Fakultät IV · Mathematik
Hannes Diener

Diskrete Mathematik für Informatiker, WS13/14

Übungsblatt **2**, Besprechung in den Übungen vom 11.–13. Nov.

Aufgabe 1. Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ und $C = \{1, 3, 7, 15\}$.
Berechnen Sie die folgenden Mengen:

(a) $A \cup B$ und $A \cap B$

(b) $A \backslash B$

(c) $A \cup (B \cap C)$

(d) $C \backslash (B \backslash A)$

(e) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Aufgabe 2. Finde Gegenbeispiele zu den folgenden Aussagen.

(a) $A \cup B \subseteq A \cap B$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

(c) $A \subseteq B \cup C$ impliziert, daß $A \subseteq B$ oder $A \subseteq C$.

(d) Aus $A \cup B = A \cup C$ folgt, daß $B = C$.

(e) Aus $A \cap B = A \cap C$ folgt, daß $B = C$.

Aufgabe 3. Für zwei Mengen A und B ist die *symmetrische Differenz* $A \triangle B$ definiert durch

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \ .$$

(a) Bestimmen Sie $A \triangle B$ für die Mengen aus Aufgabe 1.

(b) Zeigen Sie, daß für alle Mengen A, B gilt $A \triangle B = B \triangle A$.

(c) Zeigen Sie, daß für alle Mengen A, B und C gilt folgendes Distributivgesetz:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C) \ .$$

(d) Zeigen Sie, daß für alle Mengen A, B gilt, daß $A \triangle B = A$ genau dann wenn $B = \varnothing$.

Aufgabe 4. Sei $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade} \,\}$ und $C = \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ungerade} \,\}$

(a) Bestimmen Sie $A \cap B$, $B \cap C$, $B \cup C$ und $B \triangle C$.

(b) Welche der folgenden Mengen sind endlich? $A \triangle B$, $A \triangle C$, $A \backslash C$ und $C \backslash A$.

Aufgabe 5. Beweisen Sie, daß für alle Mengen E, F gilt:

(a) $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \cap F)$.

(b) $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$.

(c) Finden Sie außerdem ein Beispiel, daß zeigt, daß $\supseteq$ in der vorherigen Teilaussage nicht gilt.

Hinweis: Vergessen Sie nicht, daß $M \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow M \subseteq A$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, daß für eine (doppelt indizierte) Mengenfamilie gilt:

$$\bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} A_{i,j} \right) \subseteq \bigcap_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I} A_{i,j} \right) .$$

Geben Sie außerdem ein Beispiel an, das zeigt, daß die Umkehrung $\supseteq$ nicht gilt.

ENDE