



Zur Vorbereitung auf die Vorlesung
Grundlagen der theoretischen Informatik
Mo 4., Mi 6. und Fr. 8. Oktober
in **H/C 3310** um **14⁰⁰-16⁰⁰** Uhr.

Erfahrungsgemäß ist die Vorlesung "Grundlagen der Theoretischen Informatik" für viele Informatikstudenten als erste Theorievorlesung ihres Studiums eine besondere Herausforderung. Sachverhalte werden in der Theorie in mathematischer Strenge bewiesen. Hierbei wird zum Teil von einer formalisierten Sprache Gebrauch gemacht.

Um die Anfangsschwierigkeiten abzumildern, bieten wir in der Woche vor Vorlesungsbeginn ein Mathematisches Propädeutikum an, in dem wichtige in der Vorlesung benutzte Grundbegriffe und Beweismethoden nochmals ausführlich dargestellt werden.

Inhalt: (naive) Mengenlehre, Induktive Definitionen / strukturelle Induktion, Logik, Beweise, Syntax vs. Semantik.

Insbesondere Informatikstudenten, die nicht schon Mathematik als Beifach gewählt haben, empfehlen wir die Teilnahme.

Prof. Dr. Dieter Spreen, Dr. Hannes Diener

Bei Nachfragen wenden Sie sich bitte an
diener@math.uni-siegen.de





Was ist der Sinn dieses Kurses?



Thema für heute: Mengentheorie.

“Eine Menge ist eine Ansammlung von Objekten.”

“Fast die gesamte Mathematik kann auf der Mengenlehre aufgebaut werden .”



Für die, die an Details interessiert sind:

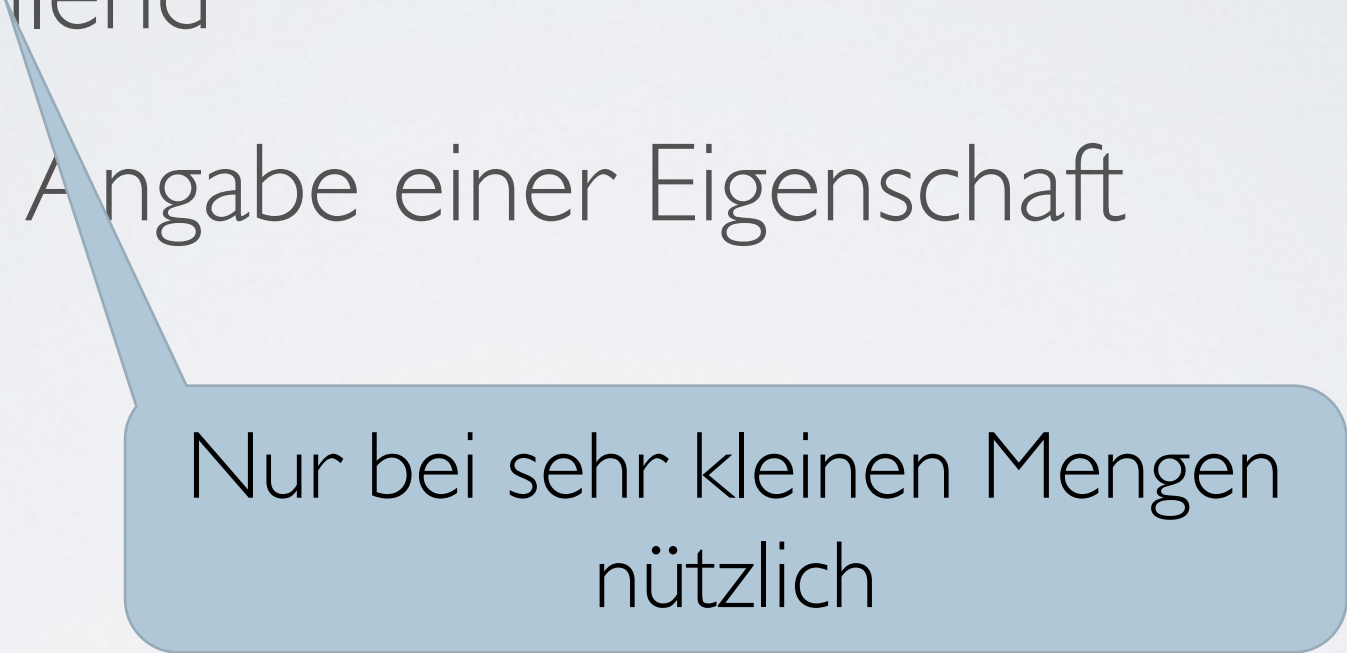
- Lambda-Kalkül
- naive Mengenlehre vs. formale Mengenlehre

