

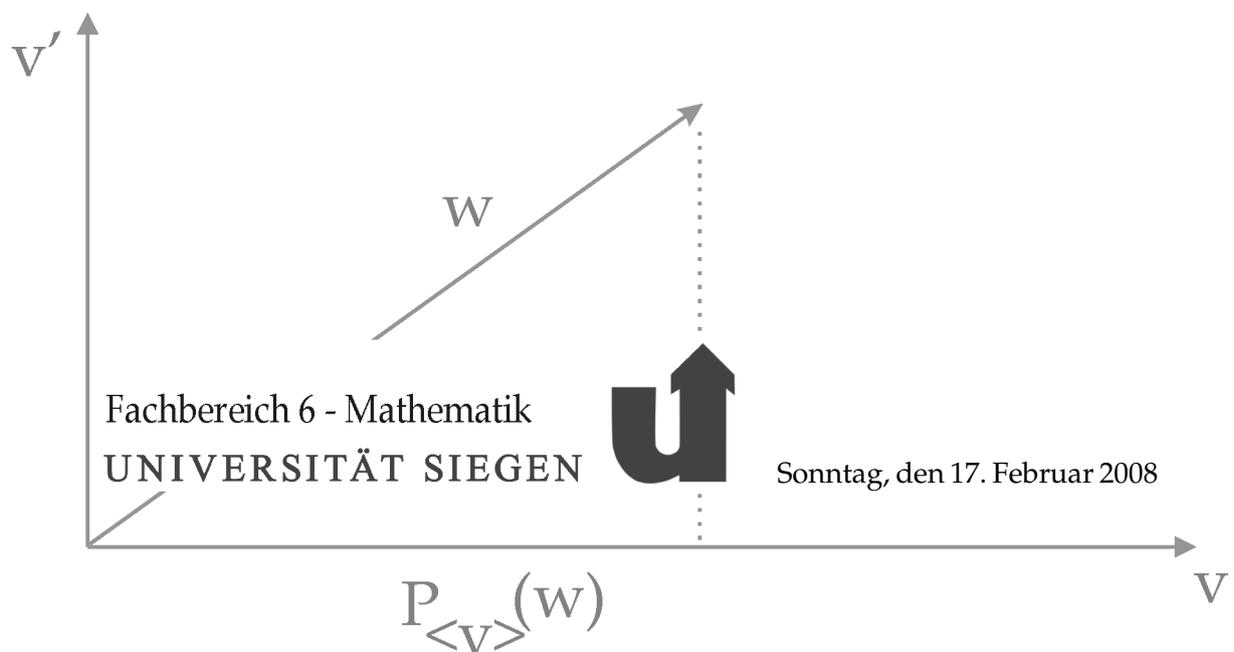
# Approximation in periodischen Räumen

THOMAS WICK

SS 2007 , WS 07/08

gelesen von

PROF. DR. FRANZ-J. DELVOS



Alle Rechte vorbehalten, auch die der Speicherung in elektronischen Medien.

Ein

**herzliches Dankeschön**

den Teilnehmern des Kurses Approximationstheorie im Sommersemester 2007, zur  
Ausarbeitung und Bereitstellung ihrer Seminarvorträge und Übungsaufgaben!



# Zusammenfassung

In dieser Vorlesung wird die Approximation in periodischen Räumen behandelt. Hinter sehr interessanten Resultaten stecken viele nützliche Hilfsmittel der Funktionalanalysis und der Fourier Analysis.

Grundlage der Vorlesung sind die Arbeiten von *Franz-Jürgen Delvos* und *Rainer Kress*. Als Basis dieses Skripts dient die Arbeit von F.-J. Delvos, *Approximation in periodic spaces*.

Die Grundlagen der Funktionalanalysis entstammen dem Buch von R. Kress, *Numerical Analysis* und sind von den Teilnehmern des Kurses in Seminaren erarbeitet worden. Zusätzliche Informationen findet der Leser im Werk von Dirk Werner, *Funktionalanalysis*.

**Viel Spaß beim Lesen!**



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Funktionalanalysis</b>	<b>9</b>
1.1	Normierte Räume . . . . .	9
1.2	Vollständigkeit . . . . .	14
1.3	Stetige lineare Abbildungen . . . . .	15
1.4	Banachalgebren . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Räume stetiger Funktionen</b>	<b>19</b>
2.1	Stetige periodische Funktionen . . . . .	19
2.2	Glatte periodische Funktionen . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Hilfsmittel der Analysis</b>	<b>27</b>
3.1	Translation . . . . .	27
3.2	Faltung . . . . .	28
3.3	Approximation . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Der Approximationssatz von Weierstrass</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Der Projektionssatz</b>	<b>41</b>
5.1	Beste Approximation . . . . .	41
5.2	Darstellungssatz von Fréchet-Riesz . . . . .	45
5.3	Der Satz des Pythagoras . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Approximation in speziellen Räumen</b>	<b>51</b>
6.1	Der Raum $C_{2\pi}$ als VR mit innerem Produkt . . . . .	51
6.2	Der Dualraum $\mathcal{L} = C_{2\pi}^*$ . . . . .	58
6.3	Wiener Algebra $A_{2\pi}$ . . . . .	73
6.4	Periodischer Sobolev-Raum $H_{2\pi}^1$ . . . . .	77
6.5	Periodische Hilberträume mit reproduzierendem Kern: $H_{2\pi}$ . . . . .	84
6.6	Periodische Hilberträume $H_d$ . . . . .	91
6.7	Bernoullipolynome/-funktionen in $H_{2\pi}^r$ . . . . .	98
6.8	Euler-Polynome . . . . .	111
<b>7</b>	<b>Quantitative Abschätzungen</b>	<b>113</b>
7.1	Das Landau-Symbol $\circ$ . . . . .	113
7.2	Quantitative Fourier-Approximation in $H_d$ . . . . .	114

<b>8</b>	<b>Interpolation in speziellen Räumen</b>	<b>121</b>
8.1	Interpolation mit $\langle g(x - x_0), \dots, g(x - x_N) \rangle$	121
8.2	Interpolation in $H_d^\pi$	124
8.3	Konvergenzsatz	130
8.4	Trigonometrische Interpolation in $H_d$	131
<b>9</b>	<b>Kardinale Approximation in harmonischen Hilberträumen</b>	<b>145</b>
9.1	Trigonometrische Approximation in periodischen Hilberträumen	145
9.2	Harmonische Hilberträume	151
<b>10</b>	<b>Aufgaben</b>	<b>159</b>
<b>11</b>	<b>Lösungen zu ausgewählten Aufgaben</b>	<b>163</b>

# 1 Funktionalanalysis

In der Funktionalanalysis werden wie in keinem zweiten Fach die Grundvorlesungen der Linearen Algebra und der Analysis verknüpft. Die Lineare Algebra stellt die geeignete Infrastruktur bereit, wie beispielsweise Vektorraumstrukturen, Algebren, Matrizen usw. Damit können dann tiefer liegende Probleme der Analysis studiert und strukturiert werden.

So werden Folgen und Funktionen als Punkte in einem geeigneten Vektorraum interpretiert. Grundlegende Fragestellungen und Probleme der Analysis werden durch Abbildungen auf einem solchen Raum behandelt. Zu nichttrivialen Aussagen kommt man aber erst, wenn der Vektorraum mit einer Norm versehen wird und dann analytische Eigenschaften, wie z.B. Konvergenz, Stetigkeit, etc, untersucht werden können.

Die Funktionalanalysis verschlankt somit viele Prozesse der Analysis und der Numerik, und stellt geeignete Hilfsmittel zur präzisen Formulierung mathematischer Sachverhalte dar.

## 1.1 Normierte Räume

Sei  $X$  ein linearer Raum. Die Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Norm, falls

- i)  $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$  (Positivität)
- ii)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (Definitheit)
- iii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \alpha \in \mathbb{K}$  (Homogenität)
- iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (Dreiecksungleichung)

Wir sprechen bei einem Raum  $X$  in dem die Normeigenschaften erfüllt sind von einem normierten Raum und schreiben kurz  $(X, \|\cdot\|)$ .

**Beispiele.**

- i) Die  $l^1$ -Norm ist gegeben durch

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$$

- ii) Wir definieren die  $l^2$ -Norm, auch Euklidische Norm genannt, mit

$$\|x\|_2 := \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

iii) Maximum-Norm ( $l^\infty$ -Norm):

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

**Bemerkung 1.1.1** (Zweite Dreiecksungleichung)

Nach unten gilt folgende Abschätzung

$$||x| - |y|| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$$

Rechnung.

Es gilt einerseits

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

D.h.

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Andererseits erhalten wir

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$

Also

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

Zusammen folgt dann die Behauptung. □

Wir nennen

$$\|x - y\| \quad \text{den Abstand von } x \text{ zu } y$$

**Definition 1.1.2** (Konvergente Folge)

Sei  $X$  ein normierter Raum und sei die Folge  $(x_n) \in X$  gegeben. Die Folge  $(x_n)$  heisst konvergent, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

D.h.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ :

$$\|x_n - x\| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N_\varepsilon$$

**Satz 1.1.3** Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

*Beweis.*

Seien  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Dann

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|x - x_n + x_n - y\| \\ &\leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\| \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Damit folgt wegen der Definitheit

$$\|x - y\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

□

**Definition 1.1.4** Zwei Normen auf einem Linearraum heißen äquivalent, wenn sie die gleichen konvergenten Folgen haben.

**Satz 1.1.5** Die Normen  $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$  auf  $X$  heißen genau dann äquivalent, wenn zwei Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  existieren, so dass

$$C_1\|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C_2\|x\|_A \quad \forall x \in X$$

Die Grenzwerte unter den Normen stimmen überein.

*Beweis.*

$\implies$ :

i) Annahme: Die Äquivalenz gilt, ohne dass ein  $C_2 > 0$  existiert, mit

$$\|x\|_B \leq C_2\|x\|_A \quad \forall x \in X$$

Das bedeutet, für alle  $C_2 > 0$  gibt es ein  $x \in X$  mit

$$\|x\|_B \geq C_2\|x\|_A$$

Damit existiert eine Folge  $(x_n)$  mit  $\|x_n\|_A = 1$ . Wählt man  $C_2 = n^2$ , so erhält man

$$\|x_n\|_B \geq C_2\|x_n\|_A = n^2 \cdot 1$$

Wir definieren nun

$$y_n := \frac{x_n}{n}$$

Dann ergibt sich folgende Argumentation

$$\|y\|_A = \frac{\|x_n\|_A}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

und

$$\|y_n\|_B = \frac{\|x_n\|_B}{n} \geq \frac{n^2}{n} = n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

Dies widerspricht der Voraussetzung, dass die Grenzwerte unter den Normen übereinstimmen.

ii) Die zweite Ungleichung wird analog bewiesen.

$\longleftarrow$ :

$$\exists C_1, C_2 > 0 : \quad C_1\|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C_2\|x\|_A \quad \forall x \in X$$

i) Es gilt

$$\|x_n - x\|_A \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Dann folgt

$$C_1\|x_n - x\|_A \leq \|x_n - x\|_B \leq \|x_n - x\|_A$$

Da  $\|x_n - x\|_B$  von den beiden Abschätzungen in der  $\|\cdot\|_A$ -Norm eingeschlossen wird, folgt

$$\|x_n - x\|_B \rightarrow 0$$

ii) Andererseits gelte

$$\|x_n - x\|_B \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Dann ist

$$\underbrace{C_1 \|x_n - x\|_A}_{\geq 0} \leq \underbrace{\|x_n - x\|_B}_{\rightarrow 0 \text{ n.V.}} \leq \underbrace{\|x_n - x\|_A}_{\geq 0}$$

Daraus folgt sofort die Konvergenz beider Normen.

□

Es bezeichne im weiteren Verlauf  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  den Skalarenkörper des Vektorraums  $X$ .

**Satz 1.1.6** (*Äquivalenz von Normen*)

Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum  $X$  sind alle Normen äquivalent.

*Beweis.*

Der Raum  $X$  wird aufgespannt durch die Vektoren  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ . Insbesondere ist  $\dim(X) = n$  endlich. Alle Vektoren  $x$  aus dem Raum  $X$  können als Linearkombinationen dargestellt werden:

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \quad \forall x \in X$$

Es wird nun für jede beliebige Norm die Äquivalenz zur Maximum-Norm gezeigt.

i) Wir kennen

$$\|x\|_\infty = \max_j |\alpha_j|$$

Sei nun  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $X$ . Wir schreiben

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \|\alpha_j x_j\| = \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \|x_j\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \max_i |\alpha_i| \|x_j\| = \max_i |\alpha_i| \sum_{j=1}^n \|x_j\| \\ &= C \cdot \|x\|_\infty \end{aligned}$$

ii) Annahme: Es existiert kein  $C_1 > 0$  mit

$$C_1 \|x\|_\infty \leq \|x\| \quad \forall x \in X$$

Analog zum Beweis von Satz (1.1.5) existiert dann eine Folge  $(x_\nu)$  mit

$$\|x_\nu\| = 1 \quad \text{und} \quad \|x_\nu\|_\infty \geq \nu$$

Definition der Folge

$$y_\nu := \frac{x_\nu}{\|x_\nu\|_\infty} \Rightarrow \|y_\nu\|_\infty = 1 \quad \forall \nu$$

Außerdem gilt per Linearkombination

$$y_\nu = \sum_{j=1}^n \alpha_{j,\nu} x_j$$

Hieraus folgt, dass die Folge  $(\alpha_{j,\nu}), j = 1, \dots, n$ , beschränkt in  $\mathbb{K}$  ist. Nach  $n$ -facher Anwendung des Satzes von Bolzano-Weierstrass erhalten wir die Teilfolgen

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \alpha_{j,\nu(l)} \rightarrow \alpha_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

Das impliziert

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|y_{\nu(l)} - y\|_\infty \rightarrow 0, \quad \text{mit } y := \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|y_{\nu(l)} - y\| &\stackrel{i)}{\leq} C_2 \|y_{\nu(l)} - y\|_\infty \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \|y_{\nu(l)} - y\| &\rightarrow 0 \quad (l \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Wir führen nun den angestrebten Widerspruch herbei, da ebenfalls gilt

$$\|y_\nu\| = \frac{\|x_\nu\|}{\|x_\nu\|_\infty} = \frac{1}{\|x_\nu\|_\infty} \leq \frac{1}{\nu} \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty)$$

und damit  $y = 0$  ist und  $\|y_{\nu(l)}\|_\infty \rightarrow 0$  für  $l \rightarrow \infty$ . Das ist aber der Widerspruch zur vorherigen Annahme, dass  $\|y_\nu\|_\infty = 1$  für alle  $\nu$ . Also existiert eine Konstante  $C_1$  mit

$$C_1 \|x\|_\infty \leq \|x\|$$

Somit ist der Beweis erbracht. □

### Definition 1.1.7 (Abgeschlossenheit)

Sei  $X$  ein normierter Raum. Die Teilmenge  $U \subset X$  heißt abgeschlossen, falls  $U$  die Grenzwerte aller konvergenten Folgen in  $U$  enthält.  $\bar{U}$  heißt Abschluss von  $U$ , falls  $\bar{U}$  alle Grenzwerte der Folgen in  $U$  enthält.

**Satz 1.1.8** Jede beschränkte Folge in einem endlich-dimensionalen Raum  $X$  hat eine konvergente Teilfolge.

*Beweis.*

Sei  $X := \langle u_1, \dots, u_n \rangle$  und  $(x_\nu)$  eine beschränkte Folge

$$x_\nu = \sum_{j=1}^n \alpha_{j,\nu} u_j$$

Wie zuvor ist  $(\alpha_{j,\nu})$  beschränkt in  $\mathbb{K}$ . Dann existieren nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass konvergente Teilfolgen

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \alpha_{j,\nu(l)} \rightarrow \alpha_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Also

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_{\nu(l)} \rightarrow \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \in X$$

□

## 1.2 Vollständigkeit

Wichtiges Hilfsmittel sind die Cauchy-Folgen. Eine Folge  $(x_n)$  von Elementen eines normierten Raumes  $X$  wird Cauchy-Folge genannt, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon)$$

Es ist klar, dass jede konvergente Folge die Cauchy-Eigenschaft besitzt. Im Allg. ist die Umkehrung aber nicht richtig.

**Satz 1.2.1** *Jede konvergente Folge  $(x_n)$  ist eine Cauchy-Folge.*

*Beweis.*

Sei  $(x_n)$  eine Folge mit dem Grenzwert  $x$ . Zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  mit

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_\varepsilon$$

Wir erhalten durch künstliche Erweiterung, und anschließend unter Anwendung der Dreiecksungleichung, die Abschätzung

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon$$

□

**Definition 1.2.2** *Ein metrischer Raum in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt vollständig. Ein vollständiger normierter Raum wird Banachraum genannt.*

*Analog: Ein vollständiger Praehilbertraum wird Hilbertraum genannt.*

**Satz 1.2.3** *Jeder endlich-dimensionale, normierte Raum  $X$  ist ein Banachraum.*

*Beweis.*

Sei der Raum  $X$  aufgespannt durch die Vektoren  $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ . Wir definieren eine Cauchy-Folge  $(x_\nu)$  durch

$$x_\nu = \sum_{j=1}^n \alpha_{j,\nu} u_j$$

Dann gibt es eine Konstante  $C > 0$ :

$$\max_j |\alpha_{j,\nu} - \alpha_{j,\mu}| \leq C \|x_\nu - x_\mu\| \quad \forall \nu, \mu \in \mathbb{N}$$

Damit ist  $(\alpha_{j,\nu})$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}$ . Weiter

$$\exists \alpha_j : \lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha_{j,\nu} \rightarrow \alpha_j \quad , j = 1, \dots, n$$

da in  $\mathbb{K}$  das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz genügt. Letztendlich

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x_\nu \rightarrow x := \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j \in X$$

□

Es sei kurz die Taktik bei Vollständigkeitsbeweisen dargelegt. Man nehme zunächst eine Cauchy-Folge  $(x_n)$  aus dem Raum  $X$ , dann zeigt man der Reihe nach:

- i) Konstruktion eines Grenzelements  $x$ ,
- ii) man zeige, dass  $x$  in dem Raum  $X$  enthalten ist,
- iii) man überprüfe, ob im Sinne der zugehörigen Norm,  $x_n \rightarrow x$  konvergiert.

Allerdings gibt es eine einfachere Variante, falls die Vollständigkeit für Räume gezeigt werden soll, die bereits als Unterräume von Banachräumen erkannt worden sind. Dann reicht es, die Abgeschlossenheit des Unterraums zu zeigen:

**Lemma 1.2.4** *Es gelten,*

- i) *Ist  $X$  ein Banachraum und  $U$  ein abgeschlossener Unterraum von  $X$ , so ist  $U$  vollständig.*
- ii) *Falls  $X$  ein normierter Raum ist, und  $U$  ein vollständiger Unterraum von  $X$ , dann ist  $U$  abgeschlossen.*

*Beweis.* Möge der aufmerksame Leser selbst tun.

Später wird der Vollständigkeitsbeweis für den Raum  $C_b(\mathbb{R})$  der stetigen beschränkten Funktionen ausführlich gezeigt.

## 1.3 Stetige lineare Abbildungen

Wie oben angedeutet, werden in der linearen Funktionalanalysis ständig stetige lineare Abbildungen betrachtet. Dazu definiert man

**Definition 1.3.1** *(Operator, Funktional)*

*Eine stetige lineare Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  zwischen normierten Räumen wird stetiger Operator genannt. Wird in den Skalarenkörper abgebildet, also  $T : X \rightarrow \mathbb{K}$ , spricht man von einem Funktional.*

**Definition 1.3.2** *Der oben definierte Operator  $T : X \rightarrow Y$  erfüllt die Linearitätsbedingungen*

$$T(ax + by) = aTx + bTy, \quad \forall x, y \in X \text{ und alle } a, b \in \mathbb{K}.$$

Man erwähne die verschiedenen Charakterisierungen der Stetigkeit

**Satz 1.3.3** *Es seien  $X$  und  $Y$  normierte Räume, und die Abbildung  $T : X \rightarrow Y$  sei linear. Dann sind die nächsten Aussagen äquivalent*

- i)  *$T$  ist stetig.*
- ii)  *$T$  ist stetig in einem Punkt (insbesondere bei 0).*

iii) Es gibt eine Konstante  $M \geq 0$  mit

$$\|Tx\| \leq M \|x\| \quad \forall x \in X$$

iv)  $T$  ist gleichmäßig stetig

Wir benutzen in der Approximationstheorie häufig Eigenschaft iii). Es sei weiter angemerkt, dass man oft  $Tx$  statt  $T(x)$  schreibt.

Da stetige Operatoren mit obigem Satz die Einheitskugel

$$\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

auf eine beschränkte Menge abbilden, wird auch oft von beschränkten Operatoren gesprochen. In diesem Kontext sind daher Stetigkeit und Beschränktheit von Operatoren äquivalent.

Bereits in der linearen Algebra wird der Raum  $L(X, Y)$  der stetigen linearen Abbildungen eingeführt. Dieser Raum ist selbst wieder ein Vektorraum. Den Beweis möge der Leser selbst erbringen. Auf dem Raum  $L(X, Y)$  kann dann ebenfalls eine Norm definiert werden. Dazu der nächste Satz.

**Satz 1.3.4** Man definiert die Operatornorm auf  $L(X, Y)$  mit

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$$

Außerdem kann gezeigt werden, falls  $Y$  vollständig ist - unabhängig von der Vollständigkeit von  $X$  - dann der Operatorraum  $L(X, Y)$  auch vollständig ist. Diese Aussage wird weiter unten einige Male ausgenutzt werden.

**Lemma 1.3.5** Seien  $X, Y, Z$  normierte Vektorräume und seien die Operatoren  $T : X \rightarrow Y$  und  $T' : Y \rightarrow Z$  beschränkt. Dann ist das Produkt  $T'T : X \rightarrow Z$ , definiert durch  $(T'T)(x) := T'(Tx)$  für alle  $x \in X$  ebenfalls beschränkt mit der Norm

$$\|T'T\| \leq \|T\| \cdot \|T'\|$$

## 1.4 Banachalgebren

Zunächst wird die Definition einer Algebra vorgestellt, um anschließend den Begriff auf Banachräume zu übertragen.

Eine Algebra ist ein Vektorraum, in dem neben Vektoraddition und skalarer Multiplikation eine innere Multiplikation von Vektoren zugelassen ist.

**Definition 1.4.1** (*Algebra*)

Eine Algebra  $A$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ , in dem Addition und Multiplikation derart definiert sind, dass  $(A, +, \cdot)$  ein Ring ist und dass

$$\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y) \quad \forall x, y \in A, \lambda \in \mathbb{K}$$

Wir übertragen die Definition sofort auf komplexwertige Banachräume

**Definition 1.4.2** Es sei der komplexe Banachraum  $A$  gegeben und die Multiplikation  $(x, y) \mapsto xy := x \cdot y$  eine assoziative bilineare Abbildung von  $A \times A \rightarrow A$ . Weiter gilt dann

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in A$$

Dann wird  $(A, \|\cdot\|)$  eine Banachalgebra genannt. Sie heißt

i) kommutativ, falls

$$xy = yx \quad \forall x, y \in A,$$

ii) und es gibt eine Einheit  $e \in A$ , falls

$$ex = xe = x \quad \forall x \in A$$

Eine Banachalgebra hat höchstens eine Einheit. Wir listen noch die algebraischen Eigenschaften der Multiplikation auf

$$\begin{aligned} x(y + z) &= xy + xz \\ (x + y)z &= xz + yz \\ x(yz) &= (xy)z \\ \lambda(xy) &= (\lambda x)y = x(\lambda y) \end{aligned}$$



## 2 Räume stetiger Funktionen

### 2.1 Stetige periodische Funktionen

In diesem Abschnitt werden einige vorbereitende Hilfsmittel über stetige Räume eingeführt. Sowie der Raum  $C_{2\pi}$  der stetigen  $2\pi$ -periodischen Funktionen, der im weiteren Verlauf immer wieder auftauchen wird und die Grundlage der Vorlesung bildet.

