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7. Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie auf sechs verschiedene Arten, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind.

Aufgabe 8. Beweisen Sie Satz 5.6.1 aus dem Skript.

Aufgabe 9. Geben Sie Matrizen mit den folgenden geometrischen Eigenschaften im $\mathbb{R}^2$ an:

(a) Eine Punktspiegelung am Ursprung.

(b) Eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 2./4. Quadranten.

(c) Eine Verdoppelung des x- und Halbierung des y-Werts.

Zusatzaufgabe 10. Zeigen Sie, dass im $\mathbb{R}^3$ jede Drehung um die x-Achse auch durch eine Kombination aus Drehungen um die y-Achse und die z-Achse dargestellt werden kann. Was bringt Ihnen diese Einsicht, wenn Sie ein Flugzeug fliegen, bei dem ein Ruder ausgefallen ist?

ENDE