Fachbereich 6 · Mathematik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dieter Spreen
F. Eisterlehner

UNIVERSITÄT SIEGEN

Komplexitätstheorie

Übungsblatt 0, Wintersemester 2007/08

Definition. (k–Band–Turingmaschine) Eine *k–Band–Turingmaschine* ist ein 8–Tupel

$$(\mathit{Ein}, \mathit{Aus}, A, a_0, \mathit{Speicher}, \mathit{Oper}, \mathsf{In}, \mathsf{Out}).$$

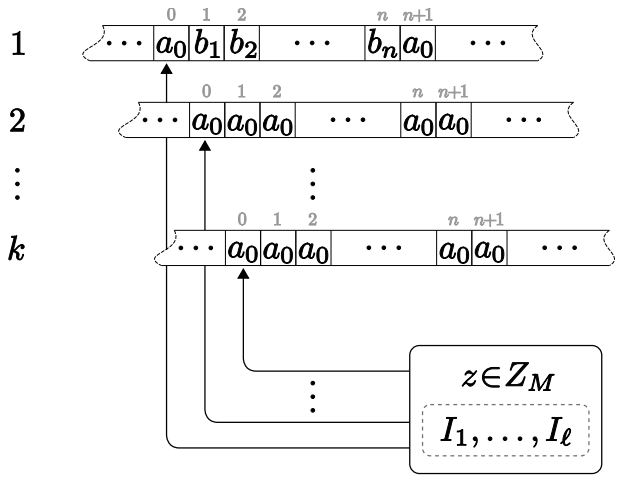
Dabei gilt:

- *Ein* ist das *Eingabealphabet*, *Aus* das *Ausgabealphabet* und A das *Bandalphabet*, wobei $\mathit{Ein}, \mathit{Aus} \subseteq A \setminus \{a_0\}$. Das ausgezeichnete Element $a_0 \in A$ heißt das *Blank-Symbol*.
- $\mathit{Speicher} = \{(z_1, \ldots, z_k, f_1, \ldots, f_k) \mid z_i \in \mathbb{Z}, f_i \colon \mathbb{Z} \to A \text{ mit } f_i(z) = a_0 \text{ für fast alle } z, 1 \leq i \leq k\}$
- $\mathit{Oper} = \{(o_1, \ldots, o_k) \mid o_i \in \{r, l\} \cup A, 1 \leq i \leq k\}$ mit $r, l \notin A$
- $\mathsf{In} \colon \mathit{Ein}^* \to \mathit{Speicher}$ ist die *Eingabefunktion*
- $\mathsf{Out} \colon \mathit{Speicher} \to \mathit{Aus}^*$

Ein *Programm $M = \{I_1, \ldots, I_\ell\}$ auf einer k–Band–Turingmaschine* ist eine endliche Menge von Instruktionen I_j der Form $I_j = (i, a, o, i')$ mit Zuständen $i \geq 2, i' \geq 0$, Bandsymbol $a \in A^k$ und Operation $o \in \mathit{Oper}^k$. Es bezeichnet Z_M die Menge der Zustände von M. Der Zustand 2 ist der *Startzustand* und $0, 1$ sind die *Endzustände* wobei 1 als „positiver Ausgang“ interpretiert wird

Stimmen keine zwei Instruktionen in den ersten beiden Komponenten überein, so ist M ein *deterministisches*, andernfalls ein *nichtdeterministisches* Turingprogramm.

(Siehe Definitionen 4.3.1–4.3.4 im Skript für eine genauere Darstellung inklusive der Semantik eines Turingprogramms).



Startkonfiguration einer k–Band–TM bei Eingabe $w = b_1 \dots b_n$

Aufgabe 1 (Grundlegende Operationen)

Für ein Alphabet Σ mit $B \notin \Sigma$ und für $k \geq 1$ sei $TM_k[\Sigma]$ eine k–Band–Turingmaschine mit Ein- und Ausgabealphabet Σ und Blank-Symbol B.

a) Sei Σ ein beliebiges, aber fest gewähltes Alphabet mit $\# \notin \Sigma$. Geben Sie ein Turingprogramm M_{copy} für $TM_1[\Sigma]$ an mit $f_{M_{\text{copy}}}(w) = w\#w$ für alle $w \in \Sigma^*$.

b) Sei Σ ein beliebiges, aber fest gewähltes Alphabet mit $\# \notin \Sigma$. Geben Sie ein Turingprogramm M_{search} für $TM_3[\Sigma']$ über einem geeignetem Alphabet Σ' an mit

$$f_{M_{\text{search}}}(u\#w) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{falls } u \text{ kein Teilwort von } w \text{ ist,} \\ uv_1, & \text{falls } w = v_0uv_1 \text{ und } v_0u \text{ das kürzeste Präfix von } w \text{ ist,} \\ & \text{welches } u \text{ als Teilwort enthält.} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Unterprogrammtechnik)

a) Sei M ein Programm auf einer 1–Band–Turingmaschine mit Ein- und Ausgabealphabet Σ und Blank-Symbol $B \notin \Sigma$. Konstruieren Sie aus M ein Programm M', das wie M arbeitet, jedoch mit Hilfe zweier *neuer Bandsymbole* $\triangleright$ und $\triangleleft$ stets den Anfang ($\triangleright$) und das Ende ($\triangleleft$) einer Bandinschrift markiert.

b) Seien M und M' zwei Programme auf einer 1–Band–Turingmaschine und $q, q'', q_{\text{ret}} \in Z_M$. Konstruieren Sie ein Programm N für eine 2–Band–Turingmaschine, welches auf Band 1 wie M arbeitet, bis auf folgende Änderungen:

- Im Zustand q ruft M auf Band 2 das Turingprogramm M' auf Eingabe $x \in \Sigma$ als *Unterprogramm* auf. Dabei ist x das längste, mit der aktuellen Kopfposition beginnende Σ-Wort auf Band 1.
- Wenn M' die Eingabe akzeptiert, so wird Band 2 gelöscht und M fährt auf Band 1 mit der Berechnung im Zustand q' fort. Wenn M' die Eingabe verwirft, so fährt M im Zustand q'' fort. Die Kopfposition auf Band 1 soll dabei in beiden Fällen dieselbe sein wie beim Aufruf von M'.

c) Welche Veränderungen sind notwendig, wenn x auf Band 1, das als Eingabe für das Unterprogramm M' diente, durch das Resultat $f_{M'}(x)$ von M' auf x *ersetzt* werden sol, um die Berechnung von M im Zustand q_{ret} fortzusetzen?

Aufgabe 3 (Guess and Check)

Sei Σ ein Alphabet. Konstruieren Sie ein *nichtdeterministisches* Programm M_{Ratewort} für eine 1–Band–Turingmaschine mit Ein- und Ausgabealphabet Σ, welches auf Eingabe $a^n \in \Sigma^n, n \geq 0$, ein „zufälliges“ Wort $b_1 \dots b_n \in \Sigma^n$ (in Zeit $O(n)$) schreibt.