Fakultät IV = XXIV — Mathematik
Hannes Diener

Grundlagen der Theoretischen Informatik

Probeklausur

5. Februar 2014

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Beweisen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} \ .$$

Aufgabe 2 [10 Punkte]

(a) Sind die folgenden Relationen 1. symmetrisch, 2. reflexiv und 3. transitiv?
Positive Antworten müssen nicht begründet werden, aber geben Sie bei negativen Antworten Gegenbeispiele an.

- $R_1 = \left\{ (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \ a+b=0 \right\}$
- $R_2 = \left\{ (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \ a \mid b \right\}$
- $R_3 = \left\{ (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \ a+b \text{ ist ungerade} \right\}$

(b) Zeigen Sie, daß die Relation

$$R_4 = \left\{ (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a+b \text{ ist gerade} \right\}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Wie sehen die Äquivalenzklassen von 1 und 0 aus? (Letzteres ohne Beweis).

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Seien $f : M \to N$ injektiv und $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie, daß

$$f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B) \ .$$

Geben Sie außerdem ein Beispiel an, das zeigt, daß diese Inklusion nicht unbedingt gilt, wenn wir keine Injektivität fordern.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Zeigen Sie, daß die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht abzählbar ist.

Tipp: Angenommen es gäbe eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Betrachten Sie nun die Menge $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$.

Aufgabe 5 [10 Punkte]

Wieviele der Zahlen $\{1, \ldots, 1\,000\,000\}$ sind weder Quadrat noch Kubikzahlen?

Aufgabe 6 [10 Punkte]

(a) Was ist das multiplikative Inverse zu [26] in $\mathbb{Z}_7$?

(b) Ihre Matrikelnummer ist von der Form $abcdef$ bzw. $1abcdef$. Sei $u = abc$ und $v = def$. Bestimmen Sie x und y, so daß $\mathrm{ggt(u, v)} = ux + vy$.

Aufgabe 7 [10 Punkte]

Zerlegen Sie die Permutation aus S_{10}

$$\sigma = [7\ 8\ 1\ 2\ 5\ 10\ 9\ 6\ 4\ 3]$$

in Transpositionen. Was ist $\mathrm{sgn}(\sigma)$?

Aufgabe 8 [10 Punkte]

Sei W die Menge aller "Wörter" der Länge 7 gebildet aus den Buchstaben a, b, c, d, e, f. Also z.B. $aaaaaaa$ oder $abcdebc$.

(a) Wie viele Elemente hat W?

(b) Wie viele Wörter in W haben keinen Buchstaben mehrfach?

(c) Wie viele Wörter in W sind Palindrome? (Ein Palindrom ist ein Wort das vorwärts und rückwärts gelesen gleich ist; also beispielsweise $abcba$)

(d) Wie viele Wörter in W haben genau zwei Vokale.

Aufgabe 9 [10 Punkte]

Zeigen Sie, daß die Gruppe $G = (\{n, a, b\}, \circ)$, wobei $\circ$ definiert ist durch

	n	a	b
n	n	a	b
a	a	n	b
b	b	a	n

keine Gruppe ist.

Aufgabe 10 [10 Punkte]

Auf $\mathbb{N}$ sei die Relation R definiert durch

$$R = \{ (x, y) \mid \exists n : \; y = 2^n x \}$$

(a) Zeigen Sie, daß R eine partielle Ordnung ist.

(b) Was sind die minimalen Elemente der Ordnung R?

(c) Zeichnen Sie das Hasse-Diagram der Ordnung R auf der Menge $\{1, \ldots, 20\}$.

Zusatzaufgabe[1]

Seien $\sigma, \tau \in S_n$, also Permutationen. Wie wir wissen ist im Allgemeinen $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$. Bezeichne $F(\sigma)$ die Menge der Fixpunkte von σ. Zeigen Sie, daß, wenn $\{1, \ldots, n\} = F(\sigma) \cup F(\tau)$, dann $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. (Hinweis: wenn $\sigma(n) \notin F(\sigma)$ dann ist $\sigma(n) \in F(\tau)$.)

[1] Für den Fall, daß Ihnen langweilig ist