#### Vektorraum der beschränkten Funktionen

Man definiert mit

$B(\mathbb{R})$  den VR der beschränkten Funktionen

mit der Supremumsnorm  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ . Als Beispiel von beschränkten Funktionen seien die Treppenfunktionen genannt.

Die Gesamtheit aller stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  wird mit  $C(\mathbb{R})$  bezeichnet.

Der Schnitt von  $B(\mathbb{R})$  mit dem Raum der stetigen Funktionen  $C(\mathbb{R})$  ergibt gerade den Raum der stetigen beschränkten Funktionen:

$$C(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R}) = C_b(\mathbb{R})$$

#### Vektorräume stetiger Funktionen

Zum Raum  $C(\mathbb{R})$  der stetigen Funktionen lassen sich eine ganze Reihe von Untervektorräumen konstruieren.

**Definition 2.1.1** *Der Vektorraum der stetigen beschränkten Funktionen genügt*

$$f \in C_b(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty$$

dabei wird durch  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$  die Supremumsnorm festgelegt.

Wir erhalten sogleich den ersten wichtigen Satz, der zeigt, dass der Raum  $C_b(\mathbb{R})$  mit der Supremumsnorm zu einem Banachraum wird.

**Satz 2.1.2** *Die Menge  $C_b(\mathbb{R})$  wird mit der Supremumsnorm ein vollständiger normierter Vektorraum, sprich ein Banachraum.*

Aufgrund des Lemmas (1.2.4) wäre lediglich zu zeigen, dass die Cauchy-Folge  $(f_n)$  in  $C_b(\mathbb{R})$  gegen ein Element  $f$  aus  $B(\mathbb{R})$  konvergiert. Wegen der Abgeschlossenheit (diese muss gezeigt werden!) wäre dann sogar  $f \in C_b(\mathbb{R})$ .

Um ein Gefühl für Vollständigkeitsbeweise zu bekommen, führen wir den kompletten Beweis gemäß der im vorherigen Kapitel vorgestellten Taktik.

*Beweis.*

1) EXISTENZ VON  $f$

Es sei  $(f_n)$  Cauchy-Folge in  $C_b(\mathbb{R})$ . Dann gibt es für alle  $\varepsilon > 0$  einen Index  $N := N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|f_n - f_m\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N \quad (2.1)$$

Für festes  $x \in \mathbb{R}$  ist  $(f_n(x))$  Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}$ . Da der Raum  $\mathbb{K}$  vollständig ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$$

2) BESCHRÄNKHEIT VON  $f$

Es gelte wieder die Cauchy-Eigenschaft (2.1). Für  $m \rightarrow \infty$  ergibt sich

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq N$$

Übergang zur Supremumsnorm liefert

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Insbesondere

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \|f_N + f - f_N\|_\infty \\ &\leq \|f_N\|_\infty + \|f - f_N\|_\infty \\ &\leq \|f_N\|_\infty + \varepsilon \\ &< \infty \end{aligned}$$

Das heißt,  $f$  ist beschränkt.

3) STETIGKEIT VON  $f$

Wähle eine Folge von stetigen beschränkten Funktionen  $(f_n)$  aus  $C_b(\mathbb{R})$ . Zu zeigen ist, dass die Folge  $(f_n)$  im Sinne der Supremumsnorm gegen die Grenzfunktion  $f$  konvergiert. Wir kennen den Beweis bereits aus Analysis I und wollen ihn nochmals führen.

Zu einem  $\varepsilon > 0$  gibt es einen Index  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\|f_N - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Es sei  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Da die Funktionen  $f_N$  stetig sind existiert ein  $\delta > 0$ , und laut der Definition der Stetigkeit folgt

$$|x_0 - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt für eine Stelle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x_0 - x| < \delta$  die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(x_0)| + \|f - f_N\|_\infty \\ &\leq 2\|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ &\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Damit ist  $f$  stetig bei  $x_0$  und Beweis ist geführt. Wir halten fest, dass  $C_b(\mathbb{R})$  ein Banachraum ist. □

Desweiteren wollen wir die Räume der stetigen Funktionen aufführen, die im Unendlichen verschwinden.

**Definition 2.1.3** Vektorraum der stetigen beschränkten Funktionen die im Unendlichen verschwinden

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : |f(x)| \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty\}$$

und den Raum mit kompakten Träger

$$C_{00}(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : |f(x)| = 0 \text{ für alle } x \text{ mit } |x| > R\}$$

Die Konstante  $R$  hängt dabei von  $f$  ab.

Für die oben aufgeführten Räume gilt

$$C_{00}(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$$

Wir definieren nun den Raum der stetigen periodischen Funktionen, der für die Approximationstheorie die nötigen Grundlagen bereitstellt.

**Definition 2.1.4** (Raum der  $2\pi$ -periodischen Funktionen)

Wir setzen

$$C_{2\pi} := C_{2\pi}(\mathbb{R}) = C(\mathbb{T}) = \{u \in C(\mathbb{R}) : u(x + 2\pi) = u(x)\}$$

mit  $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$ .

Es gilt wie oben

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$$

mit der Supremumsnorm

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |u(x)|$$

Die Operationen der Addition und deren skalaren Multiplikation genügen

$$\text{i) } (u + v)(x) = u(x) + v(x), \quad u, v \in C_{2\pi}, x \in \mathbb{R},$$

$$\text{ii) } (au)(x) = a \cdot u(x), \quad u \in C_{2\pi}, x \in \mathbb{R}.$$

Desweiteren kann auf  $C_{2\pi}$  in natürlicher Weise eine Multiplikation definiert werden:

$$(uv)(x) = u(x) \cdot v(x), \quad u, v \in C_{2\pi}, x \in \mathbb{R}.$$

So wird der Raum  $C_{2\pi}$  zu einer kommutativen Algebra und wir erhalten zusammengefasst

**Satz 2.1.5** Der Raum  $C_{2\pi}$  ist eine kommutative Algebra. Es seien  $u, v \in C_{2\pi}$  und  $\gamma \in \mathbb{C}$  gegeben. Dann gilt

- i)  $u + v \in C_{2\pi}$
- ii)  $\gamma \cdot u \in C_{2\pi}$
- iii)  $u \cdot v \in C_{2\pi}$
- iv)  $1 \in C_{2\pi}$  (Einselement)
- v)  $x^j \notin C_{2\pi}$  ( $j > 0$ )

Um analytische Eigenschaften, wie z.B. Stetigkeit, Konvergenzprobleme, Cauchy-Folgen, usw. auf einem Vektorraum studieren zu können, wird eine Norm eingeführt. Die zugeordnete Norm des  $C_{2\pi}$  ist

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |u(x)| \quad \text{für } u \in C_{2\pi}$$

Die Norm induziert in natürlicher Weise eine Metrik

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

mit der Eigenschaft

$$\|u \cdot v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Der nächste Satz fasst die wichtigen Eigenschaften des  $C_{2\pi}$  kurz zusammen:

**Satz 2.1.6** Der Raum  $C_{2\pi}$  ist eine Banachalgebra.

*Beweis.*

Es wird nur die Vollständigkeit gezeigt. Die Verifikation der Algebra-Eigenschaften wird dem Leser überlassen. Es sei  $(u_n)$  eine Cauchy-Folge aus  $C_{2\pi}$ , für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Zahl  $m_0 \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\|u_m - u_{m+r}\| \leq \varepsilon \quad \text{für } m \geq m_0 \text{ und } r \geq 0$$

Die Folge  $(u_n)$  konvergiert gleichmäßig auf  $[0, 2\pi]$  gegen eine stetige Funktion  $u \in C[0, 2\pi]$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $u$  sogar in  $C_{2\pi}$  liegt. Es gilt nach Voraussetzung

$$u_n(x + 2\pi) = u_n(x)$$

Daraus folgt

$$u(2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(2\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0) = u(0)$$

Aufgrunddessen kann nun

$$u(x + 2\pi k) := u(x) \quad (x \in [0, 2\pi], k \in \mathbb{Z})$$

gesetzt werden und wir schließen aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $(u_n)$  gegen  $u$ , dass  $u$  in  $C_{2\pi}$  liegt.

□

Ebenso kann gezeigt werden, dass  $C_0(\mathbb{R})$  eine Banachalgebra ist.

**Beispiel.**

Wir geben eine Konstruktion einer Funktion  $g \in C_0(\mathbb{R})$ .

$$g(x) = \frac{f(x)}{1 + |x|} \in C_0(\mathbb{R}), \quad f \in C_b(\mathbb{R})$$

Wir kehren zu dem Raum  $C_{2\pi}$  zurück. Für das weitere Studium sind die trigonometrischen Polynome von entscheidender Relevanz. Deren Definition geschieht mit Hilfe der komplexwertigen Exponentialfunktion, die bekanntlicherweise die Periode  $2\pi i$  hat. Die ständig wiederkehrenden Basisfunktionen  $x \mapsto e^{ikx}$  erhalten die Bezeichnung

$$e_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad e_k(x) := e^{ikx} \in C_{2\pi}$$

Mit der Eulerschen Formel erhält man die bekannten Identitäten

$$\begin{aligned} e_k(x) + \overline{e_k(x)} &= \cos kx \cdot 2 \in C_{2\pi} \\ e_k(x) - \overline{e_k(x)} &= \sin kx \cdot 2i \in C_{2\pi} \end{aligned}$$

Damit können die trigonometrischen Polynome vom Grad  $\leq n$  als Linearkombinationen von  $e_{-n}, \dots, e_0, \dots, e_n$  geschrieben werden.

## 2.2 Glatte periodische Funktionen

Wir definieren den Begriff der Glattheit und führen anschließend die trigonometrischen Polynome ein.

**Beispiel.**

Für  $R > 1$  erhält man beispielsweise die *glatte* Funktion

$$\frac{1}{R - \cos kx}$$

Es sei  $u \in C_{2\pi}$  eine stetig differenzierbare Funktion. Falls  $Du = u'$  gilt, dann ist  $u' \in C_{2\pi}$ . Dazu die Grenzwertbetrachtung

$$\begin{aligned} u'(x + 2\pi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + 2\pi + h) - u(x + 2\pi)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} \\ &= u'(x) \end{aligned}$$

Wir definieren den Begriff der Glattheit:

**Definition 2.2.1 (Glattheit)**

Die Funktion  $u \in C_{2\pi}$  ist genau dann glatt, wenn

$$D^k u \in C_{2\pi}, \quad k \geq 0$$

Den Teilraum der glatten periodischen Funktionen bezeichnen wir mit  $P_{2\pi} \subset C_{2\pi}$ . Die Funktion  $u$  ist also genau dann glatt, wenn  $u \in P_{2\pi}$ . Dann liegen auch alle Ableitungen von  $u$  in  $P_{2\pi}$ .

Der Raum  $P_{2\pi}$  ist selbst ein Vektorraum mit Einselement  $1 \in P_{2\pi}$ . Allerdings gilt nicht die Gleichheit  $P_{2\pi} = C_{2\pi}$ , da die stetige Funktion  $|\sin x|$  nicht differenzierbar ist.

Desweiteren liegen die Basisfunktionen  $e_k(x)$  in  $P_{2\pi}$ .

**Korollar 2.2.2** *Der Raum  $P_{2\pi} \subset C_{2\pi}$  ist eine Unteralgebra.*

Für die weiteren Betrachtungen werden oft endliche Summen eine Rolle spielen. Dazu werden die folgenden abkürzenden Schreibweisen eingeführt

$$\sum_{k=-n}^n =: \sum_{|k| \leq n} =: \sum_{(k)}, \quad k \text{ endlich}$$

Nachfolgend werden die trigonometrischen Polynome hergeleitet. Es sei  $\tau$  der Vektorraum der trigonometrischen Polynome. Man sieht leicht, dass  $\tau$  ein Unterraum von  $P_{2\pi}$  sein muß.

Unter einem trigonometrischen Polynom versteht man eine Funktion  $T \in \tau$  mit den komplexwertigen Koeffizienten  $c_k$ , gegeben durch

$$T(x) = \sum_{(k)} c_k e^{ikx}$$

Wir erinnern uns an die allgemeineren Laurent-Reihen der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad (\text{hier } z = e^{ix})$$

und leiten so eine präzisere Darstellung der  $T(x)$  her. Für ein Polynom  $T \in \tau_m$  vom Grad  $\leq m$  gilt

$$T(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}$$

Die wichtigsten Tatsachen des Raumes  $\tau$  sind im nächsten Satz zusammengefasst:

**Satz 2.2.3** *Die endlichdimensionalen Teilräume  $\tau_m$  haben Dimension  $2m + 1$  und stellen mit der abzählbaren Vereinigung den Gesamttraum  $\tau$  dar*

$$\tau = \bigcup_{m=0}^{\infty} \tau_m$$

Desweiteren ist  $\tau$  eine Unteralgebra von  $P_{2\pi}$  und natürlich auch von  $C_{2\pi}$ .

Falls  $T \in \tau_m$ , dann sind  $DT, D^2T, \dots \in \tau_m$ .

**Beispiel.**

Das nachfolgende rationale trigonometrische Polynom liegt nicht in  $\tau$  und liefert somit ein Gegenbeispiel zur Annahme  $\tau = P_{2\pi}$ ,

$$P_b(x) = \frac{\sinh b}{\cosh b - \cos x}$$

Die Funktion  $P_b(x)$  liegt für jede positive reelle Zahl  $b$  in  $P_{2\pi}$ . Aber nicht in  $\tau$ . Daher gilt  $\tau \neq P_{2\pi}$ .

**Lemma 2.2.4** Für  $h \in \mathbb{R}$  und  $T \in \tau_m$  gilt

$$T(x+h) = S(x) \in \tau_m$$

*Beweis.*

Es ist

$$T(x+h) = \sum_{(k)} c_k e^{ik(x+h)} = \sum_{(k)} (e^{ikh} c_k) \cdot e^{ikx}$$

□

**Beispiel.**

Wir geben ein Beispiel einer stetigen Funktion auf  $[-\pi, \pi]$ .

$$f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{\pi}\right)_+$$

wobei

$$z_+ = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zur Illustration skizzieren wir die Funktion,

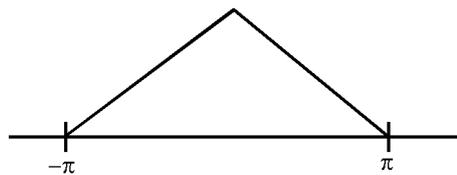


Abbildung 2.1: Hutfunktion auf  $[-\pi, \pi]$



### 3 Hilfsmittel der Analysis

Zunächst werden wesentliche Begriffe der Analysis eingeführt. Anschließend wird gezeigt, dass der Raum  $P_{2\pi}$  dicht in  $C_{2\pi}$  liegt. Diese Aussage wird anschließend für Polynome verschärft, und mündet dann in den Satz von Weierstrass. Mehr dazu im nächsten Kapitel.

#### 3.1 Translation

Wir legen die Translation um  $t$  einer Funktion wie folgt fest:

$$T_t u(x) = u(x - t)$$

Eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $u \in C_{2\pi}$  die um  $t$  verschoben wird, also  $T_t u$ , liegt wieder in  $C_{2\pi}$ . Die Menge aller linearen Translationen wird mit  $L(C_{2\pi})$  bezeichnet. Für  $T_t \in L(C_{2\pi})$  gelten die Eigenschaften

- i)  $T_t(u \cdot v)(x) = T_t(u)(x) \cdot T_t(v)(x)$
- ii)  $\|T_t u\|_\infty = \|u\|_\infty$
- iii)  $T_t^{-1} = T_{-t}$
- iv)  $T_h T_{h'} = T_{h+h'} = T_{h'} T_h$

**Lemma 3.1.1** Für eine stetig differenzierbare Funktion  $u \in C_{2\pi}^1$  gilt

$$T_t D = D T_t$$

*Beweis.*

Wir arbeiten mit  $u(x) = e^{ikx}$  und  $v(x) = u(x - t) = e^{-ikt} \cdot e^{ikx}$ .

RECHTE SEITE.

$$Dv(x) = ike^{-ikt} \cdot e^{ikx} = D T_t u(x)$$

LINKE SEITE.

$$T_t D e_k(x) = T_t(ike_k(x)) = ike^{ik(x-t)} = ike^{-ikt} e^{ikx}$$

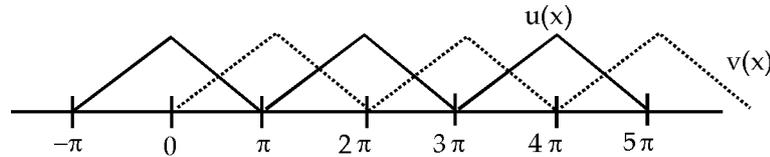
Vergleich beider Seiten liefert die Behauptung. □

**Beispiel.**

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \left(1 - \frac{|x|}{\pi}\right)_+$$

Es seien  $u(x) = f_*(x)$  und die verschobene Funktion  $v(x) := T_\pi u(x) = u(x - \pi)$  skizziert:

Abbildung 3.1: Translation der Funktion  $u(x)$  um  $\pi$  Einheiten nach rechts

## 3.2 Faltung

Ein weiterer integraler Bestandteil der Analysis ist die Faltung. Als Motivation sei angemerkt, dass die Faltung zweier Funktionen zu mehr Glätte führt, und somit zu günstigeren Eigenschaften für weitere Untersuchungen. Je mehr Glätte, desto besser.

### Definition 3.2.1 (Faltung)

Es seien  $u, v \in C_{2\pi}$  vorgegeben. Dann wird durch die Vorschrift

$$u * v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x-y)v(y) dy$$

die Faltung von  $u$  und  $v$  festgelegt.

Man erhält

$$\|u * v\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty} \cdot \|v\|_{\infty}$$

Wir listen nun weitere Eigenschaften der Faltung auf.

**Satz 3.2.2** Für zwei Funktionen  $u, v \in C_{2\pi}$  liegt das Faltungsprodukt  $u * v$  wieder in  $C_{2\pi}$  und es gelten

- i)  $u * v = v * u$
- ii)  $(\alpha u) * v = \alpha u * v, \quad \alpha \in \mathbb{K}$
- iii)  $(u_1 + u_2) * v = u_1 * v + u_2 * v$
- iv)  $u_1 * (u_2 * u_3) = (u_1 * u_2) * u_3$
- v)  $T_t(u * v) = (T_t u) * v = u * (T_t v)$

*Beweis.*

zu i)

$$\begin{aligned} u * v(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x-y)v(y) dy \\ &\quad \text{Subst. } y' = x - y, y = x - y', \frac{dy}{dy'} = -1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi+x}^x u(y')v(x-y')dy' \cdot (-1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_x^{2\pi+x} u(y')v(x-y')dy' \\ &= v * u(x) \end{aligned}$$

zu ii)

$$(\alpha u) * v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha u(x-y)v(y) dy = \alpha \cdot u * v(x)$$

zu iii)

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2) * v(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_1(x-y) + u_2(x-y)] \cdot v(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(x-y)v(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(x-y)v(y) dy \\ &= u_1 * v(x) + u_2 * v(x) \end{aligned}$$

**Bemerkung.**

Sei  $\varphi \in C_{2\pi}$  gegeben. So gilt für das Integral

$$\phi(z) := \int_z^{2\pi+z} \varphi(t) dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt$$

Dann gilt für die Ableitung

$$\phi'(z) = \varphi(z+2\pi) - \varphi(z) = 0$$

und weiter  $\phi(z) \equiv \phi(0)$ .

zu v)

$$\begin{aligned} T_t(u * v)(x) &= (u * v)(x-t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x-t-y)v(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_t u(x-y)v(y) dy \\ &= (T_t u) * v(x) \end{aligned}$$

zu iv)

$$\begin{aligned} [(u_1 * u_2) * u_3](x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1 * u_2(x-y) u_3(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dy \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(x-y-s) \cdot u_2(s) ds \right] u_3(y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dy \cdot u_3(y) \int_0^{2\pi} ds \cdot u_1(x-y-s) \cdot u_2(s) \\ &\quad \text{Subst. } \tau = y + s, d\tau = ds, s = \tau - y \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dy \cdot u_3(y) \int_y^{2\pi+y} d\tau \cdot u_1(x-\tau) \cdot u_2(\tau-y) \\ &\stackrel{2\pi\text{-period.}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dy \cdot u_3(y) \cdot \int_0^{2\pi} d\tau u_1(x-\tau) u_2(\tau-y) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\tau u_1(x-\tau) \cdot \int_0^{2\pi} dy \cdot u_2(\tau-y) u_3(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u_1(x-\tau) \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(\tau-y) u_3(y) dy}_{=u_2 * u_3(\tau)}] d\tau \\ &= u_1 * (u_2 * u_3)(x) \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 3.2.3** Sei  $u \in C_{2\pi}^\infty = P_{2\pi}$ . Man zeigt

$$\left\| \frac{1}{t}(T_{-t}u - u) - Du \right\|_\infty \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0_+)$$

mit

$$\frac{1}{t}(T_t u(x) - u(x)) = \frac{u(x+t) - u(x)}{t} = [x, x+t](u)$$

Dabei ist  $[x, x+t](u)$  die Schreibweise für den Differenzenquotienten in der Numerik.

*Beweis.*

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\frac{u(x+t) - u(x)}{t} - u'(x) = u'(y) - u'(x), \quad x < y < x+t$$

Da  $u' = Du$  nach Voraussetzung gleichmäßig stetig ist, folgt

$$|u'(y) - u'(x)| < \varepsilon, \quad 0 < t < t_0$$

Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz

$$\left\| \frac{u(\cdot + t) - u}{t} - u' \right\|_\infty \leq \varepsilon$$

Was zu zeigen war.

Wir geben noch einen qualitativen Beweis mit Hilfe der Integralform

$$\begin{aligned} \frac{u(x+t) - u(x)}{t} - u'(x) &= \frac{1}{t} \int_x^{x+t} u'(\xi) d\xi - u'(x) \\ &= \frac{1}{t} \int_x^{x+t} [u'(\xi) - u'(x)] d\xi \end{aligned}$$

Abschätzung mit der Supremumsnorm ergibt

$$\left| \frac{u(x+t) - u(x)}{t} - u'(x) \right| \leq \sup_{x \leq \xi \leq x+t} |u'(\xi) - u'(x)| < \varepsilon$$

□

**Lemma 3.2.4** Die Faltung  $u * v$  liegt in  $C_{2\pi}$ .

*Beweis.*

$$u * v(x + 2\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{u(x + 2\pi - y)}_{=u(x-y)} v(y) dy = u * v(x)$$

□

**Lemma 3.2.5** Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion  $u \in C_{2\pi}^\infty$  und eine stetige Funktion  $v \in C_{2\pi}$  ist die Faltung ebenfalls beliebig oft differenzierbar

$$u * v \in C_{2\pi}^\infty$$

und für die  $k$ -te Ableitung gilt

$$D^k(u * v) = D^k u * v, \quad k \in \mathbb{N}$$

*Beweis.*

Wir arbeiten mit (3.2.3).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} [T_{-t}(u * v)(x) - u * v(x)] \\ &= \frac{1}{t} \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} u(x+t-y)v(y) dy - \int_0^{2\pi} u(x-y)v(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dy v(y) \cdot \frac{u(x-y+t) - u(x-y)}{t} \end{aligned}$$

Zur eigentlichen Abschätzung sei angemerkt, dass

$$\frac{1}{t} T_{-t}(u * v) - u * v = \underbrace{\left[ \frac{1}{t} (T_{-t}u - u) \right]}_{\Rightarrow Du} * v \rightarrow Du * v$$

Somit erhält man

$$\left\| \frac{1}{t} T_{-t}(u * v) - u * v \right\|_\infty \leq \underbrace{\left\| \frac{1}{t} (T_{-t}u - u) \right\|_\infty}_{\Rightarrow Du} * v$$

Es bezeichne  $\Rightarrow$  die gleichmäßige Konvergenz. Der Beweis ist geführt. □

**Lemma 3.2.6** Sei  $(v_n)$  eine Folge in  $C_{2\pi}$  und  $v \in C_{2\pi}$ . Die  $v_n$  konvergieren gleichmäßig gegen  $v$ , also

$$\|v_n - v\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Daraus folgert man für  $u \in C_{2\pi}$ ,

$$\|u * v_n - u * v\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

*Beweis.*

Wir benutzen die Definition der Faltung.

$$|u * v_n(x) - u * v(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} u(x-y) [v_n(x) - v(x)] dy \right| \leq \|u\|_\infty \cdot \|v_n - v\|_\infty$$

Da  $\|v_n - v\|_\infty, n \rightarrow \infty$ , gegen Null geht, ist die Behauptung gezeigt. □

Lemma (3.2.6) kann verallgemeinert werden, und gilt ebenso für Ableitungen. Dazu sei  $u \in C_{2\pi}^\infty$ , dann gilt  $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$\left\| D^k(u * v_n) - D^k u * v \right\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

### 3.3 Approximation

Nachdem die wichtigsten Tatsachen der Faltung in den vorherigen Sätzen dargestellt worden sind, können wir nun erste Ansätze der Approximation behandeln. Dazu wird eine Folge von positiven Funktionen  $(\varphi_n)$  aus  $C_{2\pi}$  gewählt, die mit einer  $2\pi$ -periodischen stetigen Funktion  $u$  gefaltet wird. Diese Idee erlaubt weitere Aussagen über  $u$ .

