Fakultät IV · Mathematik
Hannes Diener

Diskrete Mathematik für Informatiker, WS13/14

Übungsblatt **1**, Besprechung in den Übungen vom 4.-6 Nov.

Aufgabe 1. (Zum Satisfiability-Problem) Welche der folgenden Formeln sind in konjunktiver Normalform? (Wobei X, Y, Z Propositionalzeichen sind)

(a) X

(b) $X \vee Y$

(c) $(Z \vee \neg Y) \wedge (X \to Y)$

(d) $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y)$

(e) $(Y \vee X \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee \neg Z) \wedge (Z \vee \neg X) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)$

(f) $(\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z) \wedge (Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Z) \wedge (X \vee Z)$

Finden Sie außerdem jeweils eine Belegung, für die die Formeln in konjunktiver Normalform wahr sind.

Aufgabe 2. Seien a, b Formeln der Propositionallogik 1. Stufe. Begründen oder widerlegen Sie durch ein Beispiel: Sind a, b nicht logisch äquivalent, so ist $\neg(a \leftrightarrow b)$ eine Tautologie

---

Aufgabe 3. [1] Wenn in einer logischen Formel mit $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ (also ||, && und !) keine Klammern gesetzt sind werden sie trotzdem von den meisten Programmiersprachen verarbeitet. Wie interpretiert Ihr Browser (bzw. Eine Programmiersprache/Compiler Ihrer Wahl) die Formeln

$$P \vee Q \wedge R$$

und

$$\neg P \wedge Q \ ?$$

Anders gefragt: wo setzt Ihr Browser die Klammern? Schreiben Sie hierzu ein geeignetes Programm, welches diese Formeln mit einer geeigneten Wahrheitsbelegung, welche die verschiedenen Möglichkeiten der Klammerungen unterscheiden, auswertet.

[1] Diese Aufgabe benötigt etwas Programmierkenntnisse, und idealerweise ein klein wenig Kenntnis von Javascript. Sollten Sie keinerlei Programmiererfahrung besitzen, kann diese Aufgabe auch getrost ignoriert werden.
Wenn Sie mit einer anderen Programmiersprache arbeiten wollen müssen Sie sich selber informieren, wie in dieser Sprache die logischen Verknüpfungen benutzt werden.
Etwas komfortabler können Sie auch Javascript-code auf http://theoinf.math.uni-siegen.de/dmi/jscriptsandbox.html ausführen.

Aufgabe 4. Aus einem Zoologiebuch: „Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig und jede foberante Kalupe ist dorig. [In Knusiland] gibt es sowohl dorige, wie undorige Kalupen.“ Übersetzen Sie diese Voraussetzung oben und die folgenden Aussagen so gut wie möglich ins Formale (Prädikatenlogik 1. Stufe). Sei dazu $f(x)$ die Aussage “x ist foberant”, $b(x)$ die Aussage “x ist gebrochselt” und $d(x)$ die Aussage “x ist dorig”.

(a) Es gibt sowohl gebrochselte wie ungebrochselte Kalupen.

(b) Es gibt gebrochselte Kalupen.

(c) Alle nicht dorigen Kalupen sind gebrochselt.

(d) Einige gebrochselte Kalupen sind unfoberant.

(e) Alle gebrochselten Kalupen sind unfoberant.

Aufgabe 5. Finden Sie Beispiele für Aussageformen $a(x, y)$ und $b(x, y)$, so daß sowohl

$$(\exists x : \forall y : a(x, y)) \to (\forall x : \exists y : a(x, y))$$

also auch

$$(\forall x : \exists y : b(x, y)) \to (\exists x : \forall y : b(x, y))$$

falsch sind (über dem Grundbereich der natürlichen Zahlen).

Aufgabe 6. Beweisen Sie jeweils mit Hilfe von vollständiger Induktion:

(a) Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \ .$$

(b) Für alle natürlichen Zahlen n gilt, daß $n^3 - n$ durch 3 teilbar ist.

Zusatzaufgabe 7. [2] Die bekannten Fibonacci Zahlen sind definiert durch $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für $n \geqslant 0$. D.h. eine Fibonaccizahl ist immer die Summe ihrer zwei Vorgänger. Die ersten Fibonaccizahlen sind also

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, \ldots \ .$$

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion die folgende Identität (Binet-Formel):

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

ENDE

[2] Zusatzaufgaben sind besonders schwer und sollten als optional angesehen werden.