Es gibt zwei grundsätzliche Möglichkeiten eine Mengen
formal zu notieren:

- 
- 
- ♦ aufzählend
 - ♦ durch Angabe einer Eigenschaft

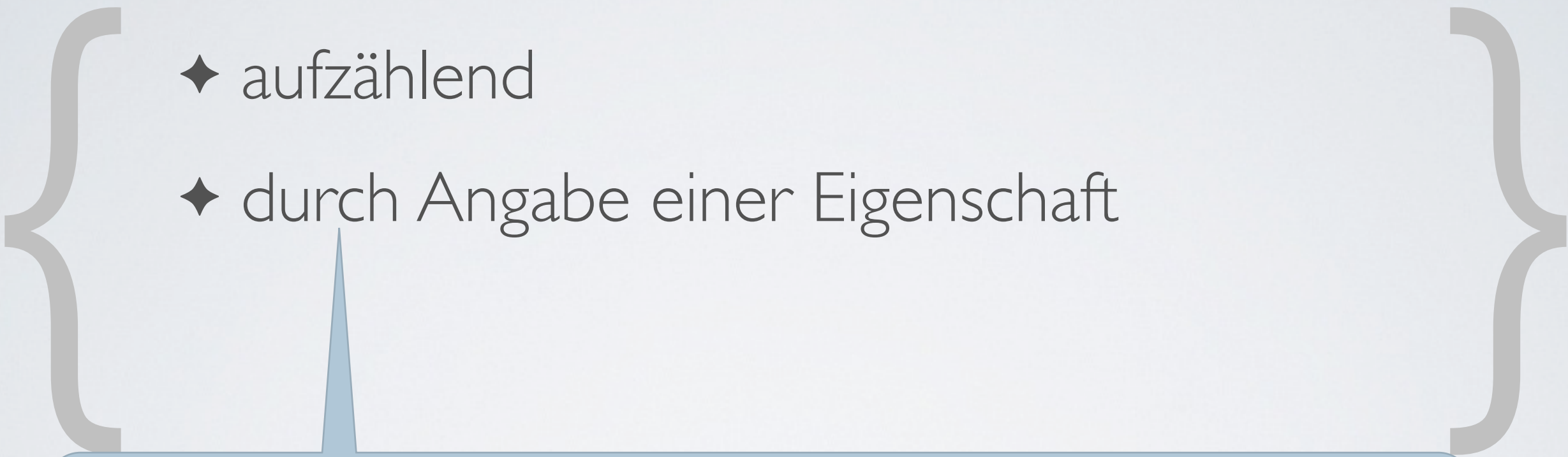
Es gibt zwei grundsätzliche Möglichkeiten eine Mengen formal zu notieren:

- 
- 
- ♦ aufzählend
 - ♦ durch Angabe einer Eigenschaft



Nur bei sehr kleinen Mengen
nützlich

Es gibt zwei grundsätzliche Möglichkeiten eine Mengen formal zu notieren:

- 
- ♦ aufzählend
 - ♦ durch Angabe einer Eigenschaft

Syntax:

$$\{x \in T \mid \text{Eigenschaft von } x\}$$

Element:

Wir schreiben

$$x \in M$$

für “ x ist ein Element von M ”.

Teilmenge:

Wenn aus $x \in M$ folgt, dass auch $x \in N$
ist, dann schreiben wir

$$M \subseteq N$$

für “M ist Teilmenge von N”.

Teilmenge:



Warnung:

$\subset$

$\subseteq$

$\subsetneq$

$\not\subset$

Logik / Beweise

Wie beweisen wir, daß eine Menge M
Teilmenge einer anderen Menge N ist?

Logik / Beweise

Wie beweisen wir, daß eine Menge M Teilmenge einer anderen Menge N ist?