**Definition 3.3.1** (*Approximierende Einheit, Guter Kern*)

Eine Folge von Funktionen  $(\varphi_n) \in C_{2\pi}$  wird approximierende Einheit genannt, falls

$$\begin{aligned} \text{AE i)} \quad & \varphi_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{AE ii)} \quad & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{AE iii)} \quad & \text{Für } 0 < r < \pi : \quad \frac{1}{2\pi} \int_r^{2\pi-r} \varphi_n(x) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Damit kann sofort ein wichtiger Satz aufgeführt werden:

**Satz 3.3.2** Die Folge  $(\varphi_n)$  sei eine approximierende Einheit. Dann konvergiert die Faltung  $\varphi_n * u$  gleichmäßig gegen  $u \in C_{2\pi}$ ,

$$\|\varphi_n * u - u\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

und für eine beliebig oft differenzierbare Funktion  $u \in C_{2\pi}^\infty$  schließt man

$$\|D^k(\varphi_n * u) - D^k u\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

*Beweis.*

Wir schätzen ab und benutzen dabei Eigenschaft AE ii) und  $\varphi_n * u(x) = u * \varphi_n(x)$ . Es sei  $0 < r < \pi$

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot |\varphi_n * u(x) - u(x)| &= \left| \int_0^{2\pi} [u(x-y) - u(x)] \varphi_n(y) dy \right| \\ &\leq \sup\{\|T_s u - u\|_\infty : |s| \leq r\} \cdot 2r + 2 \cdot \|u\|_\infty \left( \int_r^{2\pi-r} \varphi_n(y) dy \right) \end{aligned}$$

Für gegebenes  $\varepsilon > 0$  wird zunächst  $0 < r < \pi$  gewählt, so dass

$$\|T_s u - u\|_\infty \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

Der zweite Summand geht wegen AE iii) gegen Null. Damit ist der erste Teil gezeigt. Zum Beweis der zweiten Aussage wird  $u \in P_{2\pi}$  gewählt und  $D^k(\varphi_n * u) = \varphi_n * D^k u$  ausgenutzt.

□

Zur weiteren Vertiefung werden zwei Beispiele zur approximierenden Einheit gerechnet, in denen die drei Eigenschaften verifiziert werden.

**Beispiel 1.**

Wir betrachten die Funktionenfolge  $(\varphi_n)$ , definiert durch

$$\varphi_n(x) = 2 \cdot \frac{n^2}{\pi} \left[ \frac{\pi}{n} - |x| \right]_+, \quad \text{für } |x| \leq \pi$$

mit

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(x + 2\pi) \quad \text{und} \quad \varphi_n(0) = n$$

Wir skizzieren

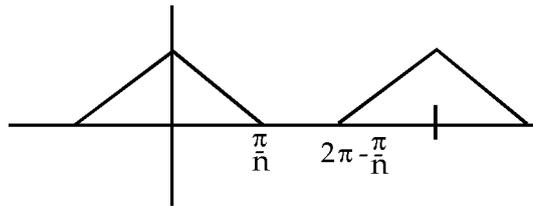


Abbildung 3.2: Die Funktion  $\varphi_n(x)$

AE I)

Man sieht sofort

$$\varphi_n(x) = 0 \quad \text{für } 2 \cdot \frac{\pi}{n} \leq x \leq 2\pi - \frac{\pi}{n}$$

und  $\varphi_n(x) \geq 0$  sonst

AE II)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) dx = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \varphi_n(x) dx = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} 2 \cdot \frac{\pi}{n} \cdot n = 1$$

AE III)

$$\int_r^{2\pi-r} \varphi_n(x) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad 0 < r < \pi$$

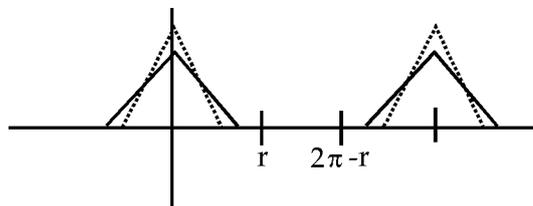


Abbildung 3.3: Veranschaulichung der dritten Eigenschaft

Außerdem kann die Funktionenfolge  $(\varphi_n)$  mit einer Funktion  $u$  gefaltet werden. Dann konvergiert die Faltung gleichmäßig gegen  $u$ ,

$$\varphi_n * u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x-t) u(t) dt \quad \Rightarrow \quad u(x)$$

Eine Verallgemeinerung der oben besprochenen Approximierenden Einheit ist

$$\varphi_n(x) = c_n \left[ \frac{\pi}{n} - |x| \right]_+$$

mit den Koeffizienten

$$c_n^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\pi}{n} - |x| \right]_+ dx$$

### Beispiel 2.

Die nachfolgend definierte periodische, holomorphe Funktion, wird Poisson-Kern genannt und wie folgt definiert

$$P_b(x) = \frac{\sinh(b)}{\cosh(b) - \cos(x)} \quad (3.1)$$

wobei  $b > 0$  und  $r = e^{-b}$ . Damit gilt  $0 < r < 1$ . Es sei daran erinnert, dass  $P_b(x)$  beliebig oft differenzierbar ist (folgt aus Holomorphie).

Wir geben für  $P_b(x)$  eine Potenzreihendarstellung an. Ausgangspunkt ist der Term

$$P_b(x) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x},$$

welcher aus (3.1) hergeleitet wird:

$$\begin{aligned} P_b(x) &= \frac{\sinh(b)}{\cosh(b) - \cos(x)} = \frac{\frac{e^b - e^{-b}}{2}}{\frac{e^b + e^{-b}}{2} - \cos x} \\ &= \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b} - 2 \cos x} \stackrel{r=e^{-b}}{=} \frac{\frac{1}{r} - r}{\frac{1}{r} + r - 2 \cos x} \\ &= \frac{\frac{1-r^2}{r}}{\frac{1+r^2-2r \cos x}{r}} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x} \end{aligned}$$

Wir rechnen weiter

$$\begin{aligned} P_b(x) &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x} \\ &= \frac{1}{1 - re^{ix}} + \frac{1}{1 - re^{-ix}} - 1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \cos(kx) \cdot r^k \end{aligned}$$

Damit steht

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_b(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2r^k \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx \right) > 0 \quad (3.2)$$

Vorteil der hergeleiteten Reihendarstellung ist die Berechnung des Integrals wie man in (3.2) sieht.

Wir zeigen der Vollständigkeit halber nun die Eigenschaften AE i) - AE iii).

$$i) \quad P_b(x) \geq 0 \quad (\text{sieht man in (3.2)})$$

$$ii) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_b(x) dx = 1$$

Für den Nachweis der dritten Eigenschaft setzen wir  $b = \frac{1}{n}$ , so dass  $\varphi_n(x) = P_{\frac{1}{n}}(x)$ . Es folgt

$$\int_r^{2\pi-r} P_{\frac{1}{n}}(x) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Für festes  $r$  gilt

$$\int_r^{2\pi-r} P_{\frac{1}{n}}(x) dx \rightarrow 0 \quad (b \rightarrow 0_+) \quad (3.3)$$

Mit dem Ziel, den Integranden abschätzen zu können, ersetzen wir die untere Intervallgrenze  $r$  in (3.3) nun durch  $d$  mit der Eigenschaft  $0 < d < \pi$ , also

$$\int_d^{2\pi-d} P_{\frac{1}{n}}(x) dx \rightarrow 0 \quad (b \rightarrow 0_+)$$

Außerdem gilt

$$1 > \cos d \geq x \quad \text{für } d \leq x \leq 2\pi - d$$

Somit können wir eine obere Schranke konstruieren

$$P_b(x) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x} \leq \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos d}$$

und erhalten

$$\frac{1}{2\pi} \int_d^{2\pi-d} P_0(x) dx \leq \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos d} = \frac{1-r^2}{\sin^2 d} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow 1_-)$$

für  $b \rightarrow 0_+$ , also  $b = \frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

**Satz 3.3.3** Die Menge  $P_{2\pi}$  der glatten Funktionen liegt dicht in  $C_{2\pi}$ .

*Beweis.*

Sei  $(\varphi_n) = (P_{\frac{1}{n}})$  die Folge aus Beispiel 2. Für  $P_{\frac{1}{n}} \in P_{2\pi}$  zeigt Lemma (3.2.5), dass  $P_{\frac{1}{n}} * u \in P_{2\pi}$ . Satz (3.3.2) liefert dann das gewünschte Resultat  $P_{\frac{1}{n}} * u \rightarrow u$ .

□

Im nächsten Kapitel wird gezeigt, dass die trigonometrischen Polynome dicht in  $C_{2\pi}$  liegen:

$$\bar{\tau} = C_{2\pi}$$



## 4 Der Approximationssatz von Weierstrass

In diesem Abschnitt wird der Satz von Weierstraß für  $2\pi$ -periodische Funktionen diskutiert.

Vornehm ausgedrückt, besagt die allgemeine Fassung, dass die Menge der Polynome dicht im Raum der stetigen Funktionen liegt. Im Sinne der Konvergenz kann man sagen, dass eine Folge von Polynomen stets gegen eine stetige Funktion konvergiert. Einen konstruktiven Beweis findet der Leser in Hämerlin/Hoffmann oder auch im Buch von Dirk Werner.

Wir erinnern an den Raum  $\tau_n$  aufgespannt durch

$$\tau_n = \langle e_{-n}, \dots, e_0, \dots, e_n \rangle$$

mit  $e_k(x) = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx = c_k(x) + s_k(x)$ .

**Definition 4.0.4** (Fourier-Koeffizienten)

Die Fourier-Koeffizienten einer Funktion  $u \in C_{2\pi} = C(\mathbb{T})$  lassen sich darstellen durch

$$u * e_k(0) = e_k * u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(y) e^{-iky} dy = \hat{u}(k) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

*Beweis.*

Die Definition der Faltung bei  $x = 0$  liefert

$$e_k * u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik(x-y)} u(y) dy, \quad x = 0$$

□

**Lemma 4.0.5** Die Basisfunktionen  $e_k(x)$  erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$e_k * e_j = \delta_{jk} e_k$$

*Beweis.*

Die Definition zeigt

$$e_k * e_j(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik(x-y)} e^{jy} dy = e^{ikx} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(j-k)y} dy}_{=\delta_{jk}}$$

□

**Lemma 4.0.6** Für zwei Funktionen  $u, v \in \tau_n$  liegt die Faltung  $u * v$  auch wieder in  $\tau_n$ .

*Beweis.*

Zur Beweisführung wird mit den trigonometrischen Polynomen

$$u = \sum_{k=-n}^n a_k e_k \quad \text{und} \quad v = \sum_{l=-n}^n b_l e_l$$

gearbeitet. Wir falten  $e_r(x)$  mit  $u(x)$  und erhalten ,

$$e_r * u(x) = \sum_{(k)} a_k e_r * e_k(x) = a_r e_r(x)$$

Die  $a_r$  entsprechen den Fourier-Koeffizienten  $\widehat{u}(r)$

$$a_r = e_r * u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(y) e^{-iry} dy$$

Außerdem ergibt sich so

$$b_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(y) e^{-isy} dy$$

Falten der Polynome  $u$  und  $v$  ergibt

$$\begin{aligned} u * v(x) &= \left( \sum_{(k)} a_k e_k \right) * \left( \sum_{(r)} b_r e_r \right) (x) \\ &= \sum_{(k)} \sum_{(r)} a_k b_r \underbrace{e_k * e_r(x)}_{=\delta_{kr} \cdot e_k(x)} \\ &= \sum_{(k)} a_k b_k e_k(x) \in \tau_n \end{aligned}$$

Insbesondere

$$\widehat{u * v}(k) = a_k b_k = \widehat{u}(k) \widehat{v}(k)$$

□

**Satz 4.0.7** (Trigonometrischer Satz von Weierstrass)

Es sei  $(\varphi_n) \in \tau$  eine approximierende Einheit. Dann gilt  $\varphi_n * u \in \tau$  und

$$\|\varphi_n * u - u\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

*Beweis.*

Mit dem de la Vallée-Poussin Operator schreiben wir

$$\varphi_n(x) = \gamma_n [1 + \cos x]^n \in \tau_n$$

mit  $\varphi_n(x) \geq 0$  und den Koeffizienten

$$\gamma_n^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 + \cos x]^n dx$$

Die Eigenschaften der approximierenden Einheit sind erfüllt. Zu zeigen ist nun

$$\int_d^{2\pi-d} \varphi_n(x) dx = \int_{-d}^d \varphi_n(x) dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

mit festem  $0 < d < \pi$ .

Für die Funktion  $1 + \cos x$  kann gezeigt werden, dass

$$1 + \cos x \leq \delta \leq 1 + \cos y$$

für  $0 \leq y \leq \frac{d}{2}$  und  $d \leq x \leq 2\pi - d$ .

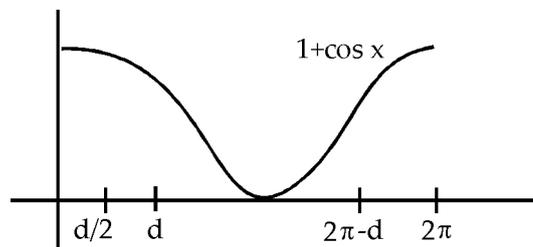


Abbildung 4.1: Die Funktion  $1 + \cos x$

Also damit

$$\varphi_n(x) \leq \rho^n \varphi_n(y)$$

Ausgeschrieben ist

$$\varphi_n(x) \cdot \frac{d}{2} \leq \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^n \varphi_n(y) dy \leq \rho^n \int_0^{2\pi} \varphi_n(y) dy = \rho^n \cdot 2\pi \Rightarrow 0_+$$

wobei  $0 < \rho < 1$ . Es folgt letztendlich

$$\frac{1}{2\pi} \int_d^{2\pi-d} \varphi_n(x) dx \leq \sup |\varphi_n(x)| \rightarrow 0, \quad d \leq x \leq 2\pi - d$$

□

Wir bemerken, dass der Approximationssatz lediglich die reine Konvergenz feststellt. Über die Konvergenzgüte (-geschwindigkeit) wird keine Aussage gemacht. Später mehr.

**Satz 4.0.8** Der Raum  $\tau$  liegt dicht in  $C_{2\pi}$ .

*Beweis.*

Nach Satz (4.0.7) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n * u - u\|_\infty \rightarrow 0, \quad \varphi_n \in \tau_n, u \in C_{2\pi}$$

□



# 5 Der Projektionssatz

## 5.1 Beste Approximation

**Definition 5.1.1** Sei  $U \subset X$  eine Teilmenge eines normierten Raumes  $X$  und  $w \in X$ . Ein Element  $v \in U$  heißt beste Approximation für  $w$  in  $U$ , falls

$$\|w - v\| = \inf_{u \in U} \|w - u\|,$$

bzw.  $v \in U$  hat den kleinsten Abstand zu  $w$ .

**Satz 5.1.2** Sei  $U$  ein endlich-dimensionaler Unterraum eines normierten Raumes  $X$ . Dann gibt es für jedes Element in  $X$  eine beste Approximation in  $U$ .

*Beweis.*

Sei  $w \in X$ . Wähle eine minimierende Folge  $(u_n)$  aus  $U$  für  $w$ . Diese erfüllt

$$\|w - u_n\| \rightarrow d \quad \text{mit } n \rightarrow \infty$$

wobei  $d := \inf_{u \in U} \|w - u\|$ . Wegen

$$\begin{aligned} \|u_n\| &= \|u_n\| - \|w\| + \|w\| \\ &\leq |\|u_n\| - \|w\|| + \|w\| \\ &= |\|w\| - \|u_n\|| + \|w\| \\ &\leq \|w - u_n\| + \|w\| \end{aligned}$$

ist die Folge  $(u_n)$  beschränkt. Da  $U$  ein endlich-dimensionaler normierter Raum ist, gibt es eine konvergente Teilfolge  $(u_{n(l)})$  mit

$$\lim_{l \rightarrow \infty} u_{n(l)} \rightarrow v \in U.$$

Daraus folgt

$$\|w - v\| = \lim_{l \rightarrow \infty} \|w - u_{n(l)}\| = d.$$

□

**Definition 5.1.3** Ein Praehilbertraum ist ein linearer Raum, auf welchem ein Skalarprodukt definiert ist.

**Satz 5.1.4** Sei  $U$  ein linearer Unterraum eines Praehilbertraumes  $X$ . Ein Element  $v \in U$  ist eine beste Approximierende für  $w \in X$  genau dann, wenn

$$(w - v, u) = 0, \quad \text{für alle } u \in U,$$

also  $w - v \perp U$ . Für jedes  $w \in X$  gibt es höchstens eine beste Approximation bzgl.  $U$ .

*Beweis.*

“ $\Leftarrow$ ”:

Mit  $\|a\| := \sqrt{(a, a)}$  gilt für alle  $v, u \in U$ :

$$\begin{aligned} \|w - u\|^2 &= \|w - v + v - u\|^2 \\ &= ((w - v) + (v - u), (w - v) + (v - u)) \\ &= (w - v, w - v) + (w - v, v - u) + (v - u, w - v) + (v - u, v - u) \\ &= \|w - v\|^2 + (w - v, v - u) + \overline{(w - v, v - u)} + \|v - u\|^2 \\ &= \|w - v\|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}((w - v, v - u)) + \|v - u\|^2. \end{aligned}$$

Da  $U$  ein linearer Raum ist, also  $v - u \in U$  und  $(w - v, u) = 0 \forall u \in U$  gelten soll, gilt:

$$\begin{aligned} \|w - u\|^2 &= \|w - v\|^2 + \|v - u\|^2 \\ \Rightarrow \|w - v\|^2 &= \|w - u\|^2 - \|v - u\|^2, \quad \forall u \in U \\ \Rightarrow \|w - v\| &< \|w - u\|, \quad \forall u \in U, u \neq 0 \end{aligned}$$

Also gilt

$$\|w - v\| = \inf_{u \in U} \|w - u\|$$

und somit ist  $v$  beste Approximation für  $w$  in  $U$ .

“ $\Rightarrow$ ”:

Sei  $v$  beste Approximation für  $w$  in  $U$ . Wir nehmen an, dass  $(w - v, u_0) \neq 0$  für ein  $u_0 \in U$ . Dann gelte weiter, dass  $(w - v, u_0) \in \mathbb{R}$ , da  $U$  ein linearer Unterraum von  $X$  ist.

Wir wählen  $u = v + \frac{(w - v, u_0)}{\|u_0\|^2} u_0$  und schließen

$$\begin{aligned} \|w - u\|^2 &= \|w - v\|^2 + 2\operatorname{Re}\left(w - v, v - \left(v + \frac{(w - v, u_0)}{\|u_0\|^2} u_0\right)\right) \\ &\quad + \left\|v - \left(v + \frac{(w - v, u_0)}{\|u_0\|^2} u_0\right)\right\|^2 \\ &= \|w - v\|^2 + 2\operatorname{Re}\left(w - v, -\frac{(w - v, u_0)}{\|u_0\|^2} u_0\right) + \left\|-\frac{(w - v, u_0)}{\|u_0\|^2} u_0\right\|^2 \\ &= \|w - v\|^2 + 2\left(-\frac{(w - v, u_0)}{\|u_0\|^2} \operatorname{Re}(w - v, u_0)\right) + \frac{(w - v, u_0)^2}{\|u_0\|^4} \|u_0\|^2 \\ &= \|w - v\|^2 - 2\frac{(w - v, u_0)^2}{\|u_0\|^2} + \frac{(w - v, u_0)^2}{\|u_0\|^2} \\ &= \|w - v\|^2 - \frac{(w - v, u_0)^2}{\|u_0\|^2} \\ &< \|w - v\|^2. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $v$  beste Approximation für  $w$  in  $U$  ist.

**EINDEUTIGKEIT**

Angenommen,  $v_1, v_2$  sind beste Approximationen. Dann gilt:

$$(w - v_1, v_1 - v_2) = 0 = (w - v_2, v_1 - v_2), \quad \text{da } v_1 - v_2 \in U.$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow (w, v_1 - v_2) - (v_1, v_1 - v_2) = (w, v_1 - v_2) - (v_2, v_1 - v_2) \\
 &\Rightarrow (v_1, v_1 - v_2) = (v_2, v_1 - v_2) \\
 &\Rightarrow (v_1, v_1 - v_2) - (v_2, v_1 - v_2) = 0 \\
 &\Rightarrow (v_1 - v_2, v_1 - v_2) = 0 \\
 &\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \\
 &\Rightarrow v_1 = v_2.
 \end{aligned}$$

Es folgt somit: Die beste Approximation ist eindeutig, es gibt also höchstens eine beste Approximation.

□

**Satz 5.1.5 (Orthogonalprojektion)**

Sei  $U$  ein vollständiger linearer Unterraum eines Praehilbertraumes  $X$ . Dann gibt es für jedes  $w \in X$  eine eindeutige beste Approximation in  $U$ . Der Operator  $P : X \rightarrow U$ , der jedes  $w \in X$  auf seine beste Approximation abbildet, ist ein beschränkter linearer Operator mit

$$P^2 = P \quad \text{und} \quad \|P\| = 1$$

Er heißt orthogonale Projektion von  $X$  auf  $U$ .

*Beweis.*

Man wähle eine Folge  $(u_n)$  mit

$$\|w - u_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

wobei  $d := \inf_{u \in U} \|w - u\|$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 &\| (w - u_n) + (w - u_m) \|^2 + \|u_n - u_m\|^2 \\
 &= ((w - u_n) + (w - u_m), (w - u_n) + (w - u_m)) \\
 &\quad + ((u_n - w) + (w - u_m), (u_n - w) + (w - u_m)) \\
 &= (w - u_n, w - u_n) + (w - u_n, w - u_m) + (w - u_m, w - u_n) + (w - u_m, w - u_m) \\
 &\quad + (u_n - w, u_n - w) + (u_n - w, w - u_m) + (w - u_m, u_n - w) + (w - u_m, w - u_m) \\
 &= 2\|w - u_n\|^2 + 2\|w - u_m\|^2 \\
 &\leq 4d^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Da  $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in U$  gilt

$$\|w - \frac{1}{2}(u_n + u_m)\|^2 \geq d^2$$

und wir können  $\|u_n - u_m\|^2$  abschätzen durch

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|^2 &\leq 4d^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} - \|(w - u_n) + (w - u_m)\|^2 \\ &= 4d^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} - \|2(w - \frac{1}{2}(u_n + u_m))\|^2 \\ &= 4d^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 4\|w - \frac{1}{2}(u_n + u_m)\|^2 \\ &\leq \frac{2}{n} + \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

Also ist  $(u_n)$  beschränkt und somit eine Cauchy-Folge.

