Fachbereich 6 · Mathematik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dieter Spreen
F. Eisterlehner

Komplexitätstheorie

Übungsblatt 3, Wintersemester 2007/08

Quantifizierte Boolesche Formeln. In der Vorlesung haben wir die PSPACE-vollständige Sprache QBF $= \{\langle\varphi\rangle \mid \varphi$ ist wahre geschlossene *quantifizierte Boolesche Formel*$\}$ kennengelernt. Dabei ist eine geschlossene *quantifizierte Boolesche Formel* φ von der Gestalt $\varphi = Q_1X_1 \dots Q_mX_m\psi$ für eine Boolesche Formel ψ mit Variablen unter $X_1, \dots, X_m$ und Quantoren $Q_1, \dots, Q_m \in \{\exists, \forall\}$.

Wir betrachten nun folgende Teilmengen von QBF:

$$\begin{aligned}\text{alt-}\mathsf{QBF} := \{\langle\varphi\rangle \mid \langle\varphi\rangle \in \mathsf{QBF} \text{ und } \varphi = Q_1X_1 \dots Q_{2k+1}X_{2k+1}\psi \text{ für eine Boolesche Formel } \psi \\ \text{und } k \geq 0, Q_1 = \exists, Q_i \neq Q_{i+1} (i = 1 \leq i < 2k)\} \\ 3\text{-}\mathsf{QBF} := \{\langle\varphi\rangle \mid \langle\varphi\rangle \in \text{alt-}\mathsf{QBF} \text{ und } \varphi = Q_1X_1 \dots Q_mX_m\psi \text{ mit } \langle\psi\rangle \in L_{3\text{-}\mathsf{KNF}}\}\end{aligned}$$

wobei $L_{3\text{-}\mathsf{KNF}}$ die Sprache bezeichnet, welche genau die (Kodierungen von) Booleschen Formeln in *konjunktiver Normalform* enthält, deren Monome jeweils aus genau 3 Literalen aufgebaut sind.

Aufgabe 1 (Einfache Reduktionen)

Zeigen Sie:

a) QBF $\leq^p_m$ alt-QBF

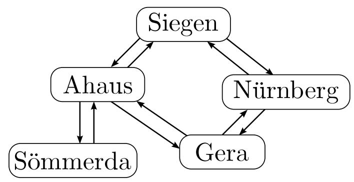
b) QBF $\leq^p_m$ 3-QBF

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, wie uns QBF mit Hilfe der „Reduktionstechnik“ ermöglicht, eine weite Klasse von praktisch relevanten Problemen als PSPACE-schwer zu erkennen. Wegen der bekannten Inklusion „NP $\subseteq$ PSPACE“ überträgt sich die weit verbreitete Vermutung für NPC, dass auch für keines der PSPACE-vollständigen Probleme ein effizientes Lösungsverfahren existiert.

Spiele auf Graphen. Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Beobachtung, dass die Gültigkeit von alt-QBF-Formeln einer Anforderung an eine *Gewinnstrategie* in typischen Zwei-Personen-Spielen entspricht:

> *Der erste Spieler kann einen Sieg im Spiel erzwingen, wenn es einen möglichen ersten „Zug“ gibt, so dass, egal welchen Folgezug Spieler 2 wählt, Spieler 1 wiederum seinen nächsten Zug so wählen kann, dass jeder Spielzug von Spieler 2 wieder die Wahl eines Zuges von Spieler 1 ermöglicht, so dass...*

Als einfachen Vertreter dieser Klasse von Spielen wählte Stockmeyer[1] das sogenannte Geographie-Spiel GEOGRAPHY, in welchem der Folgespieler bei Vorgabe eines Städtenamens den Namen einer weiteren Stadt angeben muss, dessen erster Buchstabe mit dem letzten oder dessen letzer Buchstabe mit dem ersten Buchstaben des vorgegebenen Namens übereinstimmt. Verloren hat derjenige Spieler, dem kein weiterer passender Name zur Verfügung steht. Formal kann ein solches Spiel durch einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ dargestellt werden, dessen Knoten mit Städtenamen beschriftet und mit einer Kante verbunden sind, wenn die entsprechenden Namen den Bedingungen an einen gültigen Zug entsprechen:



Einer Spielsituation entspricht dann eine markierte Knotenmenge $M \subseteq V$, eine Position $s \in V$ und ein aktiver Spieler $P \in \{A, B\}$. Falls möglich, wählt P eine Kante $(s, v) \in E$ mit $v \notin M$ und Spieler $\bar{P} \in \{A, B\} \setminus \{P\}$ setzt das Spiel in Situation $M' := M \cup \{v\}$ in Knoten v fort. Ansonsten hat Spieler $\bar{P}$ gewonnen. Es beginne immer Spieler A. Dieser hat eine *Gewinnstrategie* bei Eingabe einer *Spielinstanz* (G, s), wenn A auf dem Graphen G in Situation $\emptyset$ mit Startknoten s immer gewinnen kann. Wir setzen somit:

$$\begin{aligned}\textsc{Geography} := \{\langle (G,s) \rangle \mid\ & G = (V,E) \text{ ist gerichteter Graph mit } s \in V, \text{ so dass} \\ & \text{auf Graph-Spiel } G \text{ in Situation } \emptyset \text{ mit Startknoten } s \\ & \text{für Spieler } A \text{ eine Gewinnstrategie existiert.}\}\end{aligned}$$