☞ Wir betrachten ein beliebiges Element von M und zeigen, daß dieses auch Element von N ist.

Keine Teilmenge:

Wenn M keine Teilmenge von N ist,
dann schreiben wir

$$M \not\subseteq N.$$

Logik / Beweise

Wie beweisen wir, daß eine Menge M keine Teilmenge einer anderen Menge N ist?

Logik / Beweise

Wie beweisen wir, daß eine Menge M keine Teilmenge einer anderen Menge N ist?

☞ Wir zeigen, daß es **ein** Element von M gibt, daß nicht in N ist.

Gleichheit:

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. D.h. wenn M Teilmenge von N ist und N Teilmenge von M .

Logik / Beweise

Wie beweisen wir, daß zwei Mengen M und N gleich sind?

Logik / Beweise

Wie beweisen wir, daß zwei Mengen M und N gleich sind?

☞ Wir zeigen, daß M Teilmenge von N ist und andersherum.

Potenzmenge:

Für eine Menge M heißt die Menge

$$\wp(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$$

die Potenzmenge von M .

Auf welcher Ebene befinde ich mich?

Vereinigung und Durchschnitt:

- endlich
- beliebig

Komplement:

Tupel:

Mengen haben (normalerweise) keine Ordnung.

Wenn die Ordnung von Paaren (Tripeln ...)

wichtig ist, dann verwenden wir Tupel:

z.B.: (a,b) , (a,b,c) , $(0,0)$, (M,N,S,f) , ...



Für die, die an Details interessiert sind:

braucht man geordnete Paare wirklich (als neues Konzept)?

(a,b) als Schreibweise für $\{\{a\},\{a,b\}\}$

Kreuzprodukt:

geordnete Paare sind nützlich, um das sog. Kreuzprodukt zu bilden.

Wenn M und N Mengen sind, dann ist

$$M \times N = \{ (a,b) \mid a \in M \text{ und } b \in N \}$$

Relationen:

eine Teilmenge $R \subseteq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ heißt

Relation (im Falle $n=1$ sagt man auch Prädikat
oder Eigenschaft).



Letztes Mal:

- Was sind Mengen?
- Teilmengen
- Gleichheit von Mengen
- Potenzmengen
- Vereinigung und Durchschnitt
- Tupel und Kreuzprodukt
- Relationen

Zum Aufwärmen:

- A: Die Menge der natürlichen Zahlen kleiner als 10
- B: Die Menge aller Primzahlen kleiner als 11
- C: Die Menge aller ungeraden Zahlen größer als 1 und kleiner als 6
- D: Die Menge, die nur 1 und 2 als Elemente enthält
- E: Die Menge, die nur 1 enthält
- F: Die Menge aller Primzahlen kleiner als 8

Schreiben Sie A,B,C in Mengennotation (durch Angabe einer Eigenschaft) und D,E,F in aufzählender Mengenschreibweise

Zum Aufwärmen:

- A: Die Menge der natürlichen Zahlen kleiner als 10
- B: Die Menge aller Primzahlen kleiner als 11
- C: Die Menge aller ungeraden Zahlen größer als 1 und kleiner als 6
- D: Die Menge, die nur 1 und 2 als Elemente enthält
- E: Die Menge, die nur 1 enthält
- F: Die Menge aller Primzahlen kleiner als 8

Welche dieser Mengen sind in welchen enthalten? Warum?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann ist auch $A \subseteq C$.
- Wenn $A \subseteq B$ und $C \subseteq B$, dann ist auch $A \subseteq C$.
- $A \subsetneq B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \not\subseteq A$.
- Wenn $A \subsetneq B$ und $B \subseteq C$, dann ist auch $A \subsetneq C$.
- $A \subsetneq C$, falls $A \subseteq B$ und $B \subsetneq C$.

Logik

Um den exakten logischen Inhalt einer Aussage wiederzugeben verwenden wir die folgenden Zeichen.

- $\neg$ für “*nicht*”
- $\wedge$ für “*und*”
- $\vee$ für “*oder*”
- $\Rightarrow$ für “*wenn, ... dann*”
- $\Leftrightarrow$ für “*genau dann, ... wenn*”
- $\exists$ für “*es gibt*”
- $\forall$ für “*für alle*”
- *Klammern um Zweideutigkeiten auszuschliessen*

Logik

Wie beweisen wir Aussagen diesen Typs?