Da  $U$  vollständig ist, gibt es ein  $v \in U$  mit  $u_n \rightarrow v$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Aus

$$\|w - u_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$$

folgt, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v$  eine beste Approximation für  $w$  in  $U$  ist. Die Eindeutigkeit von  $v$  folgt aus Satz (5.1.4).

Als nächstes wird  $P^2 = P$  gezeigt. Es gilt stets  $P(u) = u$ . Dann folgt

$$P^2(w) = P(P(w)) = P(u) = u = P(w)$$

Die Linearität von  $P$  sieht man so: Sei  $\alpha \neq 0$ , dann

$$\begin{aligned} P(\alpha x) &= v \\ \Leftrightarrow (\alpha x - v, u) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha(x - \frac{v}{\alpha}, u) &= 0 \\ \Leftrightarrow P(x) &= \frac{v}{\alpha} \\ \Leftrightarrow \alpha P(x) &= v, \end{aligned}$$

also  $P(\alpha x) = \alpha P(x)$ .

Seien nun  $v_1, v_2$  beste Approximationen von  $x, y$ , also gelte  $P(x) = v_1, P(y) = v_2$ . Dann:

$$\begin{aligned} P(x) + P(y) &= v_1 + v_2 \\ \Leftrightarrow (x - v_1, u) = 0 \quad \wedge \quad (y - v_2, u) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - v_1, u) + (y - v_2, u) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - v_1 + y - v_2, u) &= 0 \\ \Leftrightarrow ((x + y) - (v_1 + v_2), u) &= 0, \end{aligned}$$

also  $P(x + y) = v_1 + v_2 = P(x) + P(y)$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\|P\| = 1$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= (P(w) + w - P(w), P(w) + w - P(w)) \\ &= (P(w), P(w)) + (w - P(w), w - P(w)) \\ &\quad + (P(w), w - P(w)) + (w - P(w), P(w)) \\ &= \|P(w)\|^2 + \|w - P(w)\|^2 \\ &\geq \|P(w)\|^2 \quad \forall w \in X \end{aligned}$$

Also ist  $P$  beschränkt mit  $\|P\| \leq 1$ .

Da  $P^2 = P$  und für zwei lineare Operatoren  $A$  und  $B$   $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  gilt, folgt

$$\begin{aligned} \|P\| &= \|P^2\| = \|PP\| \leq \|P\|\|P\| \\ \Rightarrow \|P\| &\geq 1 \\ \Rightarrow \|P\| &= 1. \end{aligned}$$

□

## 5.2 Darstellungssatz von Fréchet-Riesz

Ein grundlegendes Prinzip der Funktionalanalysis ist die Gewinnung von Informationen auf normierten Räumen mittels der auf ihnen definierten Funktionale.

### Direkte Summe

#### Definition 5.2.1 (Direkte Summe)

Ein Vektorraum  $X$  kann als direkte Summe zweier Untervektorräume  $Y$  und  $Z$  geschrieben werden,

$$X = Y \oplus Z,$$

falls jedes Element  $x \in X$  eine eindeutige Darstellung besitzt, laut

$$x = y + z, \quad y \in Y, z \in Z$$

Der Raum  $Z$  wird *algebraisches Komplement* von  $Y$  in  $X$  genannt.

In der Hilbertraumtheorie ist man in besonderer Weise an diesen Darstellungen interessiert. Ein allgemeiner Hilbertraum  $H$  lässt sich als direkte Summe eines abgeschlossenen Unterraums  $Y$  und dessen orthogonalen Komplements  $Y^\perp$  schreiben. Gleich mehr dazu.

#### Satz 5.2.2 (Projektionssatz, Direkte Summe)

Sei  $Y$  ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums  $H$ . Dann

$$H = Y \oplus Z, \quad Z = Y^\perp$$

### Darstellungssatz von Fréchet-Riesz

**Definition 5.2.3** Der Raum  $\mathcal{L} = L(X, \mathbb{K})$  der stetigen linearen Funktionale auf einem normierten Raum heißt Dualraum von  $X$ . Oft findet man auch die Bezeichnungen  $X' = \mathcal{L} = L(X, \mathbb{K})$  bzw., falls  $X$  ein Hilbertraum ist  $X^* = \mathcal{L} = L(X, \mathbb{K})$ .

Wir behandeln nun einen der wesentlichen Sätze der Hilbertraumtheorie.

**Satz 5.2.4** Sei  $X$  ein Hilbertraum. Für jedes lineare beschränkte Funktional  $F \in \mathcal{L}$  existiert ein eindeutiges Element  $f \in X$ , so dass

$$F(u) = (u, f) \quad \forall u \in X$$

Somit wird eine bijektive, isometrische und konjugiert lineare Abbildung konstruiert mit

$$\|f\| = \|F\|$$

*Beweis.*

- **Eindeutigkeit**

Wird  $f$  auf  $F = 0$  abgebildet, so ist

$$F(x) = (x, f) = 0 \quad \forall x \in X$$

also auch

$$(f, f) = 0$$

und damit folgt

$$f = 0$$

das heißt die Abbildung  $f \rightarrow F$  ist eindeutig, denn  $f = 0$  ist das einzige Element, das die Nullfunktion  $F = 0$  erzeugen kann.

- **Normgleichheit**

Nach Cauchy-Schwarz gilt

$$\begin{aligned} \|F\| &= |F| = |(x, f)| \leq \|x\| \cdot \|f\| \\ \Rightarrow \frac{|F|}{\|x\|} &\leq \|f\| \\ \Leftrightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{|F(x)|}{\|x\|} &\leq \|f\| \\ \Rightarrow \|F\| &\leq \|f\| \end{aligned}$$

wobei

$$\|F\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{|F(x)|}{\|x\|}$$

Setze speziell  $x = f$  in  $F(x) = (x, f)$  ein:

$$|(f, f)| = \|f\|^2 = |F(f)| \leq \|f\| \cdot \|F\|$$

also ist

$$\|f\| \leq \|F\|$$

und somit haben wir einerseits  $\|f\| \geq \|F\|$  und andererseits  $\|f\| \leq \|F\|$ . Daraus folgt die Normgleichheit

$$\|f\| = \|F\|$$

- **Konstruktion**

Zu einem  $F \in X^* = \mathcal{L}$  ist ein  $f \in X$  zu konstruieren:

Der Kern

$$N(F) = \{u \in X : F(u) = 0\}$$

ist ein abgeschlossener, linearer Untervektorraum des Hilbertraums  $X$ . Ist  $N = X$ , so leistet  $f = 0$  das Gewünschte. Ist  $N \neq X$ , so gilt

$$X = N \oplus N^\perp$$

Wir wählen nun ein  $w \in X$  mit  $F(w) \neq 0$ . Aus dem Projektionssatz folgt, wenn  $v$  die beste Approximation von  $w$  auf den Untervektorraum  $N$  ist, dass

$$w - v \perp N(F)$$

Es gilt mit  $g := w - v$ ,

$$F(g)u - F(u)g \in N(F) \quad \forall u \in X$$

denn

$$F(F(g)u - F(u)g) = F(g)F(u) - F(u)F(g) = 0$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (F(g)u - F(u)g, g) &= 0 \quad \forall u \in X \\ \Rightarrow (F(g)u, g) - (F(u)g, g) &= 0 \\ \Rightarrow (F(u)g, g) &= (F(g)u, g) \\ \Rightarrow F(u)(g, g) &= (u, \overline{F(g)}g) \\ \Rightarrow F(u) &= \frac{(u, \overline{F(g)}g)}{\|g\|^2} \quad \square \end{aligned}$$

### 5.3 Der Satz des Pythagoras

Dieser Abschnitt wiederholt und erweitert Resultate aus den beiden vorherigen Sektionen. Es sei

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (u - av, u - av) \\ &= (u, u) + a^2 \cdot (v, v) - a \cdot \underbrace{[(u, v) + (v, u)]}_{=2\operatorname{Re}(u, v)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Der kleinste Abstand ist dann gerade das Minimum von (5.1). Dazu die notwendige Bedingung

$$\varphi'(a) = 2a \cdot (v, v) - 2\operatorname{Re}(u, v) = 0$$

Das Minimum liegt bei

$$a_0 = \frac{\operatorname{Re}(u, v)}{(v, v)}$$

Wir haben damit eine Minimalstelle  $a_0$  gefunden, die die Bedingung  $0 \leq \varphi(a_0) \leq \varphi(a)$  erfüllt. Ausführlich steht

$$(u, u) - a_0 \cdot 2\operatorname{Re}(u, v) + a_0^2 \cdot (v, v) \leq (u, u) + a^2 \cdot (v, v) - a^2 \cdot \operatorname{Re}(u, v)$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u, u) - \frac{2\operatorname{Re}(u, v) \operatorname{Re}(u, v)}{(v, v)} + \frac{|\operatorname{Re}(u, v)|^2}{(v, v)^2} (v, v) \\ &= (u, u) - \frac{|\operatorname{Re}(u, v)|^2}{(v, v)} \end{aligned}$$

Es folgt

$$|\operatorname{Re}(u, v)| \leq (u, u) \cdot (v, v)$$

Wir definieren nun den Begriff der Projektion eines Vektors  $w$  auf einen Vektor  $v$

$$P_{\langle v \rangle}(w) = \frac{(w, v)}{(v, v)} \cdot v$$

Die Zeichnung dazu ist selbsterklärend

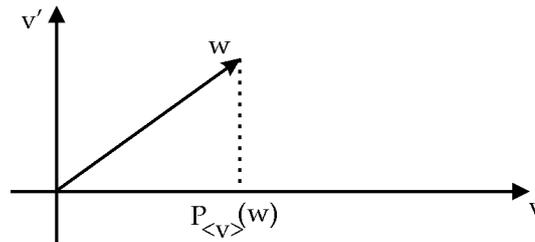


Abbildung 5.1: Projektion von  $w$  auf  $v$

### Eigenschaften der Projektion

- i)  $P_{\langle v \rangle}^2 = P_{\langle v \rangle}$  (Idempotenz)
- ii)  $P_{\langle v \rangle}^* = P_{\langle v \rangle}$  (Selbstadjungiertheit)

Die zweite Eigenschaft kann man am Skalarprodukt gut demonstrieren. Sie besagt, dass der Projektionsoperator in das zweite Argument geschoben werden kann. Damit

$$(P_{\langle v \rangle}(w), w') = (w, P_{\langle v \rangle}(w')) \Leftrightarrow P_{\langle v \rangle}^* = P_{\langle v \rangle}$$

*Rechnung.*

zu i)

Sei  $w' = P_{\langle v \rangle}(w)$ . Wir rechnen

$$P_{\langle v \rangle}^2(w) = P_{\langle v \rangle}(w') = P_{\langle v \rangle} \left[ \frac{(w, v)}{(v, v)} \cdot v \right] = \frac{(w, v)}{(v, v)} \underbrace{P_{\langle v \rangle}(v)}_{=v} = P_{\langle v \rangle}(w)$$

zu ii)

Einerseits ist

$$(P_{\langle v \rangle}(w), w') = \frac{(w, v)}{(v, v)} (v, w')$$

Zweitens

$$(w, P_{\langle v \rangle}(w')) = \left( w, \frac{(w', v)}{(v, v)} \cdot v \right) = \frac{(v, w') \cdot (w, v)}{(v, v)}$$

Vergleich beider Seiten ergibt die Behauptung. □

**Projektionssatz (Satz des Pythagoras)**

Anhand der eingangs gemachten Skizze kann man den Satz von Pythagoras herleiten. Man zeigt

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|P_{\langle v \rangle}(w) + (w - P_{\langle v \rangle}(w))\|^2 \\ &= \|P_{\langle v \rangle}(w)\|^2 + \|w - P_{\langle v \rangle}(w)\|^2 + (P_{\langle v \rangle}(w), w - P_{\langle v \rangle}(w)) + \overline{(\dots)} \\ &= \|P_{\langle v \rangle}(w)\|^2 + \|w - P_{\langle v \rangle}(w)\|^2 + (P_{\langle v \rangle}(w), w) - (P_{\langle v \rangle}(w), P_{\langle v \rangle}(w)) \end{aligned}$$

Weiter ergibt sich mit  $P_{\langle v \rangle}^* P_{\langle v \rangle} = P_{\langle v \rangle}^2 = P_{\langle v \rangle}$

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|P_{\langle v \rangle}(w)\|^2 + \|w - P_{\langle v \rangle}(w)\|^2 + (P_{\langle v \rangle}(w), w) - (P_{\langle v \rangle}^* P_{\langle v \rangle}(w), w) \\ &= \|P_{\langle v \rangle}(w)\|^2 + \|w - P_{\langle v \rangle}(w)\|^2 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis entspricht dem Satz des Pythagoras.

**Satz 5.3.1 (Satz des Pythagoras)**

Man definiert den Satz des Pythagoras gemäß

$$\|w\|^2 = \|P_{\langle v \rangle}(w)\|^2 + \|w - P_{\langle v \rangle}(w)\|^2$$

Insbesondere gilt

$$\|w\|^2 \geq \|P_{\langle v \rangle}(w)\|^2 \quad (5.2)$$

Gleichheit erhält man für  $w = \|P_{\langle v \rangle}(w)\|$

Der Satz des Pythagoras hat weitreichende Konsequenzen. Später taucht er bei der Formulierung der Besselschen Identität wieder auf.

Wir schreiben (5.2) in Skalarprodukten

$$(w, w) \geq \frac{|(w, v)|^2}{(v, v)^2} \cdot (v, v)$$

und erhalten nach Umstellung die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$(w, w)(v, v) \geq |(w, v)|^2$$

**Verallgemeinerung der Projektion**

Sei ein unitärer Vektorraum  $V$  gegeben. Weiter sei  $W \subset V$  ein Untervektorraum. Eine Basis von  $W$  mit paarweise orthogonalen Vektoren sei gegeben durch  $w_1, \dots, w_r$ . Dann ist die Projektion eines Vektors  $v \in V$  auf den Raum  $W$  gegeben durch

$$P_W(v) = \sum_{j=1}^r \frac{(v, w_j)}{(w_j, w_j)} w_j$$



# 6 Approximation in speziellen Räumen

## 6.1 Der Raum $C_{2\pi}$ als VR mit innerem Produkt

Zunächst wird das Skalarprodukt definiert und anschließend dessen Eigenschaften aufgeführt. Dazu seien  $u, v \in C_{2\pi}$  vorgelegt und setzt

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \overline{v(x)} dx$$

Mit dieser Definition wird der Raum  $C_{2\pi}$  zu einem Praehilbertraum.

Das Skalarprodukt genügt den Eigenschaften

- i)  $(u, u) \geq 0$ ,  
 $(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$  (Definitheit)
- ii)  $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$  (Additivität)
- iii)  $(\gamma u, v) = \gamma (u, v)$  (Homogenität)
- iv)  $(u, v) = \overline{(v, u)}$  (konjugierte Symmetrie)

*Rechnung.*

Wir führen lediglich den Beweis zu Eigenschaft i) Punkt 2, der Definitheit. Zu zeigen ist  $(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$ . Dazu

$$\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx = 0, \quad u \in C_{2\pi}$$

Wir nehmen  $|u(x_0)| > 0$  an. Dann wäre

$$|u(x)| \geq \frac{|u(x_0)|}{2} > 0$$

Mit Stetigkeitsargument  $|x - x_0| < \delta$  für genügend kleines positives  $\delta$  folgt

$$\int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \geq |u(x_0)| \cdot 2 \cdot \delta > 0$$

Das ist ein Widerspruch!

Wir definieren  $\|u\|_2$  für  $u \in C_{2\pi}$  gemäß

$$\|u\|_2 = (u, u)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

und erhalten eine der zentralen Ungleichungen:

**Lemma 6.1.1** (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Es gilt für zwei Funktionen  $u, v \in C_{2\pi}$ ,

$$|(u, v)| \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$$

*Beweis.*

Wir setzen

$$\varphi(a) = (u - av, u - av) \geq 0, \quad a \in \mathbb{K}, v \neq 0$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (u - av, u - av) &= (u, u) + a\bar{a}(v, v) - a(v, u) - \bar{a}(u, v) \\ &\text{mit } a = \frac{(u, v)}{(v, v)} \text{ folgt} \\ &= (u, u) + \frac{(u, v)}{(v, v)} \cdot \overline{\frac{(u, v)}{(v, v)}} \cdot (v, v) - \frac{(u, v)}{(v, v)}(v, u) - \overline{\frac{(u, v)}{(v, v)}}(u, v) \\ &= (u, u) - \frac{1}{(v, v)} |(u, v)|^2 \end{aligned}$$

Also ist

$$0 \leq (u - av, u - av) = (u, u) - \frac{1}{(v, v)} |(u, v)|^2$$

Daraus folgt

$$(u, u) - \frac{1}{(v, v)} |(u, v)|^2 \geq (u, u) (v, v) \geq |(u, v)|^2$$

Somit haben wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\|u\|_2 \cdot \|v\|_2 \geq |(u, v)|$$

bewiesen.

□

**Die Parallelogrammregel**

An dieser Stelle setzen wir uns kurz über den Zusammenhang von Skalarprodukt und Norm auseinander. In einem Hilbertraum wird durch

$$u \mapsto \|u\|_2 := (u, u)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm definiert. Die Norm wird demnach durch das Skalarprodukt konstruiert. Allerdings gilt auch die Umkehrung. Wir können das Skalarprodukt über die Norm ausdrücken,

$$(u, v) := \frac{1}{4} (\|u + v\|_2^2 - \|u - v\|_2^2)$$

Hiermit kann dann auch die Parallelogrammgleichung bewiesen werden. Wir wollen sie (ohne Beweis) notieren

$$\|u + v\|_2^2 + \|u - v\|_2^2 = 2\|u\|_2^2 + 2\|v\|_2^2$$

**Lemma 6.1.2** Die Abbildung  $u \mapsto \|u\|_2$  ist Norm auf  $C_{2\pi}$ .

*Beweis.*

Wir überprüfen die Normeigenschaften

$$\text{i) } \|u\|_2 \geq 0, \\ \|u\|_2 = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\text{ii) } \|\gamma u\|_2 = |\gamma| \|u\|_2$$

$$\text{iii) } \|u_1 + u_2\|_2 \leq \|u_1\|_2 + \|u_2\|_2$$

Denn

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2, u_1 + u_2) &= (u_1, u_1) + (u_2, u_2) + (u_1, u_2) + (u_2, u_1) \\ &\leq \|u_1\|_2^2 + \|u_2\|_2^2 + 2 \|u_1\|_2 \|u_2\|_2 \\ &= (\|u_1\|_2 + \|u_2\|_2)^2 \end{aligned}$$

□

Außerdem ist die  $L^2$ -Norm durch die Supremumsnorm beschränkt

$$\|u\|_2 \leq \|u\|_\infty$$

**Beispiel.**

Die Funktionen  $\varphi_n$  seien definiert durch

$$\varphi_n(x) = c_n \left( \frac{\pi}{n} - |x| \right)_+$$

mit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) = 1$$

betrachtet. Die  $\varphi_n$  sind stetig. Aber die Grenzfunktion ist nicht stetig in Null. Dazu noch die Abbildung

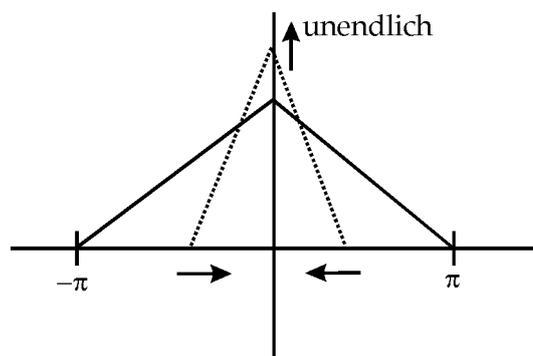


Abbildung 6.1: Beispiel, dass  $C_{2\pi}$  nicht vollständig ist

Allerdings ist der Raum  $C_{2\pi}$  mit der  $\|\cdot\|_2$ -Norm nicht vollständig. Daher greift an dieser Stelle das bereits oben erwähnte Konzept: Informationen über  $C_{2\pi}$  werden über die auf  $C_{2\pi}$  definierten linearen Funktionale gewonnen. Dieser Raum wird mit  $\mathcal{L}$  angesprochen und ist selbst ein Vektorraum.

Die Existenz sichert sichert der *Satz von Hahn-Banach*. Einer der vier grundlegenden Sätze der Funktionalanalysis! Wir interessieren uns aber mehr für die konkrete Konstruktion von Linearformen.

Wir wissen, dass jeder normierte (nicht vollständige) Raum isometrisch isomorph zu einem dichten Unterraum eines Banachraums ist. In anderen Worten, jeder normierte nicht-vollständige Raum kann in einen Banachraum eingebettet werden.

### Vektorraum der Linearformen auf $C_{2\pi}$

Für  $F, G \in \mathcal{L} = L(C_{2\pi}, \mathbb{C})$  und  $a \in \mathbb{C}$  gelten

- i)  $(F + G)(u) = F(u) + G(u), \quad u \in C_{2\pi},$
- ii)  $(aF)(u) = aF(u), \quad u \in C_{2\pi}$

Wir listen die Linearitäts-Eigenschaften für ein Funktional  $F \in \mathcal{L}$  auf,

- i)  $F(u + v) = F(u) + F(v)$
- ii)  $F(\alpha u) = \alpha F(u), \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Für beschränkte (stetige)  $F$  führt man die Norm  $\|F\|$  ein:

$$\|F\| := \sup \left\{ \frac{|F(u)|}{\|u\|_2} : u \in C_{2\pi}, u \neq 0 \right\} < \infty$$

Wir erinnern noch an die Äquivalenz von Stetigkeit und Beschränktheit für Linearformen. Falls  $F \in \mathcal{L}$ , dann folgt für

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad F(u_n) \rightarrow F(u), \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

*Rechnung.*

Ein linearer Operator (lineares Funktional) ist genau dann stetig, wenn

$$|F(u)| \leq M \cdot \|u\|_2, \quad M = \|F\|$$

wobei  $M$  die kleinste Konstante ist, so dass die Ungleichung noch erfüllt ist. Genauer

$$\|F\| := \inf \{ M \geq 0 : |F(u)| \leq M \|u\|_2 \forall u \in C_{2\pi} \}$$

Mit der Linearität folgert man

$$|F(u_n) - F(u)| = |F(u_n - u)| \leq \|F\| \cdot \|u_n - u\|_2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

□

Die Norm  $\|F\|$  von  $F$  erfüllt die üblichen Eigenschaften

- i)  $\|F\| \geq 0$   
 $\|F\| = 0 \Leftrightarrow F = 0,$
- ii)  $\|\alpha F\| = |\alpha| \|F\|$
- iii)  $\|F_1 + F_2\| \leq \|F_1\| + \|F_2\|.$

Rechnung.

zu iii)

$$\begin{aligned} \|F_1 + F_2\| &= \sup_{u \neq 0} \frac{|(F_1 + F_2)(u)|}{\|u\|_2} \\ &\leq \sup_{u \neq 0} \left\{ \frac{|F_1(u)|}{\|u\|_2} + \frac{|F_2(u)|}{\|u\|_2} \right\} \\ &\leq \sup_{u \neq 0} \frac{|F_1(u)|}{\|u\|_2} + \sup_{u \neq 0} \frac{|F_2(\tilde{u})|}{\|\tilde{u}\|_2} \\ &= \|F_1\| + \|F_2\| \end{aligned}$$

**Satz 6.1.3** (Vollständigkeit von  $\mathcal{L}$ )

Der normierte Vektorraum  $\mathcal{L}$  der linearen Funktionale auf  $C_{2\pi}$  ist vollständig.

