Fakultaet IV · Dep. Mathematik
Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dieter Spreen
Christian Uhrhan

UNIVERSITÄT SIEGEN

Grundlagen der Theoretischen Informatik, SS12

Übungsblatt **4** / **5** zum Nachholen der Klausurzulassung, Abgabe bis zum **Mo. 21. Mai**[1]

—

Allgemeine Hinweise:

- Es wird erwartet und empfohlen, dass Sie diese Übungen *alleine* bearbeiten.
- Alle relevanten Informationen werden auf der GTI Homepage bekanntgegeben. Hier sind auch das Skript und diese Übungsblätter zu finden.
- In jeder Aufgabe können wie immer 5 Punkte erreicht werden.
- Bitte geben Sie Ihre Lösungen in gut leserlicher und sauberer Form ab. Begründen Sie Ihre Antworten und argumentieren Sie *nachvollziehbar*.

Aufgabe 1. (a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive totale Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $\hat{f} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ nf(n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

auch rekursiv ist.

(b) Zeigen Sie ausserdem, dass für die Fakultätsfunktion $g(n) = n!$ gilt, dass $\hat{g} = g$.

(c) Gilt für alle totalen Funktionen $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dass $\hat{g}(n) = n!$?

Aufgabe 2. Sei (Φ, Ψ) ein zulässiges Programmiersystem für $\mathcal{P}$. Zeigen Sie, dass es immer mindestens eine Gödelnummer i gibt, so dass

$$\Phi_i = \Phi_{i+1},$$

d.h. es gibt immer eine Funktion in jeder Auflistung eines Programmiersystems, die zweimal hintereinander aufgelistet wird.
Gibt es auch immer eine Gödelnummer j, so dass

$$\Phi_j = \Phi_{j+1} = \Phi_{j+2}?$$

[1] Abgabe am Besten *persönlich* bei Christian Uhrhan (EN-B 0125), oder im Sekretariat der theoretischen Informatik (EN-B 0121).

Aufgabe 3. (a) Sei für $A, B \subseteq \mathbb{N}$ die folgende Menge definiert:

$$A \oplus B = \{\, 2i \mid i \in A \,\} \cup \{\, 2i + 1 \mid i \in B \,\}.$$

Zeigen Sie, dass $A \leqslant (A \oplus B)$ und $B \leqslant (A \oplus B)$.

(b) Zeigen Sie, dass für $Y \subseteq \mathbb{N}$, wenn $A \leqslant Y$ und $B \leqslant Y$, dann ist $A \oplus B \leqslant Y$.

D.h. $A \oplus B$ ist die niedrigste Menge die bezüglich $\leqslant$ über A und B liegt.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass es keine total-rekursive universelle Funktion für $\mathcal{R}$ gibt. D.h. beweisen Sie, dass es keine total-rekursive Funktion $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ geben kann, so dass für alle $g \in \mathcal{R}^{(1)}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$g(n) = F(m, n)\ .$$