Fachbereich 6 · Mathematik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dieter Spreen
F. Eisterlehner

UNIVERSITÄT SIEGEN

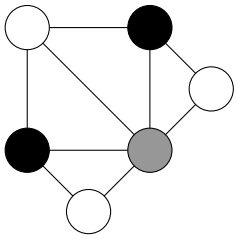
Komplexitätstheorie

Übungsblatt 2, Wintersemester 2007/08

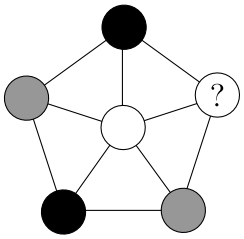
Das Färbbarkeitsproblem für Graphen. Informal ist Graph-Coloring (kurz GC) beschrieben als die Aufgabe, zu einem gegebenen Graphen $G = (V, E)$ und einer Anzahl von k Farben zu entscheiden, ob eine k-Knoten-Färbung für G existiert, d.h. eine Funktion $c\colon V \to \{1, \ldots, k\}$, welche benachbarten Knoten unterschiedliche Farben zuordnet:

$$\forall (u, v) \in E\colon c(u) \neq c(v)$$

Beispiel.



3-färbbar



nicht 3-färbbar

Im Folgenden sei $\langle G \rangle$ eine geeignete Kodierung eines Graphens $G = (V, E)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, d.h. $\langle . \rangle$ ist eine *injektive*, *polynomialzeitberechenbare* Abbildung.

Definition (Binärkodierung von Graphen)**.** *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge $V = \{1, \ldots, m\}$ und Kantenmenge*

- $E \subseteq \{\{v, w\} \mid v, w \in V, v \neq w\}$, *falls G* ungerichtet
- $E \subseteq V \times V$, *falls G* gerichtet

Konvention*: In beiden Fällen schreiben wir $(v, w) \in E$ für eine Kante in G.*

Die Adjazenzmatrixkodierung von G, *in Zeichen $\langle G \rangle$, ist definiert durch*

$$\langle G \rangle := 0^m 1 a_{11} \ldots a_{1m} \ldots a_{m1} \ldots a_{mm} \quad \textit{mit} \quad a_{ij} := \begin{cases} 1, & \textit{falls } (i, j) \in E \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 1 (Binärkodierung von Graphen)
Zeigen Sie, dass die Sprache $L_{\texttt{AM-Code}} := \{x \in \{0,1\}^* \mid x = \langle G \rangle \text{ für einen Graphen } G\}$ in P liegt.

Das Färbbarkeitsproblem lässt sich damit wie folgt beschreiben:

$$\textsc{Graph-Coloring} := \{\langle G \rangle \operatorname{bin}(k) \mid G \text{ besitzt eine } k\text{-Färbung}\}$$
$$3\text{-}\textsc{Coloring} := \{\langle G \rangle \mid G \text{ besitzt eine } k\text{-Färbung}\} \text{ für } k \geq 1$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass $\textsc{Graph-Coloring} \in \mathsf{NP}$ und $3\text{-}\textsc{Coloring} \in \mathsf{NP}$ gilt.

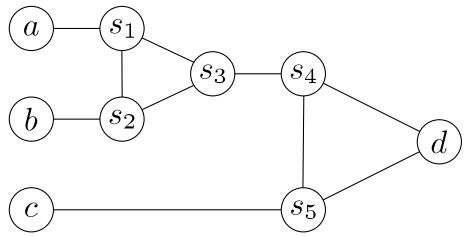
Wir wollen nun zeigen, dass $3\text{-}\textsc{Coloring}$ NP-Vollständig ist. Nach Aufgabe 2 genügt es zu zeigen, dass $3\text{-}\textsc{Sat} \leq_m^p 3\text{-}\textsc{Coloring}$ gilt. Hierzu sei $\varphi \equiv C_1 \wedge \ldots \wedge C_r$, $C_j = (l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ für $j = 1, \ldots, r$ eine beliebige 3-KNF-Formel. Ohne Einschränkung gelte $\operatorname{Var}(\varphi) \subseteq \{X_1, \ldots, X_m\}$, dabei bezeichnet $\operatorname{Var}(\varphi)$ die in φ vorkommenden Variablen.