Beweis.

Wir geben zunächst eine Struktur der Beweisführung. Als Erstes wird ein Grenzelement  $F$  konstruiert. Anschließend wird gezeigt, dass dieses Element im vorgegebenen Raum liegt. Zuletzt wird im Sinne der zugehörigen Norm die Konvergenz  $F_n \rightarrow F$  nachgewiesen.

Sei  $(F_n)$  Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}$ , dann ist

$$\|F_{n+p} - F_n\| < \varepsilon, \quad n \geq n_0, p \geq 1$$

Zu zeigen sind

- i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) =: F(u)$  existiert
- ii)  $F$  ist linear
- iii)  $F$  ist beschränkt (stetig)
- iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n - F\| \rightarrow 0$

zu i)

$$|F_{n+p}(u) - F_n(u)| \leq \|F_{n+p} - F_n\| \cdot \|u\|_2 \leq \varepsilon \cdot \|u\|_2 \quad \text{für } n \geq n_0, p \geq 1$$

Somit erhalten wir eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{C}$ . Da  $\mathbb{C}$  vollständig ist, existiert der Grenzwert der Zahlenfolge. Insbesondere gibt es den Grenzwert

$$F(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(u)$$

zu ii)

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(u + v) &= \lim_{m \rightarrow \infty} [F_m(u) + F_m(v)] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(u) + \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(v) \\ &= F(u) + F(v) \end{aligned}$$

und die Homogenität

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m(\gamma u) = \lim_{m \rightarrow \infty} \gamma F_m(u) = \gamma F(u)$$

Damit ist die Linearität gezeigt.

zu iii)

Sei

$$\|F_n - F_{n_0}\| \leq 1 = \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

Wir schreiben

$$\|F_n\| = \|F_n - F_{n_0} + F_{n_0}\| \leq \|F_n - F_{n_0}\| + \|F_{n_0}\| \leq 1 + \|F_{n_0}\| \quad (n \geq n_0)$$

Analog für  $\|F_1\|, \dots, \|F_{n_0-1}\|$ . Dann kann eine Schranke  $M$  definiert werden, die unabhängig von  $u$  ist. Somit kann nach oben abgeschätzt werden. Ansatz

$$\begin{aligned} |F_n(u)| &\leq M \cdot \|u\|_2 \\ \Rightarrow \left| \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) \right| &\leq M \cdot \|u\|_2, \quad M \text{ unabhängig von } u \end{aligned}$$

mit  $\left| \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) \right| = |F(u)|$ . Dann kann gefolgert werden, dass

$$|F(u)| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u) \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(u)| \leq M \cdot \|u\|_2$$

Also ist die Grenzfunktion selbst beschränkt und es gilt

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n \in \mathcal{L}$$

zu iv)

Bisher wurde nur die punktweise Konvergenz des linearen Funktionals gezeigt. In Punkt iv) weisen wir die Konvergenz in der Operatornorm nach. Dazu sei

$$\|F_{n+p} - F_n\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{genügend groß}$$

Dann ist mit  $\|u_\varepsilon\| = 1$  und Supremumseigenschaft

$$\|F_n - F\| \leq |F_n(u_{n,\varepsilon}) - F(u_{n,\varepsilon})| + \frac{\varepsilon}{3}, \quad u_{n,\varepsilon} \in C_{2\pi}$$

Der mittlere Teil  $|F_n(u_{n,\varepsilon}) - F(u_{n,\varepsilon})|$  kann mit  $\frac{2}{3}\varepsilon$  abgeschätzt werden. Denn

$$\begin{aligned} |F_n(u_{n,\varepsilon}) - F(u_{n,\varepsilon})| &= |F_n(u_{n,\varepsilon}) - F_{n+p}(u_{n,\varepsilon}) + F_{n+p}(u_{n,\varepsilon}) - F(u_{n,\varepsilon})| \\ &\leq \|F_n - F_{n+p}\| + |F_{n+p}(u_{n,\varepsilon}) - F(u_{n,\varepsilon})| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}, \quad p \text{ genügend groß} \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon \end{aligned}$$

Somit wurde gezeigt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n - F\| = 0$$

Wir haben damit den vollständigen Beweis geführt.

□

**Satz 6.1.4** (Eindeutigkeitssatz)

Sei  $F \in \mathcal{L}$  und  $e_k(x) = e^{ikx}$ . Dann

$$F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(e_k) = 0 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

*Beweis.*

Wir nehmen an, dass  $F(e_k) = 0, k \in \mathbb{Z}$ . Sei  $u \in C_{2\pi}$  und  $(u_n)$  in  $\tau$  eine Folge. Nach Weierstrass gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{\infty} \rightarrow 0$$

wobei  $u_n(x)$  gegeben ist durch

$$u_n(x) = \sum_{(k)} c_k e^{ikx}$$

Also

$$F(u_n) = \sum_{(k)} c_k \underbrace{F(e_k)}_{=0}$$

Deshalb können wir schließen

$$F(e_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(u_n) = 0$$

Somit rechtfertigt man

$$|F(u)| = \|F(u - u_n)\| \leq \|F\| \cdot \underbrace{\|u - u_n\|_{\infty}}_{\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)}$$

Womit  $F(u) = 0$  für alle  $u$  gezeigt ist. □

Unter Ausnutzung des Skalarprodukts erzeugt jedes Element eines Praehilbertraums ein stetiges Funktional.

**Satz 6.1.5** Sei  $C_{2\pi}$  der bislang studierte Praehilbertraum, dann definiert  $F : C_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}$  mit der Vorschrift

$$F_v(u) := (u, \bar{v}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \bar{v}(x) dx, \quad u, v \in C_{2\pi} \quad (6.1)$$

eine konjugiert-lineare, normerhaltende Abbildung, mit

$$\|F_v\| = \|v\|_2$$

woraus man zusätzlich die Injektivität

$$F_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = 0$$

erschließt. Die Abbildung ist im Allg. nicht surjektiv.

*Beweis.*

Wir stellen  $F_v(u)$  im Skalarprodukt dar,  $F_v(u) = (u, \bar{v})$ . Dann gilt einerseits

$$|F_v(u)| = |(u, \bar{v})| \leq \|u\|_2 \cdot \|\bar{v}\|_2 = \|u\|_2 \cdot \|v\|_2 \quad \Rightarrow \quad \|F_v\| \leq \|v\|_2$$

Andererseits können wir zeigen, dass

$$F_v \left( \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|_2} \right) = \frac{1}{\|\bar{v}\|_2} (\bar{v}, \bar{v}) = \frac{\|\bar{v}\|_2^2}{\|\bar{v}\|_2} = \|v\|_2$$

Daraus folgt die Gleichheit der Normen  $\|F_v\| = \|v\|_2$ .

□

Die Surjektivität der Abbildung  $F$  ist genau dann sichergestellt, wenn der zugrunde liegende Raum vollständig ist, sprich ein Hilbertraum ist. Das führt dann auf den Satz von Fréchet-Riesz.

**Korollar 6.1.6** Die Abbildung

$$C_{2\pi} \ni v \rightarrow F_v \in \mathcal{L}$$

erfüllt die Linearitätseigenschaften

$$i) F_{v+v'} = F_v + F_{v'}$$

$$ii) F_{\alpha v} = \alpha F_v$$

Sowie

$$\|F_v\| = \|v\|_2$$

Damit wird  $C_{2\pi}$  als ein Unterraum des Banachraums  $\mathcal{L}$  identifiziert.

## 6.2 Der Dualraum $\mathcal{L} = C_{2\pi}^*$

Nachdem im vorherigen Kapitel der Raum  $\mathcal{L}$  eingeführt, und dessen grundlegenden Eigenschaften diskutiert wurden, erörtern wir in diesem Kapitel die versprochenen Resultate für  $C_{2\pi}$ , mittels der Funktionale aus  $\mathcal{L}$ .

Zwei Funktionen  $u_s, u_r \in C_{2\pi}$  sind genau dann orthogonal zueinander, wenn

$$(u_s, u_r) = 0 \quad (r \neq s)$$

wobei

$$(u_s, u_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_s(x) \overline{u_r(x)} dx$$

Falls die Elemente der Menge  $\{u_r\}$  orthonormal zueinander sind, gilt sogar

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_s(x) \overline{u_r(x)} dx = \delta_{r,s}$$

**Bemerkung 6.2.1** Orthonormierte Vektoren sind linear unabhängig.

**Lemma 6.2.2** Seien  $e_k(x) = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}$ , paarweise orthonormal. Dann gilt

$$(e_k, e_r) = \delta_{kr}$$

*Beweis.*

$$(e_k, e_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-r)x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{i(k-r)x}}{i(k-r)} \right]_0^{2\pi} = 0, \quad \text{für } k \neq r$$

□

Die gleiche Eigenschaft gelten für den Sinus und den Cosinus, da sie über die Euler'schen Formeln direkt mit der Exponentialfunktion zusammenhängen. Dazu seien beide nochmal aufgeführt

$$c_k(x) = \frac{1}{2}(e_k(x) + e_{-k}(x)) = \cos kx$$

$$s_k(x) = \frac{1}{2i}(e_k(x) - e_{-k}(x)) = \sin kx$$

**Lemma 6.2.3** *Es gelten*

$$(c_k, c_r) = \delta_{kr} \quad \text{und} \quad (s_k, s_r) = \delta_{kr}$$

*Beweis.*

Wir zeigen nur den Sinus. Teil 1 möge der Leser selbst nachvollziehen.

Fallunterscheidung liefert für

$k \neq r$  und  $k, r \geq 1$ :

$$(s_k, s_r) = \left( \frac{1}{2i}(e_k - e_{-k}), \frac{1}{2i}(e_r - e_{-r}) \right)$$

$$= \frac{1}{4} ((e_k, e_r) - (e_k, e_{-r}) - (e_{-k}, e_r) + (e_{-k}, e_{-r}))$$

Die beiden äußeren Summanden sind wegen Lemma (6.2.2) sofort Null. Bei den beiden inneren muß man sich erst von der komplexen Konjugiertheit überzeugen. Dann verschwinden auch diese beiden.

Fall  $k = r$ :

$$(s_r, s_r) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

Die Funktion ist demnach noch nicht normiert. Wir dividieren durch die Länge und normieren so auf Länge Eins

$$\frac{s_r}{\|s_r\|_2} = \frac{\sin rx}{\sqrt{2}}$$

Insgesamt steht

$$(s_r, s_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(rx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(rx) dx = \frac{1}{2}$$

Für den Beweis des Cosinus muß noch eine Fallunterscheidung beachtet werden.

□

Wir formulieren nun den Projektionssatz für Fourier-Partialsommen

**Satz 6.2.4** (Beste Approximation mit Fourier-Partialsummen)

Sei  $u \in C_{2\pi}$  gegeben. Dann gilt

$$\left\| u - \sum_{|k| \leq n} (u, e_k) e_k \right\|_2 \leq \left\| u - \sum_{|k| \leq n} a_k e_k \right\|_2 \quad (6.2)$$

Das Minimum

$$a_k = (u, e_k), \quad |k| \leq n$$

ist eindeutig bestimmt durch

$$\sqrt{\|u\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |(u, e_k)|^2} = \text{Minimum}$$

*Beweis.*

Es reicht zu zeigen

$$\left\| u - \sum_{|k| \leq n} (u, e_k) e_k \right\|_2^2 \leq \left\| u - \sum_{|k| \leq n} a_k e_k \right\|_2^2$$

Die Partialsommen sind gegeben durch

$$S_n(u) = \sum_{k=-n}^n (u, e_k) e_k \in \tau_n$$

Weiter werde das Polynom  $T \in \tau_n$  definiert:

$$T = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e_k$$

Dann kann (6.2) wie folgt formuliert werden

$$\|u - S_n(u)\|_2 = \min_{T \in \tau_n} \|u - T\|_2 \quad (6.3)$$

Insbesondere ist  $S_n(u)$  die beste Approximierende von  $u$ . Wir diskutieren den Term  $\|u - T\|$  nun ausführlich. Es ist

$$\begin{aligned} \|u - T\|_2^2 &= \|u - S_n(u) - T + S_n(u)\|_2^2 \\ &= (u - S_n(u), u - S_n(u)) + (T - S_n(u), T - S_n(u)) \\ &\quad + (u - S_n(u), -T + S_n(u)) + \overline{(u - S_n(u), -T + S_n(u))} \end{aligned}$$

dabei verschwindet  $(u - S_n(u), -T + S_n(u))$  wegen der Orthogonalität, was unten nachgerechnet wird. Zunächst folgt

$$\|u - T\|_2^2 = \|u - S_n(u)\|_2^2 + \|S_n(u) - T\|_2^2 + [\dots]$$

Was zu zeigen war. Im Folgenden wird die Rechnung für

$$(u - S_n(u), -T + S_n(u)) = 0 \quad (6.4)$$

gemacht. Dazu

$$-T(x) - S_n(u)(x) = \sum_{k=-n}^n b_k e_k(x)$$

und setzen in (6.4) ein

$$\left( u - S_n(u), \sum_{k=-n}^n b_k e_k \right) = \sum_{k=-n}^n \overline{b_k} (u - S_n(u), e_k)$$

Da die Koeffizienten  $\overline{b_k}$  nicht alle verschwinden dürfen, muß zur Bestätigung der Aussage  $(u - S_n(u), e_k)$  Null ergeben. Wir rechnen

$$(u - S_n(u), e_k) = (u, e_k) - \sum_{r=-n}^n (u, e_r) (e_r, e_k) = 0$$

Damit ist die Existenz einer minimierenden Abbildung  $S_n(u)$  erbracht. Wir zeigen noch die Eindeutigkeit. Dazu

$$\begin{aligned} \|S_n(u) - T\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=-n}^n [(u, e_k) - a_k] e_k \right\|_2^2 \\ &= \left( \sum_{k=-n}^n [(u, e_k) - a_k] \cdot e_k, \sum_{r=-n}^n [(u, e_r) - a_r] \cdot e_r \right) \\ &= \sum_{(k)} \sum_{(r)} [(u, e_k) - a_k] \overline{[(u, e_r) - a_r]} (e_k, e_r) \\ &= \sum_{(k)} |(u, e_k) - a_k|^2 \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit ist gezeigt und der vollständige Beweis geführt. □

### Der Fourier-Partialsommen Operator

Für  $u \in C_{2\pi}$  setzt man

$$S_n(u) = \sum_{k=-n}^n (u, e_k) e_k$$

Man bezeichnet  $S_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$  als den Operator der n-ten Fourier-Partialsomme.

Für  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir die unendliche trigonometrische Reihe, Fourier-Reihe genannt,

$$S(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u, e_k) e_k$$

Wir listen einige Eigenschaften des Fourier-Partialsommen Operators auf.

**Satz 6.2.5** Sei  $S_n \in L(C_{2\pi})$ . Dann ist  $S_n$  ein Projektor (Operator) mit den Eigenschaften

- i)  $S_n^2 = S_n$  (Idempotenz)
- ii)  $S_n^* = S_n$  (Selbstadjungiert)
- iii)  $R(S_n) = \tau_n$  (Bild)
- iv)  $N(S_n) = \tau_n^\perp$  (Kern)
- v)  $\|S_n(u)\|_2 \leq \|u\|_2$  (Beschränktheit)

Der Operator  $S_n$  ist bezüglich der Maximumnorm nicht beschränkt.

*Beweis.*

Linearität.

$$\begin{aligned} S_n(u+v) &= \sum_{k=-n}^n (u+v, e_k) e_k \\ &= \sum_{(k)} [(u, e_k) + (v, e_k)] \cdot e_k \\ &= \sum_{(k)} (u, e_k) e_k + \sum_{(k)} (v, e_k) e_k \\ &= S_n(u) + S_n(v) \end{aligned}$$

Und

$$S_n(\gamma u) = \sum_k (\gamma u, e_k) e_k = \gamma S_n(u)$$

Damit gilt  $S_n \in L(C_{2\pi})$ .

Zu i)

$$\begin{aligned} S_n^2(u) &= S_n(S_n(u)) \\ &= S_n\left(\sum_{k=-n}^n (u, e_k) e_k\right) \\ &= \sum_{k=-n}^n (u, e_k) S_n(e_k) \\ &= S_n(u) \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wird

$$S_n(e_k) = \sum_{r=-n}^n (e_k, e_r) e_r = e_k$$

ausgenutzt.

Zu ii)

Der Operator kann beim Skalarprodukt ins zweite Argument geschoben werden und wird adjungiert. Also

$$(S_n(u), v) = (u, S_n^*(v))$$

bzw.

$$(S_n(u), v) = (u, S_n(v))$$

Dazu schreiben wir einfach

$$(S_n(u), v) = \sum_{k=-n}^n (u, e_k) (e_k, v)$$

und

$$(u, S_n(v)) = \sum_{r=-n}^n \overline{(v, e_r)} (u, e_r)$$

dabei ist  $\overline{(v, e_r)} = (e_r, v)$  und somit liefert der Vergleich beider Gleichungen die Aussage.

Zu iii) und iv)

Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \|u - S_n(u) + S_n(u)\|_2^2 \\ &= \|u - S_n(u)\|_2^2 + \|S_n(u)\|_2^2 + (u - S_n(u), S_n(u)) + (S_n(u), u - S_n(u)) \end{aligned}$$

Andererseits hat man

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \|u - S_n(u) + S_n(u)\|_2^2 \\ &= (u - S_n(u), S_n(u)) = (S_n^*(u - S_n(u)), u) \\ &= (S_n(u - S_n(u)), u) = (S_n u - S_n u, u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Zu v)

Beschränktheit. Aus

$$\|u - S_n u\|_2^2 + \|S_n u\|_2^2 = \|u\|_2^2$$

folgt sofort

$$\|S_n u\|_2 \leq \|u\|_2$$

□

Sei

$$S_n(u) = \sum_{k=-n}^n (u, e_k) e_k, \quad u \in C_{2\pi}$$

gegeben. Für die Norm gilt nach Satz (6.2.4):

$$\|S_n(u)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |(u, e_k)|^2$$

Aufgrund der Minmaleigenschaft der Fourierpolynome gilt der Pythagoras

$$\|u\|_2^2 = \|S_n u\|_2^2 + \|u - S_n u\|_2^2$$

und hieraus liest man

$$\|u\|_2^2 \geq \|u - S_n(u)\|_2^2 = \|u\|_2^2 - \sum_{k=-n}^n |(u, e_k)|^2 \geq 0$$

So erhält man

**Korollar 6.2.6** (Besselsche Ungleichung)

$$\sum_{k=-n}^n |(u, e_k)|^2 \leq \|u\|_2^2$$

**Bemerkung.**

Die Besselsche Ungleichung zeigt, dass die Folgen  $((u, e_k))_k$  und  $((u, e_{-k}))_k, k \in \mathbb{N}$  so schnell gegen Null abklingen, dass die dargestellte Funktion  $u$  konvergiert. Daher sind die beiden Folgen Elemente des Hilbertraums  $l^2$ .

### Konvergenz im quadratischen Mittel

Wir beschäftigen uns hier mit der Approximation im quadratischen Mittel. Das entspricht der Konvergenz im quadratischen Mittel.

#### Satz 6.2.7 ( $L^2$ -Konvergenz)

Für eine Funktion  $u \in C_{2\pi}$  konvergiert die Folge  $(S_n u)$  im quadratischen Mittel gegen  $u$ ,

$$\|u - S_n u\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Gleichwertig dazu ist die Parsevalsche Gleichung

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(u, e_k)|^2$$

*Beweis.*

Bekannt ist  $\|u\|_2 \leq \|u\|_\infty$ . Ausgeschrieben

$$\|u\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |u(x)| = \|u\|_\infty$$

Nach Satz von Weierstrass gibt es  $\forall \varepsilon > 0$  für die eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  existiert, dass für  $T_n \in \tau_n$  gilt

$$\|u - T_n\|_\infty < \varepsilon$$

Weiter gilt wegen Minimaleigenschaft von  $S_n$  die Ungleichung

$$\|u - S_m(u)\|_2 \leq \|u - S_n(u)\|_2 \quad \text{für } m \geq n$$

In Worten: Je mehr Polynome zur Approximation herangezogen werden, desto besser ist die Konvergenz.

Dann folgt

$$\|u - S_n u\|_2 \leq \|u - T_n\|_2 \leq \|u - T_n\|_\infty < \varepsilon$$

Damit ist der Beweis erbracht. □

Wichtige Folgerung ist die Besselsche Gleichung, oft auch unter dem Namen Parsevalsche Gleichung zu finden.

#### Korollar 6.2.8 (Bessel-Identität, Parseval-Gleichung)

Aus dem Projektionssatz für Fourier-Partialsummen, der Folgerung (6.3) folgt für eine Funktion  $u \in C_{2\pi}$

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(u, e_k)|^2 \tag{6.5}$$

Wir stellen die Ergebnisse zusammen.

**Orthonormalbasen**

Es sei  $H$  ein Hilbertraum. Eine Teilmenge  $S \subset H$  wird *Orthonormalsystem* genannt, falls

$$\|e\| = 1 \quad \text{und} \quad (e, u) = 0 \quad \text{für } e, u \in S, e \neq u$$

gelten. Aus dem Orthonormalsystem kann die *Orthonormalbasis* abgeleitet werden. Die Menge  $S$  heißt Orthonormalbasis, wenn für ein weiteres Orthonormalsystem  $T$  gilt

$$S \subset T \quad \Rightarrow \quad T = S$$

Darauf aufbauend können das Gram-Schmidt Verfahren und die Besselsche Ungleichung hergeleitet werden. Wir interessieren uns hier für eine ganze Reihe von äquivalenten Aussagen, die mit den bisherigen Ergebnissen des Kapitels bewiesen werden können.

**Satz 6.2.9** *Es sei  $S \subset H$  ein Orthonormalsystem, wobei  $H$  ein Praehilbertraum darstellt. Dann sind äquivalent*

- i)  $S$  ist eine Orthonormalbasis,
- ii) Es gilt  $H = \overline{\text{lin}S}$ ,
- iii) Es gibt die Darstellung

$$u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u, e_k) e_k \quad \forall u \in H, e_k \in S,$$

- iv) Skalarprodukt zweier Elemente

$$(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u, e_k) (e_k, v) \quad \forall u, v \in H,$$

- v) Parsevalsche Gleichung

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(u, e_k)|^2 \quad \forall u \in H$$

Wir rechnen nun ausführlich ein Beispiel zur Bessel-Gleichung.

**Beispiel.**

Es sei die gerade Lipschitz-stetige Funktion

$$u(x) = |\sin x|$$

vorgelegt. Dazu die Skizze

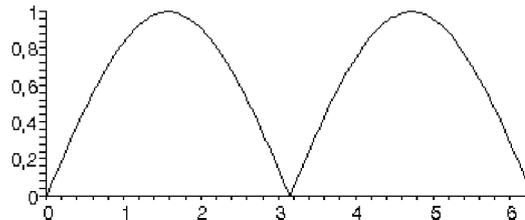


Abbildung 6.2: Die Funktion  $|\sin x|$  mit Maple geplottet

Wir berechnen zuerst die linke Seite von (6.5). Dazu

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x D \cos x dx \\ &= -\frac{1}{\pi} [\sin x \cos x]_0^\pi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D \sin x \cos x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [1 - \sin^2 x] dx = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Berechnung der Fourierkoeffizienten  $(u, e_k)$  ergibt

$$\begin{aligned} (u, e_k) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^\pi [\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)] dx \\ &= \frac{1}{\pi \cdot 2} (1 - (-1)^{k+1}) \left( \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1} \right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} (1 + (-1)^k) \frac{2k}{(k+1)(k-1)} \end{aligned}$$

Damit können wir nun eine Reihendarstellung angeben

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(u, e_k)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} (1 + (-1)^k) \frac{k^2}{(k+1)^2 (k-1)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

**Satz 6.2.10** (Bessel-Gleichung für lineare Funktionale)

Für ein lineares beschränktes Funktional  $F \in \mathcal{L}$  gilt die Identität

$$\|F\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(e_k)|^2$$

wobei  $F := F_u(v)$  geschrieben wird als

$$F_u(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) u(x) dx$$

Es sei ausdrücklich daran erinnert, dass diese Definition nicht mit dem Skalarprodukt zweier Funktionen zu verwechseln ist. In der dortigen Definition wird nämlich  $u$  konjugiert. Weiter gilt die Normgleichheit

$$\|F_u\| = \|u\|_2$$

Wir zeigen nun den Beweis des Satzes.