- $\neg$ für “*nicht*”
- $\wedge$ für “*und*”
- $\vee$ für “*oder*”
- $\Rightarrow$ für “*wenn, ... dann*”
- $\Leftrightarrow$ für “*genau dann, ... wenn*”
- $\exists$ für “*es gibt*”
- $\forall$ für “*für alle*”
- *Klammern um Zweideutigkeiten auszuschliessen*

Logik

Wie beweisen wir Aussagen diesen Typs?

$\neg\phi$: Annahme von ϕ führt
zum Widerspruch

- $\neg$ für “nicht”
- $\wedge$ für “und”
- $\vee$ für “oder”
- $\Rightarrow$ für “wenn, ... dann”
- $\Leftrightarrow$ für “genau dann, ... wenn”
- $\exists$ für “es gibt”
- $\forall$ für “für alle”
- Klammern um Zweideutigkeiten auszuschliessen

Logik

Wie beweisen wir Aussagen diesen Typs?

- $\neg$ für “*nicht*”
 - $\wedge$ für “*und*”
 - $\vee$ für “*oder*”
 - $\Rightarrow$ für “*wenn, ... dann*”
 - $\Leftrightarrow$ für “*genau dann, ... wenn*”
 - $\exists$ für “*es gibt*”
 - $\forall$ für “*für alle*”
 - Klammern um Zweideutigkeiten auszuschliessen
- $\Phi \wedge \Psi$: Wir zeigen, daß sowohl Φ als auch Ψ gilt.

Logik

Wie beweisen wir Aussagen diesen Typs?

- $\neg$ für “nicht”
- $\wedge$ für “und”
- $\vee$ für “oder”
- $\Rightarrow$ für “wenn, ... dann”
- $\Leftrightarrow$ für “genau dann, ... wenn”
- $\exists$ für “es gibt”
- $\forall$ für “für alle”
- Klammern um Zweideutigkeiten auszuschliessen

$\Phi \vee \Psi$: Wir zeigen, daß
entweder Φ oder Ψ gilt.

Logik

Wie beweisen wir Aussagen diesen Typs?

- $\neg$ für “nicht”
- $\wedge$ für “und”
- $\vee$ für “oder”
- $\Rightarrow$ für “wenn, ... dann”

- $\Leftrightarrow$ für “genau dann

- $\exists$ für “es gibt”
- $\forall$ für “für alle”

- Klammern um Zweideutigkeiten auszuschliessen

$\Phi \Rightarrow \Psi$: Wir zeigen, daß Ψ gilt
immer dann, wenn Φ gilt.

Logik

Wie beweisen wir Aussagen diesen Typs?

- $\neg$ für “*nicht*”
- $\wedge$ für “*und*”
- $\vee$ für “*oder*”
- $\Rightarrow$ für “*wenn, ... dann*”
- $\Leftrightarrow$ für “*genau dann, ... wenn*”
- $\exists$ für “*es gibt*”
- $\forall$ für “*für alle*”
- *Klammern um Zweideutigkeiten auszuschliessen*

Zeigen Sie die folgenden Aussagen

- $A \cap B \subseteq A$ und $A \cap B \subseteq B$
- Wenn $X \subseteq A$ und $X \subseteq B$, dann ist auch $X \subseteq A \cap B$.
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen

- $A \cap B \subseteq A \cup B$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (B_i \cap A)$
- Wenn $A \subseteq B$, dann ist $\wp(A) \subseteq \wp(B)$

Gibt es Mengen M, N, M_i so daß...

- ... $M \subseteq N$ und $M \in N$?
- ... M_i sind nichtleer, $M_i \subseteq M_{i+1}$ aber $\bigcap_{i \in \mathbb{I}} M_i = \emptyset$?

Gilt daß ...

- $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$?
- $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$?

Sei A die Menge aller Menschen, P, F, M, S, B die Relationen “Elternteil von”, “Vater von”, “Mutter von”, “Schwester von” und “Bruder von”.
Beschreiben Sie

- $P \circ P$
- $M \circ F$
- $S \circ P$
- $B \circ B$

Eigenschaften von Relationen:

- Symmetrie
- Reflexivität
- Transitivität
- ...