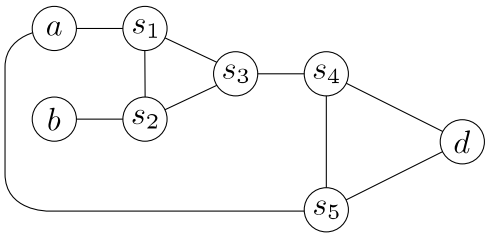
Es gilt also, in „vernünftiger“ Zeit einen Graphen $G_\varphi = (V_\varphi, E_\varphi)$ mit folgender Eigenschaft zu konstruieren:

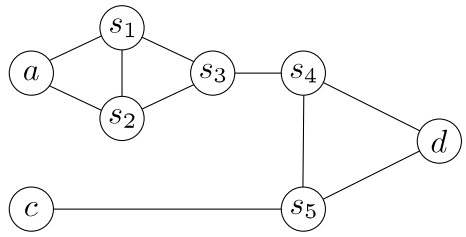
$$\varphi \text{ ist erfüllbar} \iff G_\varphi \text{ besitzt eine 3-Färbung } c\colon V_\varphi \to \{1,2,3\} \qquad (*)$$

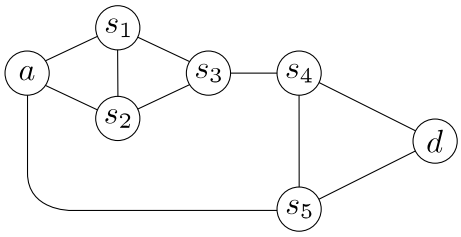
Die Idee bei der folgenden Konstruktion ist, jeder Variablen X_i ein durch eine Kante verbundenes Paar von Knoten u_i bzw. w_i zuzuordnen, wobei u_i jedes Vorkommen von X_i und w_i jedes Vorkommen von $\bar{X}_i$ repräsentiert. Zusätzlich wird für jede Klausel $C_j = (l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ eines der „Bauteile“ H_1, H_2, H_3 oder H_4 „eingebaut“ und auf geeignete Art mit den Repräsentanten von l_{j1}, l_{j2} und l_{j3} verbunden.

Zunächst seien die „Bauteile“ H_1 bis H_4 mit Basis $B = \{a, b, c\}$ und Spitze d gegeben:

H_1:


H_2:


H_3:


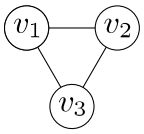
H_4:


Aufgabe 3 (Eigenschaften von H_j)
Zeigen Sie für $i = 1, \ldots, 4$ und für eine beliebige, aber fest gewählte Farbe $f \in \{1,2,3\}$:

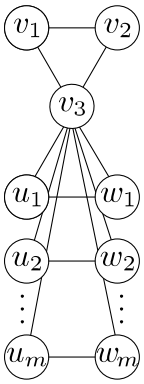
a) Wenn g eine 3-Färbung von H_i mit $g(B) = \{f\}$ ist, dann gilt $g(d) = f$.

b) Jede Abbildung $g'\colon B \to \{1,2,3\}$ mit $f \in g(B)$ kann zu einer 3-Färbung g von H_i mit $g(d) = f$ fortgesetzt werden.

Das Zentrum $Z := \{v_1, v_2, v_3\}$ von G_φ bildet ein Dreieck:



Um das Zentrum herum werden nun die *Repräsentanten* $R := \{u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_m\}$ für alle möglichen Literale $X_1, \ldots, X_m, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_m$ als *Dreiecke* $\{u_i, v_3, w_i\}$ *mit Spitze* v_3 angelegt. Zentrum und Repräsentanten bilden zusammen den *Kern* $K := Z \cup R$ der Konstruktion:



Darin ist für $i = 1, \ldots, m$

$$u_i = \text{Repräsentant von } X_i$$
$$w_i = \text{Repräsentant von } \bar{X}_i$$

Grob gesprochen ist die Intuition zu der Konstruktion von G_φ die folgende:

$$\text{Farbe von } u_i \hat{=} \text{Wert } v(X_i) \text{ von } X_i \text{ unter der Belegung } v$$
$$\text{Farbe von } w_i \hat{=} \text{Wert } v(\bar{X}_i) \text{ von } \bar{X}_i \text{ unter der Belegung } v$$

Für jede Klausel $C_j = (l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ wird schließlich ein Bauteil $H^{(j)}$ aus $H_1, \ldots, H_4$ gewählt mit:

$$\text{Basis von } H^{(j)} := \text{die Repräsentanten von } l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}$$
$$\text{Spitze } d \text{ von } H^{(j)} := v_2$$

Daraus entsteht ein *Teilgraph* G_j mit zusätzlich 5 Knoten $s_{j1}, \ldots, s_{j5}$. Insgesamt besteht also G_φ aus genau $3 + 2m + 5r$ Knoten.