*Beweis.*

Wir zeigen das gewünschte Ziel mit der Gleichheit der Normen. Deshalb sei zuerst an die allgemeine Definition der Operatornorm erinnert

$$\|F\| = \sup_{u \neq 0} \frac{|F(u)|}{\|u\|_2} = \sup_{\|u\|_2=1} |F(u)|$$

Sei  $u \in C_{2\pi}$  gewählt. Wir können mit der Bessel-Identität für Funktionen, Korollar (6.2.8), dann schreiben

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(u, e_k)|^2$$

Zweitens konstruieren wir die Funktionale aus  $\tau_n$ . Dazu führen wir das trigonometrische Polynom  $S_n(F) \in \tau_n$  ein,

$$S_n(F)(x) = \sum_{k=-n}^n F(e_{-k}) e^{ikx}$$

Anwendung des Funktionals  $F$  auf Partialsumme  $S_n(F)$  liefert

$$\begin{aligned} F(S_n(F)) &= \sum_{(k)} F(e_{-k}) \cdot F(e_k) \\ &= \sum_{(k)} |F(e_k)|^2 \quad \text{mit } F(\bar{u}) = \overline{F(u)} \\ &= \|S_n(F)\|_2^2 \quad (L^2\text{-Norm}) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$|F(S_n(F))| = \|S_n(F)\|_2^2$$

Wir erweitern mit  $\|S_n(F)\|_2$  und können schließen

$$\frac{|F(S_n(F))|}{\|S_n(F)\|_2} = \frac{\|S_n(F)\|_2^2}{\|S_n(F)\|_2} = \|S_n(F)\|_2 \leq \|F\| \quad (6.6)$$

Es folgt somit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(e_k)|^2 \leq \|F\|^2 \quad (6.7)$$

Wie man leicht sieht, ist die Summe auf der linken Seite durch  $\|F\|^2$  beschränkt. Der erste Teil ist hiermit gezeigt. Die Gleichheit in (6.7) wird mit dem Satz von Weierstrass herbeigeführt. Dazu sei die Funktion  $u \in C_{2\pi}$  betrachtet. Dann folgt mit Satz von Weierstrass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - S_n(u)\|_2 \rightarrow 0 \quad (6.8)$$

Die Stetigkeit des Funktionals bringt

$$F(S_n(u)) \rightarrow F(u) \quad (6.9)$$

Weiter benutzen wir den Satz des Pythagoras

$$\|u\|_2^2 = \|S_n(u)\|_2^2 + \|u - S_n(u)\|_2^2$$

Der letzte Term geht wegen (6.8) gegen Null. Daraus folgt die monotone Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(u)\|_2 \rightarrow \|u\|_2 \quad (6.10)$$

Wir kehren zur Definition zur Operatornorm zurück, benutzen (6.9) und (6.10), und können schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(S_n(u))}{\|S_n(u)\|_2} \rightarrow \frac{F(u)}{\|u\|_2} \quad (6.11)$$

Wir lassen diese Aussage zunächst so stehen, betrachten die Fourier-Partialsummen

$$S_n(u) = \sum_{k=-n}^n (u, e_k) e_k$$

wenden das Funktional  $F$  darauf an, und nutzen dessen Linearität aus

$$F(S_n(u)) = \sum_{k=-n}^n (u, e_k) F(e_k) \quad (6.12)$$

Wir setzen (6.12) in Betrag, um so eine Abschätzung nach oben zu erreichen

$$|F(S_n(u))| = \left| \sum_{(k)} (u, e_k) F(e_k) \right| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left( \sum_{(k)} |(u, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{(k)} |F(e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Wir folgern somit

$$|F(S_n(u))| \leq \|u\|_2 \cdot \left( \sum_{k=-n}^n |F(e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Aus der Konvergenz (6.11) und Division durch  $\|u\|_2$  erhalten wir

$$\frac{|F(u)|}{\|u\|_2} \leq \left( \sum_{k=-n}^n |F(e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

und erschließt so die Operatornorm von  $F$ ,

$$\|F\| \leq \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F(e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Zusammen mit  $\|S_n(F)\|_2 \leq \|F\|$ , siehe Aussage (6.6), erhalten wir das gewünschte Ergebnis. □

Die Einführung des inneren Produkts zweier Funktionale erlaubt die Vervollständigung des Raums  $\mathcal{L}$  zu einem Hilbertraum.

**Satz 6.2.11** (Skalarprodukt und Vollständigkeit von  $\mathcal{L}$ )

Seien  $F, G \in \mathcal{L}$ . Man setzt als inneres Produkt der beiden Funktionale

$$(F, G) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(e_k) \overline{G(e_k)}$$

Somit ist der Raum  $\mathcal{L}$  ein Hilbertraum.

*Beweis.*

$$\left| \sum_{(k)} F(e_k) \overline{G(e_k)} \right| \leq \left( \sum_{(k)} |F(e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{(k)} |G(e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|F\| \cdot \|G\| < \infty$$

Die definierenden Folgen von  $(F, G)$  sind demnach absolut konvergent und das Skalarprodukt ist wohldefiniert. Die weiteren Eigenschaften werden nicht ausgeführt.

Die Vollständigkeit bezüglich des inneren Produkts folgt mit der Bessel-Gleichung (6.2.10) und dem Vollständigkeitssatz (6.1.3). □

**Lemma 6.2.12** Für vorgegebene Funktionen  $u, v \in C_{2\pi}$  zeigt man

$$(F_u, F_v) = (u, v)$$

Damit wird  $C_{2\pi}$  als ein Unterraum des Hilbertraums  $\mathcal{L}$  identifiziert.

*Beweis.*

Wir setzen

$$\begin{aligned} F_u(w) &= (w, \bar{u}) \\ F_v(w) &= (w, \bar{v}) \end{aligned}$$

mit  $w = e_{-k}$  folgt

$$\begin{aligned} F_u(e_{-k}) &= (e_{-k}, \bar{u}) = (u, e_k) \\ F_v(e_{-k}) &= (e_{-k}, \bar{v}) = (v, e_k) \end{aligned}$$

Mit der Definition aus Satz (6.2.11) schreiben wir

$$\begin{aligned}
 (F_u, F_v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_u(e_k) \overline{F_v(e_k)} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u, e_{-k}) \overline{(v, e_{-k})} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u, e_k) \overline{(v, e_k)} \quad \text{da } k \rightarrow -k \\
 &= (u, v)
 \end{aligned}$$

□

Da  $u, v \in C_{2\pi}$  gilt nach Satz (6.2.7)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(v) \rightarrow v \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|v - S_n(u)\|_2 \rightarrow 0$$

Wir untersuchen nun die Fragestellung, ob dann auch

$$(u, S_n(v)) \rightarrow (u, v) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

konvergiert. Dazu die folgende Betrachtung

$$|(u, v) - (u, S_n(v))| = |(u, v - S_n(v))| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|u\|_2 \cdot \|v - S_n(v)\|_2 \rightarrow 0,$$

da  $\|v - S_n(v)\|_2 \rightarrow 0$  nach Weierstraß gilt. Mit der Stetigkeit des Skalarproduktes schließen wir noch

$$(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u, S_n(v)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} \overline{(v, e_k)} (u, e_k)$$

Aus Lemma (6.2.12) erhält man außerdem

**Korollar 6.2.13** Für  $u \in C_{2\pi}$  gilt

$$i) \quad u \rightarrow F_u,$$

$$ii) \quad \|u\|_2 = \|F_u\|$$

Die Definition des Fourier-Partialsummen Operators wird auf ein stetiges Funktional  $G$  ausgeweitet und erhält so

$$S_n(G) = \sum_{k=-n}^n G(e_{-k}) e_k$$

$S_n(G)$  ist ein trigonometrisches Polynom vom Grad  $n$ .

**Satz 6.2.14** Für  $G \in \mathcal{L}$  konvergiert die Fourier-Partialsumme  $S_n(G)$  in der Operatornorm gegen  $G$ , d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G - S_n(G)\| \rightarrow 0,$$

Somit liegt  $\tau$  dicht in  $\mathcal{L}$ .

*Beweis.*

Es gelten

$$(G - S_n(G))(e_k) = \begin{cases} 0, & |k| \leq n \\ G(e_k), & |k| > n \end{cases}$$

Mit der Bessel-Gleichung zeigt man dann

$$\|G - S_n(G)\|^2 = \sum_{|k|>n} |G(e_k)|^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

□

Zur weiteren Vertiefung diskutieren wir nun ein Beispiel. Es wird die Fourierreihe einer stückweise stetigen Funktion entwickelt. Dazu nutzen wir Satz (6.2.10).

**Beispiel.**

Gegeben sei die ungerade Funktion  $v(x) = \text{sgn}(\sin x)$ .

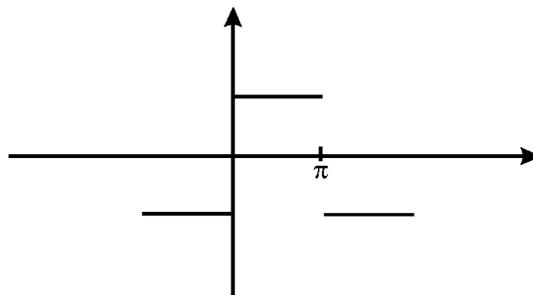


Abbildung 6.3: Die Funktion  $v(x) = \text{sgn}(\sin x)$

Dazu definieren wir das lineare beschränkte Funktional  $E \in \mathcal{L}$

$$E(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \text{sgn}(\sin x) dx$$

mit  $\|E\| = 1$ . Die Bessel-Gleichung für lineare Funktionale, Satz (6.2.10), liefert

$$\|E\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |E(e_k)|^2 \quad (6.13)$$

Es wird nun  $E(e_k)$  berechnet. Unter Ausnutzung der Euler'schen Formel wird zunächst die Exponentialfunktion zerlegt

$$\begin{aligned} E(e_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \text{sgn}(\sin x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \text{sgn}(\sin x) dx + i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \text{sgn}(\sin x) dx \end{aligned}$$

Der erste Summand wird Null, da eine ungerade Funktion über ein symmetrisches Intervall integriert wird. Weiter folgt

$$\begin{aligned} E(e_k) &= \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \sin kx \, dx \\ &= \frac{i}{\pi} \left[ \frac{-\cos kx}{k} \right]_0^\pi \\ &= \frac{i}{k\pi} (1 - \cos k\pi) \quad (= 0 \text{ für } k \text{ gerade}) \end{aligned}$$

Einsetzen in (6.13) bringt die Potenzreihendarstellung der 1

$$1 = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{k^2} [1 - \cos k\pi]^2$$

Es gilt außerdem die Darstellung

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^2}$$

### Der Vektorraum $PC_{2\pi}$

Wir definieren analog zum Raum  $C_{2\pi}$  den Raum  $B_{2\pi}$  mit

$$v \in B_{2\pi} \quad \text{mit } v(x+2\pi) = v(x)$$

Mit diesen Betrachtungen sind wir nun in der Lage den Raum der stückweise stetigen beschränkten Funktionen  $PC_{2\pi}$  zu konstruieren und zu verstehen. Dabei steht  $PC$  für *piecewise continuous*.

Eine Funktion  $v$  ist genau dann ein Element von  $PC_{2\pi}$ , wenn es eine Partition gibt mit

$$0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{r-1} < x_r = 2\pi$$

dabei ist  $v$  stetig im offenen Intervall  $(x_j, x_{j+1})$  für  $j = 0, \dots, r-1$ , und es existieren die einseitigen Grenzwerte

$$v(x_j+) \quad \text{und} \quad v(x_j-)$$

Außerdem setzt man

$$v(x_j) = \frac{1}{2} [v(x_j-) + v(x_j+)]$$

Mit diesen Vorgaben kann gezeigt werden, dass  $PC_{2\pi}$  eine Algebra ist.

**Satz 6.2.15** *Der Vektorraum der stückweise stetigen beschränkten Funktionen  $PC_{2\pi}$  ist eine Algebra, die  $C_{2\pi}$  enthält.*

Damit sind aber lediglich die algebraischen Eigenschaften des Raums beschrieben. Es bleibt die Frage zu klären, ob die Supremumsnorm den  $PC_{2\pi}$  zu einem Banachraum macht. Diese Fragestellung möge der aufmerksame Leser selbst erörtern.

Wir besprechen noch die Konstruktion von linearen Funktionalen auf  $PC_{2\pi}$ . Dazu wird wie gewohnt für  $v \in PC_{2\pi}$  die nächste Konstruktion verwendet

$$F_v(u) = (u, \bar{v}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) v(x) \, dx, \quad u \in C_{2\pi}$$

Dann ist  $F \in \mathcal{L}$ , es gilt  $\|F_v\| = \|v\|_2$  und  $PC_{2\pi}$  wird als Unterraum von  $\mathcal{L}$  erkannt.

**Beispiel.**

Die periodischen Treppenfunktionen liegen in  $PC_{2\pi}$ :

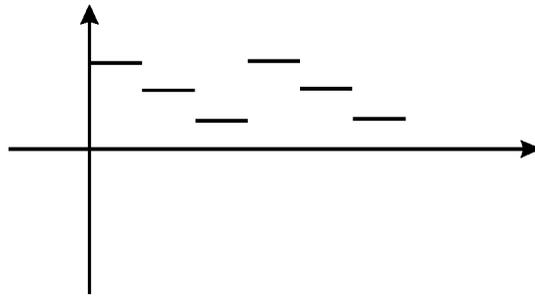


Abbildung 6.4: Beispiel einer Funktion aus  $PC_{2\pi}$

### 6.3 Wiener Algebra $A_{2\pi}$

In diesem Kapitel wird ein weiterer wichtiger Raum besprochen. Die sog. Wiener Algebra ist der Vektorraum aller  $2\pi$ -periodischen stetigen Funktionen, deren Fourierreihe absolut konvergiert. Somit wird eine stärkere Art der Konvergenz als bisher gefordert. Definiere

$$u \in A_{2\pi} \Leftrightarrow \sum_k |(u, e_k)| < \infty$$

Mit der Norm

$$\|u\|_a := \sum_k |(u, e_k)|$$

Der folgende Darstellungssatz gilt an dieser Stelle. Wir schreiben  $\hat{u}(n) := (u, e_n)$ . Es gilt die Äquivalenz

$$u \in A_{2\pi} \Leftrightarrow (\hat{u}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$$

Dabei ist  $l^1(\mathbb{Z})$  der vollständig normierte Vektorraum aller „zweiseitigen“ absolut summierbaren Folgen  $(\hat{u}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit zugehöriger Norm

$$\|(\hat{u}_n)\|_{l^1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n|$$

Dann kann so argumentiert werden, dass die Abbildung  $u \mapsto \hat{u}(n)$  ein isometrischer Isomorphismus zwischen  $A_{2\pi}$  und  $l^1(\mathbb{Z})$  ist.

Also ist  $A_{2\pi}$  eine Banachalgebra.

**Satz 6.3.1** Für  $u \in C_{2\pi}$  erhält man

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_a$$

Damit kann  $A_{2\pi}$  in den Raum  $C_{2\pi}$  stetig eingebettet werden.

*Beweis.*

Wir nehmen die Partialsummen

$$\sigma_n(u)(x) = \sum_{k=-n}^n (u, e_k) e_k(x)$$

Für  $n' > n$  erhält man die Cauchy-Folge

$$|\sigma_n(u) - \sigma_{n'}(u)| \leq \sum_{|k|>n'} |(u, e_k)|$$

Dann existiert eine Funktion  $v \in C_{2\pi}$ , so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(u) - v\|_\infty \rightarrow 0$$

Laut Satz von Weierstrass gilt dann  $v = u$ , da die Fourier-Koeffizienten eindeutig bestimmt sind. □

Es sei nochmals an die typische Fragestellung der Funktionentheorie erinnert. Dort interessiert man sich für die absolute Konvergenz der Laurent-Reihen. D.h. wann gilt  $\sum |a_k| < \infty$  für eine Funktion der Bauart

$$u(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

**Lemma 6.3.2** Sei  $A_{2\pi}$  eine Algebra. Dann liegt das Produkt  $u \cdot v$  wieder in  $A_{2\pi}$  und die Multiplikation ist stetig wegen

$$\|u \cdot v\|_a \leq \|u\|_a \cdot \|v\|_a$$

*Beweis.*

Betrachtung der Reihen

$$u = \sum_k a_k e_k \quad \text{und} \quad v = \sum_l b_l e_l$$

Multiplikation liefert

$$u \cdot v = \sum_k \sum_l a_k b_l e_{k+l}$$

Aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihen (Voraussetzung!) darf umgeordnet werden (vergleiche Cauchy-Produkt von Reihen, Analysis I). Es folgt

$$u \cdot v = \sum_r \left( \sum_{k+l=r} a_k b_l \right) e_r$$

Damit ist

$$\sum_r |c_r| \leq \sum_r \sum_{k+l=r} |a_k| \cdot |b_l| = \|u\|_a \cdot \|v\|_a$$

□

Nicht jede Funktion  $u \in C_{2\pi}$  hat eine absolut konvergente Fourierreihe. Mit zusätzlicher Differenzierbarkeit kann aber die absolute Konvergenz der Fourierreihe erreicht werden.

**Satz 6.3.3** Es gilt

$$u \in C_{2\pi}^1 \Rightarrow u \in A_{2\pi}$$

*Beweis.*

Die Behauptung wird mit der Bessel-Identität bewiesen. Dazu

$$\sum_k |(Du, e_k)|^2 = \|Du\|_2^2$$

Außerdem möge der Leser verifizieren, dass

$$(Du, e_k) = ik(u, e_k) \quad \text{für } u \in C_{2\pi}$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned} |(u, e_0)| + \sum_{k \neq 0} |(u, e_k)| &= |(u, e_0)| + \sum_{k \neq 0} \left| \frac{(Du, e_k)}{k} \right| \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} |(u, e_0)| + \left( \sum_{k \neq 0} |(Du, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

□

Die Aussage kann auf höhere Glattheit erweitert werden:

**Korollar 6.3.4** Es gilt

$$u \in P_{2\pi} \Rightarrow u \in A_{2\pi}$$

Somit ist  $P_{2\pi}$  eine Unter algebra von  $A_{2\pi}$ .

Zu weiteren Untersuchungen definiert man den Unterraum  $W_{2\pi}^1 = PC_{2\pi}^1 \subset C_{2\pi}$  der absolut stetigen Funktionen. Dann gilt die Aussage

$$u(x) - u(0) = \int_0^x Du(y) dy, \quad x \in [0, 2\pi], \quad Du \in PC_{2\pi}$$

**Satz 6.3.5**  $W_{2\pi}^1$  ist eine Unter algebra von  $C_{2\pi}$ .

*Beweis.*

Wir zeigen

i)  $u + v \in W_{2\pi}^1$ ,

ii)  $u \cdot v \in W_{2\pi}^1$

zu i)

$$[u(x) + v(x)] - [u(0) + v(0)] = \int_0^x [Du(y) + Dv(y)] dy$$

zu ii)

$$u(x) \cdot v(x) - u(0) \cdot v(0) = \int_0^x [Du(y)v(y) + u(y)Dv(y)] dy$$

□

**Lemma 6.3.6** Jede Funktion  $u \in W_{2\pi}^1$  besitzt eine absolut konvergente Fourierreihe. D.h.

$$u \in W_{2\pi}^1 \Rightarrow u \in A_{2\pi}$$

**Lemma 6.3.7** Sei  $u \in W_{2\pi}^1$  eine Funktion, die nirgends verschwindet, sprich

$$\min_x |u(x)| > 0$$

Dann liegt  $\frac{1}{u} \in W_{2\pi}^1$  und damit  $\frac{1}{u} \in A_{2\pi}$ .

**Bemerkung.**

Laut Definition von  $A_{2\pi}$  besitzen die Funktionen  $u \in A_{2\pi}$  eine absolut konvergente Fourierreihe die nicht verschwindet. Dann besitzt die reziproke Funktion  $\frac{1}{u}$  nach vorangegangenen Lemma ebenfalls eine absolut konvergente Fourierreihe.

**Beispiel.**

Wir kennen bereits die Funktion  $\sin kx \in P_{2\pi}$ . Dann ist die Betragsfunktion  $v(x) = |\sin kx|$  aus  $W_{2\pi}^1$ .



Abbildung 6.5: Die Funktion  $v(x)$  und ihre Ableitung

Im Vorgriff auf das nächste Kapitel führen wir den Begriff der *schwachen Ableitung* ein. Damit werden dann später neue!!! Räume geschaffen, die sog. *Sobolev-Räume*. Man definiert

$$F_{Du}(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x) Du(x) dx$$

Speziell ist dann

$$F_{Du}(e_{-k}) = ik \cdot (u, e_k)$$

Dabei ist  $v$  eine stetige Funktion und die Ableitung  $Du$  wenigstens noch stückweise stetig. Es gilt weiterhin wie gehabt die Isometrie

$$\|F_{Du}\|^2 = \|Du\|_2^2 = \sum_k |(F_{Du}, e_{-k})|^2 < \infty$$

Die Beschränktheit zeigt man unter Ausnutzung von

$$|(F_{Du}, e_{-k})|^2 = |k|^2 |(u, e_k)|^2$$

Wir rechnen

$$\sum_{k \neq 0} |(u, e_k)| = \sum_{k \neq 0} \left| \frac{F_{Du}(e_k)}{ik} \right|^2 \leq \left( \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{k \neq 0} |F_{Du}(e_{-k})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

## 6.4 Periodischer Sobolev-Raum $H_{2\pi}^1$

Das Konzept der schwachen Ableitungen wird insbesondere in der Theorie der Finiten Elemente benutzt. Dort werden partielle Differentialgleichungen mittels Näherungsverfahren gelöst.

Das Prinzip sieht vor, zunächst für schwache (auch variationelle) Formulierungen die Existenz zu zeigen, ehe man die expliziten Gleichungen betrachtet.

Wir behandeln der Einfachheit halber den einfachsten Fall für  $r = 1$ , sprich die erste schwache Ableitung. Das Konzept kann später auf beliebige Ableitungen erweitert werden.

Ziel des Kapitels sind Aussagen über die Konvergenzgüte der Approximationen. Bisher wurde lediglich diskutiert, ob überhaupt Konvergenz vorliegt. Der Numeriker interessiert sich aber natürlich für die Geschwindigkeit der Konvergenz.

