Fakultät IV · Mathematik
Hannes Diener

Diskrete Mathematik für Informatiker, WS13/14

Übungsblatt **10**, Besprechung in den Übungen vom 20.–22. Jan.

Aufgabe 1. Betrachten Sie die beiden Listen

1.	Konrad		1.	Helmut
2.	Ludwig		2.	Willy
3.	Kurt		3.	Gerhard
4.	Willy	und	4.	Angela
5.	Helmut		5.	Ludwig
6.	Gerhard		6.	Konrad
7.	Angela		7.	Kurt

(a) Geben Sie an, wie man die erste Liste durch vertauschen von jeweils zwei Einträgen in die zweite Liste überführen kann.

(b) Ist es möglich die Listen durch eine ungerade Anzahl an Vertauschungen ineinander zu überführen?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß jede Permutation in S_n als Hintereinanderausführung von Transpositionen der Form $\tau_{i,i+1}$ mit $1 \leqslant i < n$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß eine Transposition das Vorzeichen -1 hat:

(a) Bestimmen Sie zunächst das Vorzeichen von $\tau_{1,2}$ über Fehlstände.

(b) Zeigen Sie, daß $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$

(c) Zeigen Sie, daß es für jede Transposition $\tau_{i,k}$ eine Permutation σ gibt, so daß

$$\tau_{i,k} = \sigma \circ \tau_{1,2} \circ \sigma^{-1} \ .$$

(d) Verwenden Sie nun all diese Tatsachen und die Homomorphieeigenschaft von sgn um zu zeigen, daß $\operatorname{sgn} \tau_{i,k} = -1$ ist.

Aufgabe 4. Wir definieren: Eine Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein k-Zykel, wenn es Zahlen $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt, so daß $\sigma(i_j) = i_{j+1}$ für $1 \leqslant j < k$, $\sigma(i_k) = i_1$ und $\sigma(i) = i$ für $i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$. D.h. anschaulich schiebt σ die Plätze $i_1, \ldots, i_k$ auf den nächsten und den letzten auf den ersten und lässt alle anderen Elemente unangetastet.[1]

Lässt sich jede Permutation in 3-Zyklen zerlegen?

Aufgabe 5. In der Vorlesung haben Sie die Diedergruppen D_n kennengelernt.

(a) Zeigen Sie, daß D_4 nicht isomorph zu $\mathbb{Z}_8$ ist.

(b) Finden Sie eine echte[2] Untergruppe von D_4, die nicht isomorph zu keiner der Gruppen $\mathbb{Z}_n$ ist.

Aufgabe 6. Aus der Vorlesung: Die Quaterionengruppe[3] Q_8 hat die Elemente $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, wobei die Verknüpfung der formalen Multiplikation von Zahlen ähnelt, d.h. $(-x)(-y) = xy$ und $(-x)y = x(-y) = -(xy)$ für all $x, y \in Q_8$. Ausserdem gilt

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \ .$$

Es handelt sich allerdings um eine *nicht kommutative* Gruppe.
Bestimmen Sie die Verknüpfungstabelle (bzw. vervollständigen Sie)

$\circ$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1						
i	i		-1					
$-i$	$-i$							
j	j				-1			
$-j$	$-j$							
k	k						-1	
$-k$	$-k$							

ENDE

[1] Die 2-Zykel sind also genau die Transpositionen.

[2] Also weder die triviale Untergruppe, noch die Gruppe selbst

[3] Nota bene: Die Quaterionengruppe ist ein Teilaspekt der Quaterionen, die ab und zu in 3D-Computergrafik als kompakte Schreibweise verwendet werden.