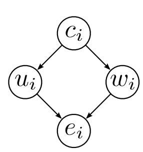
Aufgabe 2 (Polynomiell platzbeschränktes TAP)

Zeigen Sie, dass GEOGRAPHY $\in$ PSPACE gilt.

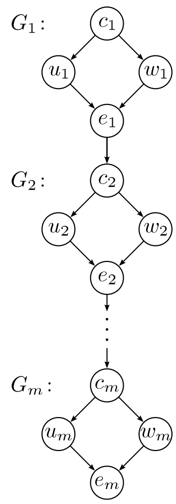
Es steht noch aus zu zeigen, dass GEOGRAPHY auch PSPACE-schwer ist. Nach Aufgabe 1 reicht es zu zeigen, dass 3-QBF$\leq_m^p$GEOGRAPHY gilt. Ähnlich zum Vorgehen bei der Reduktion „SAT$\leq_m^p$GC“ im vorhergehenden Übungsblatt, muss also zu jeder geschlossenen quantifizierten Booleschen Formel $\varphi = \exists X_1 \forall X_2 \ldots \exists X_n \psi$ mit $\psi \in L_{3\text{-KNF}}$ eine Spielinstanz (G_φ, s_φ) konstruiert werden, so dass gilt:

$$\varphi \in \text{3-QBF} \iff (G_\varphi, s_\varphi) \in \textsc{Geography}$$

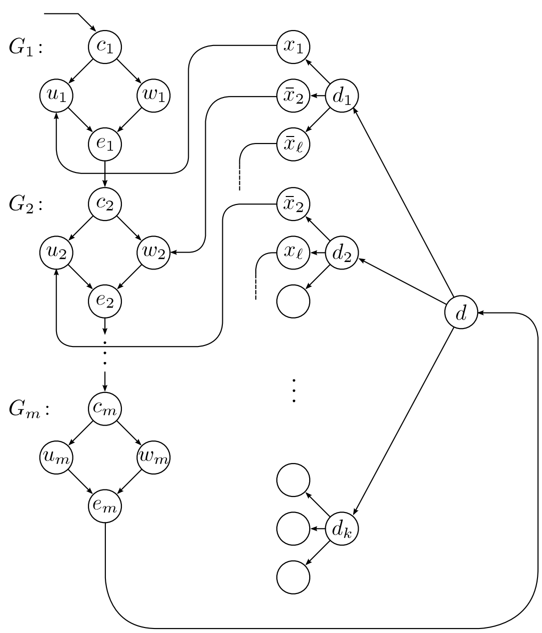
Hierzu sei $\varphi = \exists X_1 \forall X_2 \ldots \exists X_m \psi$ mit $m = 2r + 1$ für ein $r \geq 0$ und $\psi = C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$ mit $C_j = (l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ für $j = 1, \ldots, k$ eine beliebige 3-QBF-Formel. Zunächst konstruieren wir zu jeder Variablen X_i einen Teilgraphen G_i:



Diese verbinden wir durch Kanten (e_i, c_{i+1}), $i = 1, \dots, m-1$ und erhalten so den *Eingang* von G_φ:



Nun fügen wir für jede Klausel $C_j = (l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ Knoten $d_j, d_{j1}, d_{j2}, d_{j3}$ und Kanten $(d_j, d_{j\nu})$ für $\nu = 1, 2, 3$ hinzu. Falls $l_{j\nu} = X_i$, so fügen wir eine Kante $(d_{j\nu}, u_i)$ hinzu, falls $l_{j\nu} = \bar{X}_i$, so fügen wir Kante $(d_{j\nu}, w_i)$ hinzu ($i \in \{1, \dots, m\}, j = 1, \dots k, \nu = 1, 2, 3$). Abschließend fügen wir noch einen Knoten d hinzu und verbinden e_m mit d via (e_m, d) und die *Spitze* d mit der Repräsentation jeder Klausel C_j via (d, d_j) mit $j = 1, \dots, k$. Insgesamt ist der Graph G_φ von folgender Gestalt:



Aufgabe 3 (3-QBF $\leq_m^p$ Geography)
Zeigen Sie, dass mit $s_\varphi := c_1$ nach obiger Konstruktion $\varphi \in$ 3-QBF $\iff$ (G_φ, s_φ) gilt.

Literatur

[1] T. J. Schaefer. On the complexity of some two-person perfect-information games. *J. Comput. Syst. Sci.*, 16(2):185–225, 1978.