Wir wollen eine Funktion  $u \in C_{2\pi}$  als Element des Sobolevraums  $H^1$  bezeichnen, dann und nur dann, wenn es ein Funktional  $G \in \mathcal{L} = C_{2\pi}^*$  gibt, mit

$$G(e_{-k}) = ik \cdot (u, e_k), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (6.14)$$

Wobei dann  $G$  als *schwache Ableitung*  $Du$  von  $u$  bezeichnet wird und eindeutig bestimmt ist. Explizit ist  $G$  gegeben durch

$$G(u) = F_v(u) = (u, \bar{v}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) v(x) dx, \quad u \in C_{2\pi}$$

Falls  $u \in C_{2\pi}^1$ , d.h.  $u, Du \in C_{2\pi}$ , dann erhalten wir  $G = F_{Du}$  und (6.14) vereinfacht sich zu

$$G(e_{-k}) = ik \cdot (u, e_k) = (Du, e_k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

*Rechnung.*

Partielle Integration der rechten Seite. Dabei verschwindet der Randterm aufgrund der  $2\pi$ -Periodizität von  $u$ . Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} Du(x) dx &= [e^{-ikx} u(x)]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-ik) e^{-ikx} u(x) dx \\ &= ik \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx} dx \\ &= ik \cdot (u, e_k) \\ &= (Du, e_k) = G(e_{-k}) \end{aligned}$$

□

**Beispiel.**

Wir betrachten nochmal die schon bekannte Funktion

$$Du(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) = v(x)$$

und setzen

$$u(x) = \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t) dt, \quad \text{mit } u(0) = u(2\pi) = 0$$

Dann sieht man

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x < \pi \\ 1 - x & \text{für } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Beide Funktionen werden in der nachfolgenden Abbildung veranschaulicht.

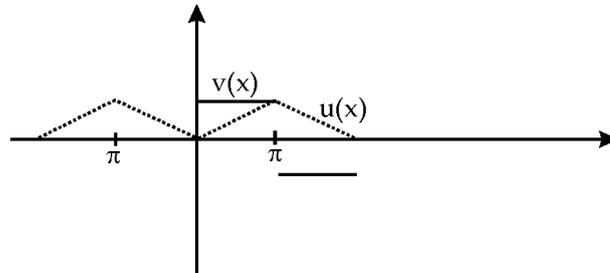


Abbildung 6.6: Plot der beiden Funktionen  $u$  und  $Du = v$

Die Funktion  $u$  entspricht über dem symmetrischen Intervall  $[-\pi, \pi]$  der Betragsfunktion  $f(x) = \left|\frac{x}{\pi}\right|$ . Wir berechnen die Fourierkoeffizienten, um so die Fourierreihe aufstellen zu können. Zunächst berechnen wir das Integral über  $u$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{x}{\pi}\right| dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \left(\frac{-x}{\pi}\right) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( 2 \left[ \frac{x^2}{2\pi} \right]_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi^2}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wir leiten im folgenden Schritt die Fourierkoeffizienten her. Dazu sei die Funktion nochmal hingeschrieben

$$f(x) = \frac{|x|}{\pi}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= (f, e_n) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left( - \int_{-\pi}^0 x e^{inx} + \int_0^{\pi} x e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left( \left[ \frac{x e^{-inx}}{in} \right]_{-\pi}^0 - \frac{1}{in} \int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx + \left[ \frac{-x e^{-inx}}{in} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{\pi} e^{-inx} dx \right) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left( -\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{-1 + (-1)^n}{\pi^2 \cdot n^2} \end{aligned}$$

Was zu zeigen war!

Kleiner Tipp am Rande:

$$\int_{-\pi}^0 (-1)^{-inx} dx + \int_0^{\pi} 1 \cdot e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(\sin x) e^{inx} dx$$

Durch Einführung des inneren Produkts vervollständigt man  $H_{2\pi}^1 = H^1$  zu einem Hilbertraum und erhält den einfachsten periodischen Sobolevraum.

**Satz 6.4.1** (Skalarprodukt und Vollständigkeit von  $H^1$ )

Gegeben seien  $u, v \in H^1 = H_{2\pi}^1$  und man setzt

$$(u, v)_1 := (u, v)_{H^1} := (u, e_0) \overline{(v, e_0)} + \sum_{k \neq 0} k^2 (u, e_k) \overline{(v, e_k)}$$

als Skalarprodukt. Weiter wird der Vektorraum  $H^1$  mit der von dem Skalarprodukt induzierten Norm zu einem Hilbertraum.

*Beweis.*

Zunächst einmal gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(x)|^2 dx = \sum_k |(u, e_k)|^2 \quad (6.15)$$

und impliziert

$$|(u, e_k)| \rightarrow 0 \quad \text{für } |k| \rightarrow \infty \quad (6.16)$$

Wir können mit Hilfe der einleitenden Bemerkungen des Kapitels nun die schwachen Ableitungen formulieren

$$Du = G \in \mathcal{L} \quad \text{und} \quad Dv = H \in \mathcal{L}$$

Konkret dargestellt

$$G(e_{-k}) = ik \cdot (u, e_k) \quad \text{und} \quad H(e_{-k}) = ik \cdot (v, e_k)$$

Dann folgt wegen (6.15) und (6.16), dass die Reihen beschränkt sind

$$\sum_k |G(e_{-k})|^2 < \infty \quad \text{und} \quad \sum_k |H(e_{-k})|^2 < \infty$$

Einsetzen in die Definition des Skalarprodukts liefert

$$\sum_k k^2 |(u, e_k)|^2 < \infty \quad \text{und} \quad \sum_k k^2 |(v, e_k)|^2 < \infty$$

Weiter

$$\sum_{(k)} k^2 |(u, e_k) \overline{(v, e_k)}| \leq \left( \sum_{(k)} k^2 |(u, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{(k)} k^2 |(v, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|G\| \cdot \|H\| < \infty$$

In der ersten Zeile wurde mit der Hölder-Ungleichung (Cauchy-Schwarz) abgeschätzt. Wegen der Beschränktheit ist das Skalarprodukt wohldefiniert.

Streng genommen müssen als nächstes die Eigenschaften für Skalarprodukte überprüft werden. Das möge der aufmerksame Leser tun!

Wir wollen gemeinsam die Vollständigkeit des Raumes  $H^1$  erarbeiten. Mit

$$\sum_{k \neq 0} k^2 |(u, e_k)|^2 < \infty$$

als Voraussetzung, kann gezeigt werden, dass

$$\sum_{k \neq 0} |(u, e_k)| \cdot k \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left( \sum_{k \neq 0} |(u, e_k)|^2 k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

beschränkt ist. Nach unseren bisherigen Überlegungen haben wir folgende Resultate festgestellt

$$H_{2\pi}^1 \subset A_{2\pi} \subset C_{2\pi}$$

mit den dementsprechenden Normen

$$\|u\|_{\infty} \leq \|u\|_a \leq C \cdot \|u\|_1 \quad (6.17)$$

Es sei ausdrücklich vermerkt, dass wir in diesem Kontext  $H^1 = H_{2\pi}^1$  und  $\|u\|_1 = \|u\|_{H^1}$  meinen.

Wir nennen  $\|u\|_1$  eine *feinere* Norm gegenüber  $\|u\|_a$  bzw.  $\|u\|_{\infty}$ . Oder sprechen umgekehrt davon, dass die Supremumsnorm  $\|u\|_{\infty}$  die *größte* der drei Normen ist.

Geometrisch gesehen liegt die  $\|u\|_1$ -Einheitskugel in der  $\|u\|_a$ -Einheitskugel, und diese dann in der Menge  $\{u : \|u\|_{\infty} \leq 1\}$ .

Übertragen wir diese Veranschaulichungen auf Cauchy-Folgen dann erkennen wir: Eine Cauchy-Folge in  $H^1$  ist dann auch Cauchy-Folge in  $C_{2\pi}$ .

Wir kehren zu unserer eigentlichen Aufgabe, Überprüfung der Vollständigkeit des  $H^1$ , zurück.

### Vollständigkeit von $H^1$

Es sei  $(u_n)$  Cauchy-Folge in  $H^1$ . Gemäß der gewohnten Definition setzen wir  $G_n = Du_n$  (hieraus folgt  $G(e_{-r}) = ir(u, e_r)$ ) und erhalten so die Folge  $(G_n)$ . Wir zeigen, dass  $(G_n)$  Cauchy-Folge im Dualraum  $\mathcal{L}$  ist. Dazu

$$\|u_n\|_1^2 = |(u_n, e_0)|^2 + \|G_n\|^2$$

Damit ist  $(G_n)$  Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}$ . Unter Ausnutzung der Vollständigkeit des  $\mathcal{L}$  existiert der Grenzwert  $G$  mit der Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G_n - G\| \rightarrow 0$$

Die Cauchy-Folge  $(u_n)$  aus  $H^1$  ist wegen (6.17) auch Cauchy-Folge in  $C_{2\pi}$ . Dann gibt es ein  $v \in C_{2\pi}$ , so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (6.18)$$

Insbesondere sei darauf hingewiesen, dass dann auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v\|_2 \rightarrow 0$$

Mit diesen Informationen kann weiter geschlossen werden. Unter Ausnutzung der schwachen Ableitung

$$G_n(e_{-k}) = ik \cdot (u_n, e_k)$$

folgt wegen (6.18) und  $n \rightarrow \infty$

$$G_n(e_{-k}) = ik \cdot (v, e_k)$$

Die letzte Gleichung ist ein Beispiel für die *schwache Konvergenz*.

Jetzt wird noch bewiesen, dass die anfangs gewählte Cauchy-Folge  $(u_n)$  gegen die Grenzfunktion  $v \in H^1$  im Sinne der  $\|\cdot\|_1$ -Norm konvergiert. Es folgt mit  $G = Dv$

$$|G_n(e_{-k}) - G(e_{-k})| \leq \|G_n - G\| \cdot \|e_{-k}\|_2$$

wobei  $\|e_{-k}\|_2 = 1$ . Letzte Abschätzung

$$\|u_n - v\|_1^2 = |(u_n - v, e_0)|^2 + \|G_n - G\|^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Beide Summanden auf der rechten Seiten verschwinden für  $n \rightarrow \infty$ , aufgrund der vorher hergeleiteten Aussagen.

Wir haben Satz (6.4.1) komplett bewiesen. □

**Bemerkung.**

Aus der Normkonvergenz  $\|G_n - G\|, n \rightarrow \infty$  folgt stets die schwache Konvergenz.

Die spezielle Struktur des Sobolevraums  $H^1$  erlaubt nun erste Aussagen über den *Grad der Approximation*.

**Satz 6.4.2** ( *$L^2$ -Konvergenzgüte*)

Sei  $u \in H_{2\pi}^1$  mit zugehöriger Fourier-Partialsumme

$$S_n(u) = \sum_{|k| \leq n} (u, e_k) e_k \in \tau_n$$

gegeben. Dann ist die Approximationsgüte in der  $L^2$ -Norm von der Ordnung

$$\|u - S_n u\|_2 = o(n^{-1})$$

*Beweis.*

Wir wissen

$$\|u - S_n u\|_2^2 = \sum_{|k| > n} |(u, e_k)|^2$$

Für gegebenes  $u \in H_{2\pi}^1$  lautet das zugehörige Skalarprodukt

$$(u, u)_1 = |(u, e_0)|^2 + \sum_{|k| \geq 1} k^2 |(u, e_k)|^2 < \infty$$

Desweiteren benutzen wir die bekannte Gleichung

$$ik \cdot (u, e_k) = (Du, e_k)$$

Nun können wir mit der eigentlichen Abschätzung beginnen. Dazu

$$\begin{aligned}
 \|u - S_n u\|_2^2 &= \sum_{|k|>n} k^{-2} \cdot [k \cdot (u, e_k)]^2 \\
 &= \sum_{|k|>n} \frac{1}{k^2} |(Du, e_k)|^2 \\
 &\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{|k|>n} |(Du, e_k)|^2 \\
 &\leq \frac{1}{n^2} \underbrace{\|Du - S_n(Du)\|_2^2}_{=o(1)}
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass  $\|Du - S_n(Du)\|$  mit der Ordnung  $o(1)$  konvergiert. Damit ist die Behauptung erbracht und wir schreiben das Ergebnis

$$\|u - S_n u\|_2 \leq \frac{1}{n} o(1) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

□

Der nächste Satz behandelt die Konvergenzgüte in der Supremumsnorm. Wir erhalten hier eine langsamere Konvergenz im Vergleich zur  $L^2$ -Norm.

**Satz 6.4.3** ( $L^\infty$ -Konvergenzgüte)

Sei wie vorher  $u \in H_{2\pi}^1$  mit Fourier-Partialsumme  $S_n(u) = \sum_{|k|\leq n} (u, e_k) e_k$ . Die Approximationsgüte mit gleichmäßiger Konvergenz ist gegeben durch

$$\|u - S_n u\|_\infty = o(n^{-\frac{1}{2}})$$

*Beweis.*

Zunächst gilt die schon näher erläuterte Ungleichung

$$\|u - S_n u\|_\infty \leq \|u - S_n u\|_a$$

Damit schreiben wir sofort

$$\begin{aligned}
 \|u - S_n u\|_\infty &\leq \|u - S_n u\|_a = \sum_{|k|>n} |(u, e_k)| \\
 &= \sum_{|k|>n} \frac{1}{|k|} |(Du, e_k)| \\
 &\leq \left(2 \sum_{k>n} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{|k|>n} |(Du, e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left(2 \int_n^\infty \frac{1}{x^2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|Du - S_n(Du)\|_2 \\
 &= \left(2 \cdot \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\|Du - S_n(Du)\|_2}_{=o(1)} \\
 &= o(n^{-\frac{1}{2}})
 \end{aligned}$$

□

Beim Übergang von der Summe zum Integral des vorherigen Beweises wurde das Integralkriterium von Cauchy angewendet. Wir skizzieren den Schritt. Für monoton fallendes  $f > 0$  gilt

$$\int_n^\infty f(x) dx = \sup_{r>n} \int_n^r f(x) dx$$

Insbesondere dann auch

$$\int_n^{n+1} f(x) dx \geq f(n+1) \cdot [(n+1) - n] = f(n+1)$$

Zur Veranschaulichung

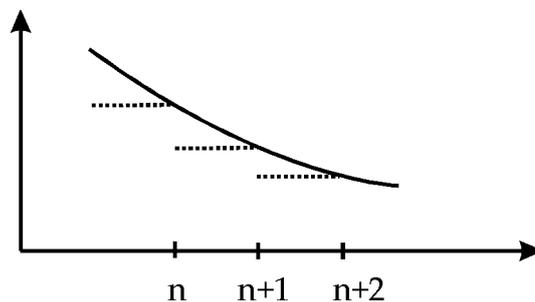


Abbildung 6.7: Das Integralkriterium von Cauchy

Abschließend sei gesagt, dass für eine Funktion  $u \in C_{2\pi}$  keine allgemeine Konvergenzaussage gemacht werden kann, da hier

$$\|u - S_n u\|_\infty \leq \ln(n) \cdot M, \quad u \in C_{2\pi}$$

Die Abschätzung ist nicht beschränkt und man findet Beispiele, in denen die Fourierreihe nicht gegen die Originalfunktion konvergiert.

## 6.5 Periodische Hilberträume mit reproduzierendem Kern:

$$H_{2\pi}$$

Kurz RKHS genannt.

In einem linearen Unterraum  $B \subset C_{2\pi}$  kann für alle  $x \in \mathbb{R}$  das lineare Funktional

$$u \rightarrow u(x), \quad u \in B$$

definiert werden. Wir bezeichnen mit  $u(x) = \delta_x \in L(B, \mathbb{C})$  das *Dirac-Maß*, man spricht auch von einem Punktmaß.

In vielen wichtigen Räumen sind die Punktmaße stetige Funktionale, beispielsweise in  $H_{2\pi}^1$ . Allerdings gibt es Innere Produkt Räume, wie  $C_{2\pi}$ , auf denen es unstetige Punktmaße gibt.

Einen Hilbertraum  $H = H_{2\pi}$  mit stetigen Punktmaßen nennen wir *Hilbertraum mit reproduzierendem Kern*, kurz RKHS. Natürlich sind wir an solchen RKHS interessiert, die als Unterräume von  $C_{2\pi}$  erkannt werden.

Ein Untervektorraum  $H \subset C_{2\pi}$  ist genau dann ein periodischer RKHS, wenn es zu jedem  $x \in \mathbb{R}$  eine Konstante  $K_x > 0$  gibt, so dass

$$|u(x)| \leq K_x \cdot \|u\|_H, \quad u \in H$$

Wir führen den Satz von Fréchet-Riesz nochmals auf.

**Satz 6.5.1** (*Darstellungssatz von Fréchet-Riesz für  $H$* )

Sei  $H$  ein Hilbertraum. Dann gibt es einen isometrischen Isomorphismus  $G : H \rightarrow H^*$ , d.h zu jedem  $G \in H^*$  existiert genau ein  $v_G \in H$  mit der Vorschrift

$$G(u) := (u, v_G), \quad u \in H$$

*Isometrie:*

$$\|G\| = \|v_G\|_2$$

Hilberträume werden also auf kanonische Weise mit ihrem Dualraum identifiziert.

*Beweis.*

VORAUSSETZUNGEN

Nach Satz (6.2.9) existiert zu jedem Hilbertraum eine Orthonormalbasis  $\{f_k\}$  mit der Relation

$$(f_k, f_i) = \delta_{ki}$$

Das heißt, der Abschluß des Erzeugendensystems bildet eine Basis

$$\overline{\langle \{f_k : k \geq 1\} \rangle} = H$$

Insbesondere kann kein weiterer Vektor senkrecht zu den Basisvektoren stehen, daher

$$(u, e_k) = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Wir nutzen die Parsevalsche Gleichung

$$\|u\|^2 = \sum_k |(u, e_k)|^2$$

und die Minimaleigenschaft (6.3)

$$\|u - T\| < \varepsilon, \quad \text{für } T \in \langle \{f_k : 1 \leq k \leq N\} \rangle$$

Nach Satz (6.2.9), Eigenschaft i) + ii) lässt sich  $T$  schreiben als

$$T = \sum_{(k)} \gamma_k f_k$$

Außerdem sei das  $H^1$ -Skalarprodukt zur Verfügung gestellt,

$$(u, v)_{H^1} = (u, e_0) \overline{(v, e_0)} + \sum_{|k| > 0} k^2 (u, e_k)_{H^1} \overline{(v, e_k)}$$

Speziell erhält man hieraus

$$(e_i, e_k)_{H^1} = \delta_{ik} \cdot \gamma_k \quad \text{und} \quad (e_k, e_k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ k^2, & k \neq 0 \end{cases}$$

Dann kann mit dem Gram-Schmidt Verfahren die Orthonormalbasis explizit berechnet werden. Wir erhalten als Basisvektoren

$$f_k = \frac{e_k}{|k|}$$

Somit können beliebige Vektoren als Linearkombinationen angegeben werden:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, f_k) f_k$$

BEWEIS.

Da  $G$  nach Voraussetzung ein stetiges lineares Funktional darstellt, definieren wir unter Ausnutzung der Linearitätseigenschaften

$$G(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (u, f_k) G(f_k)$$

sowie den Vektor

$$v_G := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{G(f_k)} f_k \tag{6.19}$$

Zu zeigen ist die Beschränktheit von

$$\sum_{k=1}^{\infty} |G(f_k)|^2 < \infty \tag{6.20}$$

Daraus folgt dann die tatsächliche Existenz des Elements  $v_G \in H$ . Wir wenden  $G$  auf (6.19) an:

$$G \left( \sum_{k=1}^n \overline{G(f_k)} f_k \right) = \sum_{k=1}^n |G(f_k)|^2$$

Und können abschätzen

$$\left| G \left( \sum_{k=1}^n \overline{G(f_k)} f_k \right) \right| \leq \|G\| \cdot \left\| \sum_{k=1}^n \overline{G(f_k)} f_k \right\| = \|G\| \cdot \left( \sum_{k=1}^n |G(f_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Also ist

$$\left( \sum_{k=1}^n |G(f_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|G\|$$

offensichtlich beschränkt im Sinne der  $L^2$ -Norm und (6.20) bestätigt. Damit existiert das Element  $v_G \in H = H_{2\pi}$  mit

$$v_G := \sum_k \overline{G(f_k)} \cdot f_k$$

Wir zeigen noch

$$G(u) = (u, v_G) = \sum_k (u, e_k) \cdot G(f_k)$$

Dazu nehmen wir die bekannte Aussage

$$(v_G, f_k) = \overline{G(f_k)}$$

Dann sieht man leicht

$$G(u) = \sum_k (u, e_k) \overline{(v_G, e_k)} = (u, v_G)$$

□

**Bemerkung 6.5.2** Die Funktion  $v_G \in H$  wird Repräsentant des stetigen Funktionals  $G$  genannt.

Der reproduzierende Kern ist eine Funktion der Bauart

$$G(u) = u(x) = (u, R(\cdot, x)) = (u(y), R(y, x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}, u \in H$$

Dabei nennt man  $R(\cdot, x)$  reproduzierenden Kern von  $H$ .

Die Menge  $M$  aller endlichen Linearkombinationen werden zusammengefasst,

$$M = \left\langle \{R(\cdot, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \right\rangle = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k R(\cdot, x_k) \mid x_k \in \mathbb{R}, \alpha_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\} \subset H$$

Damit lässt sich eine beliebige Funktion  $w \in M$  schreiben als

$$w(y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k R(y, x_k)$$

Hinweis am Rande: Green'sche Funktion.

**Lemma 6.5.3** *Der Abschluß von  $M$  ist  $H$ . D.h.*

$$\overline{M} = \overline{\langle \{R(\cdot, x) | x \in \mathbb{R}\} \rangle} = H$$

Manchmal findet man auch die Bezeichnung

$$\overline{M} = \text{cl} \langle \{R(\cdot, x) | x \in \mathbb{R}\} \rangle = H$$

wobei 'cl' für *closed* (abgeschlossen) steht.

*Beweis.*

Zunächst sei

$$N = \text{cl} \langle \{R(\cdot, x) | x \in \mathbb{R}\} \rangle$$

Zu zeigen ist, dass zu gegebenem  $u \in H$  ein  $w \in M$  existiert, so dass

$$\inf_{w \in M} \|u - w\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists (w_\mu) : \|u - w_\mu\| \rightarrow 0_+ \quad (\mu \rightarrow \infty)$$

In Worten: Es gibt eine Folge  $(w_\mu)$  in  $M$ , die gegen ein Grenzelement aus  $H$  konvergiert. Dazu erinnern wir an das orthogonale Komplement einer Menge

$$N^\perp = \{u \in H | (u, w) = 0 \quad \forall w \in N\}$$

Insbesondere ist dieser Raum endlichdimensional. Dann gilt der Projektionssatz und dessen Aussage über direkte Summen

$$H = N \oplus N^\perp$$

Wichtig ist, dass im endlichen Fall stets  $\overline{N} = N$  gilt! Diese Aussage kann im Unendlichen im Allg. nicht gelten. Es gilt aber immer:

$$\overline{N^\perp} = N^\perp$$

*Idee.*

Aufgrund der Definition sind in der Menge  $N^\perp$  nur Elemente enthalten deren Skalarprodukt verschwindet. Da das Skalarprodukt aber eine stetige Abbildung ist, gilt die obige Aussage. Außerdem gilt in allen Dimensionen

$$(N^\perp)^\perp = \overline{N}$$

Wir kehren zum eigentlichen Beweis zurück. Nach Definition des orthogonalen Komplements  $N^\perp$  gilt also

$$u \in N^\perp \Leftrightarrow (u, w) = 0 \quad \forall w \in N$$

Insbesondere dann auch für  $w = R(\cdot, x)$ . D.h. für  $u \in N^\perp$ :

$$u(x) = (u, R(\cdot, x)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Das ist aber nun äquivalent zu

$$u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N^\perp = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad H = N = \overline{M}$$

□

Man kann die Aussage etwas entschärfen, indem man mit den dyadischen Zahlen argumentiert. Wir geben deren Definition

$$S = \left\{ 2\pi \cdot \frac{k}{2^n}, k = 0, \dots, 2^n - 1, n \geq 0 \right\}$$

und

**Lemma 6.5.4** *Es gilt*

$$\text{cl}\{\langle R(\cdot, x_r) | x_r \in S \rangle\} = H$$

*Beweis.*

Kurz

$$u(x_r) = 0 \quad \forall x_r \in S$$

mit  $\bar{S} = [0, 2\pi]$ . Dann folgt  $u \equiv 0$ . □

Wir wollen unter bekannten Voraussetzungen den reproduzierenden Kern  $R(\cdot, x)$  explizit berechnen.