Die allgemeine Konstruktion von G_φ lautet also wie folgt:

$$\begin{aligned} V_\varphi &:= K \cup \{s_{j1}, \ldots, s_{j5} \mid j = 1, \ldots, r\} \\ E_\varphi &:= \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\} \cup \{(v_3, u_i), (u_i, w_i), (w_i, v_3) \mid i = 1, \ldots, m\} \\ &\quad \cup \{(s_{j1}, s_{j2}), (s_{j2}, s_{j3}), (s_{j3}, s_{j1}), (s_{j3}, s_{j4}), (s_{j4}, s_{j5}), (s_{j5}, v_2), (s_{j4}, v_2) \mid j = 1, \ldots, r\} \\ &\quad \cup \{(s_{j1}, v_{j1}), (s_{j2}, v_{j2}), (s_{j5}, v_{j3}) \mid v_{ji} \text{ ist Repräsentant von } l_{ji}, j = 1, \ldots, r\} \end{aligned}$$

Behauptung (Korrektheit)**.**
φ ist erfüllbar $\iff$ G_φ besitzt 3-Färbung g mit $g(v_k) = k$ für die Farben $k = 1, 2, 3$.

Proof. $\boxed{\Longrightarrow}$ Gelte $v(\varphi)=1$ für eine Belegung v. Wir definieren zunächst eine 3-Färbung für den Kern K von G_φ, wobei die Farben für das Zentrum Z nicht von v abhängen.

- $h(v_k) := k$ für $k = 1, 2, 3$
- $h(u_i) := 1 + v(x_i)$ für $i = 1, \ldots, m$.
- $h(w_i) := 1 + (1 - v(x_i)) = 2 - v(x_i)$ für $i = 1, \ldots, m$.

Damit gilt $h(u_i) \neq h(w_i)$ für $i = 1, \ldots, m$, $h(R)=\{1, 2\}$ und $h(v_3) = 3$. Also ist jedes der Dreiecke $\{u_i, v_3, w_i\}$ im Kern K sowie das Zentrum $\{v_1, v_2, v_3\}$ legal gefärbt.

Nach Vor. gibt es aus jeder Klausel C_j ein Literal l_{ji} mit $v(l_{ji})=1$. Der Repräsentant v_{ji} von l_{ji} hat damit Farbe 2, d.h. $h(v_{ji})=2$, und gehört zur *Basis B_j des Bauteils $H^{(j)}$*. Nach Aufgabe 3 gibt es damit eine 3-Färbung h_j von $H^{(j)}$, die eine Fortsetzung von $h_{\restriction B_j}$ auf $H^{(j)} = \{s_{j1}, \ldots, s_{j5}, v_2\} \cup B_j$ ist und für die $h_j(v_2)=2=h(v_2)$ gilt. Da sich also h_j auf B_j und v_2 wie h verhält, erhalten wir eine legale 3-Färbung g von G_φ, indem wir h mit allen Fortsetzungen $h_1, \ldots, h_r$ vereinigen, d.h.

$$g := h \cup h_1 \cup \ldots \cup h_r.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sei g eine 3-Färbung von G_φ mit $g(v_k) = k$ für das Zentrum v_1, v_2, v_3. Wegen $g(v_3) = 3$ folgt dann $g(R)=\{1, 2\}$ und $g(u_i) \neq g(w_i)$ für $i = 1, \ldots, m$, da ja jedes Dreieck $\{u_i, v_3, w_i\}$ durch g legal gefärbt ist. Wir definieren daher eine erfüllende Belegung v von φ wie folgt:

$$v(x_i) := \begin{cases} 1 & \text{falls } g(u_i) = 2 \\ 0 & \text{falls } g(u_i) = 1 \end{cases}$$

Für den Beweis von $v(C_j)=1$ für $j = 1, \ldots, r$ argumentieren wir indirekt.
Annahme: $v(C_j) = 0$ für ein $j \in \{1, \ldots, r\}$. Dann gilt

$(**)$ $$v(l_{jk}) = 0 \text{ für } k = 1, 2, 3.$$

Also haben alle Elemente der Basis von $H^{(j)}$ (die Repräsentanten) von l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}) Farbe 1.

> Denn wäre etwa u_i der Referenzknoten von einem l_{jk} mit Farbe $g(u_i) = 2$, so folgte $l_{jk}=x_i$ und somit $v(l_{jk})=1$, im Widerspruch zu $(**)$.

Nach Aufgabe 3 hätte damit auch die Spitze v_2 von $H^{(j)}$ die Farbe 1, im Widerspruch zur Voraussetzung $g(v_2)=2$. □

Quelle:

- Karl-Heinz Niggl: „*Komplexitätstheorie*“, Materialien zur Vorlesung. Wintersemester 2005/06