**Satz 6.5.5** *Es sei  $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$  eine ONB von  $H$ . Insbesondere ist  $(f_k, f_l) = \delta_{kl}$ . Dann lässt sich  $R(\cdot, x)$  schreiben als*

$$R(y, x) = \sum_k f_k(y) \cdot \overline{f_k(x)}$$

*Beweis.*

Wir sammeln bekannte Identitäten

$$G(u) = \sum_k (u, f_k) \cdot G(f_k) \tag{6.21}$$

$$\text{und } u(x) = (u, R(\cdot, x))$$

Wähle nun  $u$  geschickt:

$$u = R(\cdot, x'), \text{ bzw. } u(x) = R(x, x')$$

Einsetzen in (6.21) zeigt

$$\begin{aligned} u(x) = R(x, x') &= \sum_k (R(\cdot, x'), f_k) \cdot f_k(x) \\ &= \sum_k f_k(x) \cdot \overline{(f_k, R(\cdot, x'))} \\ &= \sum_k f_k(x) \cdot \overline{f_k(x')} \end{aligned}$$

Zusammengefasst

$$R(x, x') = \sum_k f_k(x) \cdot \overline{f_k(x')} \tag{6.22}$$

□

**Beispiel.**

Es sei der Raum  $H_{2\pi}^1$  betrachtet, mit dem zugehörigen Skalarprodukt

$$\begin{aligned} (u, v)_1 &= (u, e_0) \cdot \overline{(v, e_0)} + \sum_k k^2 (u, e_k) \overline{(v, e_k)} \\ &= (u, e_0) \overline{(v, e_0)} + (Du, Dv) \end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir durch Normierung die orthonormalen Einheitsvektoren

$$f_0 = e_0, \quad f_k = \frac{1}{|k|} e_k, \quad \text{für } k \neq 0$$

Mit (6.22) gilt

$$\begin{aligned}
 R(y, x) &= \sum_k f_k(y) \cdot \overline{f_k(x)} \\
 &= 1 + \sum_{k \neq 0} \frac{e_k(y) \cdot \overline{e_k(x)}}{k^2} \\
 &= 1 + \sum_{k \neq 0} \frac{e_k(y-x)}{k^2} \quad (\text{absolut konvergent}) \\
 &= 1 + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} \cos(k(y-x)) + i \sin(k(y-x)) \\
 &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k(y-x))
 \end{aligned}$$

EINSCHUB

An dieser Stelle schreiben wir um

$$-P_2(x) = \frac{(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2)}{6} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx, \quad x \in [0, 2\pi]$$

Es gilt also

$$R(y, x) = 1 - P_2(y-x)$$

Womit wir erste Ansätze zu den Bernoulli-Funktionen kennen gelernt haben.

Mit  $t = y - x$  folgt:

$$\begin{aligned}
 g(t) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k(y-x)) \\
 &= -D^{-1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k} \right) \\
 &= -D^{-1} \left( \frac{\pi - t}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Dabei erkennt man an der letzten Darstellung, dass  $g(t)$  eine ungerade Funktion ist, die man wie folgt skizzieren kann.

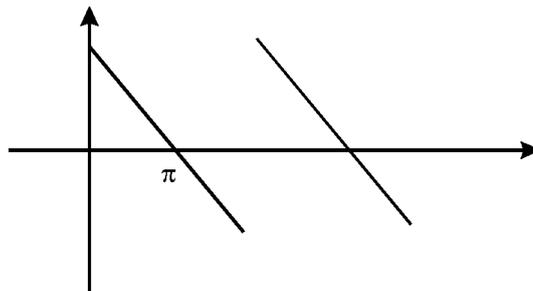


Abbildung 6.8: Die Funktion  $g(t)$

Zum späteren Aufstellen der (formalen) Fourierreihe werden nun die Fourierkoeffizienten berechnet. Dazu

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\pi-t)}{2} \left[ e^{-ikt} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-t}{2} D \left[ \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\pi-t}{2} \cdot \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{t=0}^{t=2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \left( \frac{1}{-ik} \right) \cdot e^{-ikt} dt\end{aligned}$$

Dabei verschwindet der zweite Term aus Orthogonalitätsgründen. Es folgt

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t) &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi - (2\pi)}{2} - \frac{\pi - 0}{2} \right) \cdot \frac{1}{-ik} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( -2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{1}{-ik} \\ &= \frac{1}{2\pi} (-\pi) \cdot \frac{1}{-ik} \\ &= \frac{1}{2ik}\end{aligned}$$

Einsetzen der Fourierkoeffizienten bringt

$$g(t) \sim \sum_{k \neq 0} \widehat{g}(t) e_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2i} (e_k(t) - e_{-k}(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kt$$

Wir präsentieren das vorläufige Ergebnis

$$\frac{\pi-t}{2} = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \sin kt$$

Formale Integration beider Seiten führt zu weiteren Erkenntnissen.

LINKE SEITE

$$\int \frac{\pi-t}{2} dt = -\frac{(\pi-t)^2}{4} + C$$

RECHTE SEITE

$$\int \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \sin kt = -\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \cos kt$$

Im nächsten Schritt soll die Integrationskonstante  $C$  explizit bestimmt werden. Da die Funktion  $g(t)$  ungerade ist, muß das Integral über das Intervall  $[0, 2\pi]$  verschwinden

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( -\frac{(\pi-t)^2}{4} + C \right) dt = 0$$

Dann schließt man

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (\pi-t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} \left[ \frac{-(\pi-t)^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{12} \pi^2$$

## 6.6 Periodische Hilberträume $H_d$

Mitentwickler dieser Theorie ist der tschechische Mathematiker Basbuska.

In diesem Abschnitt soll das Abklingverhalten der Fourierkoeffizienten untersucht werden. Dazu sei die positive symmetrische Folge  $(d_k) \in l^1(\mathbb{Z})$  vorgelegt, mit den Eigenschaften

- i)  $d_k = d_{-k} > 0, \quad k \in \mathbb{Z}$
- ii)  $d_k > d_{k+1}, \quad k \geq 0$  (Monotonie)
- iii)  $d_0 = 1,$
- iv)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k| < \infty$

Wir formulieren die erste Aussage.

**Lemma 6.6.1** Falls  $(a_k) \in l^1(\mathbb{Z})$  mit

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|a_k|^2}{d_k} < \infty,$$

so konvergiert die nachfolgende Reihe absolut

$$g(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikx} \in A_{2\pi}$$

Die  $a_k$  entsprechen den Fourierkoeffizienten.

*Beweis.*

Wir beginnen mit

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \leq n} |a_k| &= \sum_{|k| \leq n} \frac{a_k}{\sqrt{d_k}} \sqrt{d_k} \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left( \sum_{|k| \leq n} \frac{|a_k|^2}{d_k} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{|k| \leq n} d_k \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|a_k|^2}{d_k} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Damit

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| < \infty$$

□

Um weitere Ergebnisse zu erreichen, ersetzen wir nun  $a_k$  durch die Fourierkoeffizienten  $(u, e_k)$  einer Funktion  $u$ . Die Menge aller dieser Funktionen bezeichnen wir mit  $H_d$ :

$$H_d := \left\{ u \in C_{2\pi} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|(u, e_k)|^2}{d_k} < \infty \right\}$$

Nächster Schritt ist die Konstruktion des Skalarprodukts und der damit verbundenen Vollständigkeit von  $H_d$ .

**Satz 6.6.2** (Skalarprodukt und Vollständigkeit von  $H_d$ )

Man setze

$$(u, v)_d := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(u, e_k) \overline{(v, e_k)}}{d_k}$$

Damit wird  $H_d$  zu einem periodischen Hilbertraum.

*Beweis.*

VOLLSTÄNDIGKEIT DES  $l^2(\mathbb{Z})$

Wir zeigen zunächst einen anderen Vollständigkeitsbeweis. Im Prinzip umfasst der Raum  $H_d$  die quadratisch summierbaren Fourierkoeffizienten. Damit ist der Raum  $l^2(\mathbb{Z})$  isometrisch isomorph zu  $H_d$ . Deshalb wird zuerst die Vollständigkeit des  $l^2(\mathbb{Z})$  nachgewiesen.

Dazu sei  $(A_n)$  Cauchy-Folge in  $l^2$  mit  $A_n = (a_m^{(n)})_{m \in \mathbb{Z}}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Die Norm wird so definiert:

$$\| (a_k) \|_2^2 = \sum_k |a_k|^2$$

Es gilt für alle  $A = (a_m) \in l^2$  (gliedweise) und alle  $m \in \mathbb{Z}$  die Ungleichung

$$|a_m| \leq \|A\|_2 = \left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Daher sind bei beliebigem  $m$  die  $(a_m^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$ . Insbesondere ist der Raum  $\mathbb{R}$  vollständig. Demnach lässt sich das Grenzelement wie folgt setzen

$$a_m := \lim_{n \rightarrow \infty} a_m^{(n)} \tag{6.23}$$

Es bleibt  $A \in l^2$  und die Normkonvergenz  $\|A_n - A\|_2$  zu zeigen. Aufgrund der Cauchy-Eigenschaft der Folge  $(A_n) \in l^2$  kann zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Index  $N := N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  gewählt werden, mit

$$\|A_n - A_l\|_2 < \varepsilon \quad \forall n, l \geq N$$

Wir betrachten zunächst für endliche Summen und gehen anschließend zum Supremum über. Für alle  $R \in \mathbb{N}$  gilt

$$\left( \sum_{|m| \leq R} |a_m^{(n)} - a_m^{(l)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|A_n - A_l\|_2 = \left( \sum_m |a_m^{(n)} - a_m^{(l)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad \forall n, l \geq N$$

Mit Übergang  $l \rightarrow \infty$  gilt (6.23) und wir führen weiter aus, dass

$$\left( \sum_{|m| \leq R} |a_m^{(n)} - a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Diese Abschätzung gilt für alle  $R$ . Insbesondere

$$\left( \sum_{m \in \mathbb{Z}} |a_m^{(n)} - a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Die Differenz  $A - A_n$  liegt demnach in  $l^2$ . Aufgrund der Vektorraumstruktur des Raumes  $l^2$  schreiben wir

$$A = (A - A_n) + A_n$$

Ausführlich gilt mit  $A = (a_m) \in l^2$ :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{|m| \leq n} |a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &= \left( \sum_{|m| \leq n} |a_m^{(n)} - a_m + a_m^{(n)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \sum_{|m| \leq n} |a_m^{(n)} - a_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{|m| \leq n} |a_m^{(n)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon + \|(a_m^{(n)})\|_2 \\ &< \infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Also liegt das eigentliche Element  $A = (a_m)$  selbst in  $l^2$ . Der Beweis ist abgehandelt, da gleichzeitig die Normkonvergenz nachgewiesen wurde. Damit kann der zweite Teil gezeigt werden.

VOLLSTÄNDIGKEIT DES  $H_d$

Sei  $(u_r)$  Cauchy-Folge in  $H_d$ . D.h.

$$\|u_r - u_l\|_d < \varepsilon, \quad \text{für } r, l \rightarrow \infty$$

Mathematisch korrekter wäre

$$\|u_r - u_l\|_d < \varepsilon, \quad \inf(r, l) \rightarrow \infty$$

Aus der Cauchy-Eigenschaft folgt die Umrechnung

$$\begin{aligned} \|u_r - u_l\|_d^2 &= \sum_k \frac{|(u_r - u_l, e_k)|^2}{d_k} \\ &= \sum_k \frac{1}{d_k} |(u_r, e_k) - (u_l, e_k)|^2 \\ &= \sum_k \frac{1}{d_k} |a_k^{(r)} - a_k^{(l)}|^2 \\ &= \sum_k \left| \frac{a_k^{(r)}}{\sqrt{d_k}} - \frac{a_k^{(l)}}{\sqrt{d_k}} \right|^2 \\ &= \sum_k |b_k^{(r)} - b_k^{(l)}|^2 \end{aligned}$$

Da der Raum  $l^2$  ein Banachraum ist, existiert ein Grenzelement, etwa

$$\lim_{r \rightarrow \infty} b_k^{(r)} =: b_k \in l^2$$

Also

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{a_k^{(r)}}{\sqrt{d_k}} = \lim_{r \rightarrow \infty} b_k^{(r)} \rightarrow b_k = \frac{b_k \sqrt{d_k}}{\sqrt{d_k}}, \quad \text{mit } b_k \sqrt{d_k} = a_k = (u, e_k)$$

Somit kann nun die Grenzfunktion  $u$  konstruiert werden:

$$u(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} [b_k \sqrt{d_k}] e_k(x), \quad b_k \sqrt{d_k} = (u, e_k)$$

Es ist

$$\sum_k \frac{|b_k \sqrt{d_k}|^2}{d_k} = \sum_k |b_k|^2 < \infty$$

Also liegt  $u$  in  $H_d$  und konvergiert im Sinne der zugehörigen Norm, sprich  $\|u_r - u\|_d \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ . □

Die Menge der trigonometrischen Polynome  $\tau$  liegt in  $H_d$ . Dazu sei eine Funktion  $T \in \tau$  genommen. Betrachte diese in der  $\|\cdot\|_d$ -Norm

$$\|T\|_d^2 = \sum_k \frac{|(T, e_k)|^2}{d_k} = \sum_{(k)} \frac{|(T, e_k)|^2}{d_k} < \infty$$

Daraus folgt  $\tau \subset H_d$ . Definition der Funktion  $g \in H_d$ :

$$g(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx} \in H_d$$

Die Wohldefiniertheit folgt aus

$$\|g\|_d^2 = \sum_k \frac{|(g, e_k)|^2}{d_k} = \sum_k \frac{|d_k|^2}{d_k} = \sum_k d_k \stackrel{\text{n.v.}}{<} \infty$$

Wir formulieren die Translation von  $g$

$$\tau_a(g)(x) = g(x - a) \in H_d \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

Das auch die Translation Sinn macht, untersuchen wir im folgenden. Dazu schreiben wir  $g(x - a)$  ausführlich

$$g(x - a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (d_k e^{-ika}) e^{ikx}$$

Damit stellen wir die Endlichkeit der Norm fest

$$\|\tau_a(g)\|_d^2 = \sum_k \frac{|d_k e^{-ika}|^2}{d_k} = \sum_k d_k < \infty$$

und haben gleichzeitig die Isometrie  $\|\tau_a(g)\|_d = \|g\|_d$  gezeigt. Die Ergebnisse fassen wir zusammen

**Satz 6.6.3** Für eine Funktion  $u \in H_d$  liegt auch die Translation  $\tau_a(u)$  in  $H_d$  und wir stellen die Isometrie  $\|\tau_a(u)\|_d = \|u\|_d$  fest. Damit ist  $\tau_a$  ein isometrischer Isomorphismus. Speziell gilt

i)  $\tau_a$  ist linear

ii)  $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$

Die mit der definierenden Folge  $(d_k) \in l_1^+(\mathbb{Z})$  konstruierte Funktion  $g = g_d$ , wird erzeugende Funktion von  $H_d$  genannt. Die Menge der erzeugenden Funktionen liegt dicht in  $H_d$ .

**Lemma 6.6.4** (ONB von  $H_d$ )

$$f_k := \sqrt{d_k} e_k \quad \text{ist ONB von } H_d$$

*Beweis.*

Das Skalarprodukt zeigt

$$(f_k, f_l)_d = \sqrt{d_k} \sqrt{d_l} (e_k, e_l)_d = \sqrt{d_k}^2 \frac{\delta_{kl}}{d_k} = \delta_{kl}$$

□

**Satz 6.6.5** Es sei die Fourier-Partialsumme

$$S_n(u) = \sum_{|k| \leq n} (u, e_k) e_k$$

vorgelegt. Dann konvergiert diese monoton in der  $\|\cdot\|_d$ -Norm gegen  $u$ ,

$$\|u - S_n u\|_d \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

*Beweis.*

Wir setzen  $v_n = u - S_n u$  und erhalten die Eigenschaften

$$(v_n, e_k) = \begin{cases} 0 & (|k| \leq n) \\ (u, e_k) & (|k| > n) \end{cases}$$

Dann erhält man sofort

$$\|v_n\|_d^2 = \|u - S_n u\|_d^2 = \sum_{|k| > n} \frac{|(u, e_k)|^2}{d_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

□

Außerdem erhalten wir den Orthogonalprojektor  $P_n$  und die nachfolgende Beziehung des  $d$ -Skalarprodukts mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} P_n(u) &= \sum_{|k| \leq n} (u, f_k)_d f_k \\ &= \sum_{|k| \leq n} (u, f_k)_d \sqrt{d_k} e_k \\ &= \sum_{|k| \leq n} \frac{(u, e_k) (e_k \sqrt{d_k}, e_k)}{d_k} \cdot \sqrt{d_k} e_k \\ &= \sum_{|k| \leq n} (u, e_k) e_k \end{aligned}$$

Wir halten fest:  $H_d$  ist ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern. Wir geben zwei Beispiele für mögliche Folgen  $(d_k)$ .

**Beispiel 1.**

$$d_k = \frac{1}{k^{2r}}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad d_0 = 1$$

Für  $r = 1$  erhalten wir den Raum  $H_d = H_{2\pi}^1$ . Siehe Abschnitt (6.4).

**Beispiel 2.**

$$d_k = e^{-b \cdot |k|}$$

Wobei  $b$  gewissermaßen der Breite entspricht.

In beiden Beispielen werden die drei Eigenschaften der definierenden Folge  $(d_k)$  erfüllt. Weitere Beziehungen:

- i)  $H_d \subset C_{2\pi}^{r-1}$ ,
- ii)  $D^r u \in L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ ,
- iii)  $H_d \subset \text{Hol}_b$ , mit  $u(z)$  holomorph,  $|\text{Im}z| < b$

Es lässt sich schreiben

$$g_d(x) = \sum_k e^{-b \cdot |k|} \cdot e^{ikx} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-bk} \cos kx$$

Wir wiederholen. Für eine Funktion  $u \in H_d$  gilt

$$\sum_k \frac{|(u, e_k)|^2}{d_k} < \infty$$

Außerdem gelten die Inklusionen und Ungleichungen

$$H_d \subset A_{2\pi} \subset C_{2\pi}, \quad \|u\|_{\infty} \leq \|u\|_a \leq \|u\|_d$$

Es folgt

**Satz 6.6.6** ( $H_d$  ist RKHS)

Der periodische Hilbertraum  $H_d$  ist ein RKHS mit reproduzierendem Kern

$$R_d(y, x) = g_d(y - x)$$

wobei  $g_d$  in  $A_{2\pi}$  liegt und sich schreiben lässt als

$$g_d(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$$

*Beweis.*

Wir wählen zunächst die Folge  $(d_k)$  aus Beispiel 1. Desweiteren benutzen wir die Definition des Skalarprodukts auf  $H_d$ ,

$$(u, v)_d = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(u, e_k) \overline{(v, e_k)}}{d_k}$$

und

$$u(x) = \sum_k (u, e_k) e_k(x)$$

wobei

$$\sum_k |(u, e_k)| < \infty$$

Also ist  $H_d \subset A_{2\pi}$  und es gilt weiter die Identität

$$\|u\|_d^2 = \sum_k \frac{|(u, e_k)|^2}{d_k}$$

Diese impliziert nun

$$\|u\|_a \leq \sqrt{g_d(0)} \cdot \|u\|_d, \quad u \in H_d$$

Wegen der bereits bekannten Abschätzung  $\|u\|_\infty \leq \|u\|_a$  gilt

$$|u(x)| \leq \|u\|_\infty \leq \sqrt{g_d(0)} \cdot \|u\|_d, \quad u \in H_d, x \in \mathbb{R}$$

Also ist der Raum  $H_d$  ein periodischer RKHS. Nun muss noch der Kern  $R_d$  bestimmt werden. Sei dazu  $f_k$  eine ONB von  $H_d$  und setze  $R_d = R$ , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} R_d(y, x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(y) \overline{f_k(x)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{d_k} e^{iky} \sqrt{d_k} e^{-ikx} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik(y-x)} \\ &= g_d(y-x) \end{aligned}$$

□

Weiter sei  $v = R(\cdot, x)$ . Explizit

$$v(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [d_k e^{-ikx}] e^{iky}$$

Wir bilden das Skalarprodukt  $(v, e_k) = d_k e^{-ikx}$ , um die letzte Aussage zu machen. Es gilt zum Abschluß

$$(u, v)_d = (u, R(\cdot, x))_d = \sum_k \frac{(u, e_k) \overline{(v, e_k)}}{d_k} = \sum_k \frac{(u, e_k) d_k e^{ikx}}{d_k}$$

## 6.7 Bernoullipolynome/-funktionen in $H_{2\pi}^r$

Die Bernoulli-Polynome können später als reproduzierende Kerne aufgefasst werden und bilden eine Erweiterung der bereits bekannten Funktion  $P_2(x)$ .

Zur Wiederholung: Wir kennen den Raum  $H_{2\pi}^1$  mit der Folge  $(d_k)$  mit

$$d_0 = 1, \quad d_k = \frac{1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Außerdem erinnern wir an die Norm

$$\|u\|_{H^1} = |(u, e_0)|^2 + \sum_{|k|>0} k^2 |(u, e_k)|^2$$

Der reproduzierende Kern  $g_d$  lässt sich so schreiben:

$$g_d(x) = 1 + \sum_{|k|>0} \frac{e^{ikx}}{k^2} = 1 - P_2(x) = 1 + \frac{1}{6}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2)$$

wobei wir  $P_2(x)$  eingeführt haben als quadratisches Polynom auf  $[0, 2\pi]$  mit

$$P_2(x) = \sum_{k \neq 0} (ik)^{-2} e^{ikx} \quad (6.24)$$

Allgemeiner lassen sich die Bernoulli-Polynome nach dem gleichen Prinzip periodisieren. Wir ersetzen in (6.24) die 2 durch  $q$ :

$$P_q(x) = \sum_{k \neq 0} (ik)^{-q} e^{ikx}, \quad q \in \mathbb{N}, q \geq 2 \quad (6.25)$$

Der Fall  $q = 1$  wurde in den vorherigen Kapiteln bereits behandelt.

Wir zeigen einige Eigenschaften der Bernoulli-Polynome.

**Satz 6.7.1** (Die Bernoulli-Polynome  $B_q$ )

Es existiert ein eindeutiges Polynom  $B_q \in \pi_q$  in  $(0, 2\pi)$  mit den Eigenschaften

- i)  $DB_q(x) = B_{q-1}(x)$ ,
- ii)  $\int_0^{2\pi} B_q(x) dx = 0$ ,
- iii)  $B_1(x) = \pi - x$ .

*Beweis.*

Sei  $q = 2$ . Wir setzen  $B_2(x) = P_2(x)$  in  $(0, 2\pi)$ , und stellen fest

$$DB_2(x) = B_1(x) = \pi - x = P_1(x)$$

Für  $q > 2$  erhalten wir mit (6.25) absolut konvergente Reihen und die Eigenschaften i) + ii) sind erfüllt

$$DP_q(x) = P_{q-1}(x) \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} P_q(x) dx = 0$$

Die Funktionen  $P_q$  lassen sich wie folgt in Integralform darstellen

$$P_q(x) = P_q(0) + \int_0^x P_{q-1}(t) dt, \quad 0 < x < 2\pi$$

Auf dem Intervall  $(0, 2\pi)$  ist  $P_q$  ein Polynom vom Grad  $q$ . Sauber aufgeschrieben

$$B_q(x) = P_q(x) \Big|_{(0, 2\pi)} \in \pi_q$$

Damit ist die Existenz gezeigt.

#### EINDEUTIGKEIT

Es sei  $C_q \in \pi_q$  ein weiteres Polynom, welches die drei Eigenschaften in Satz (6.7.1) erfüllt. Wir schreiben  $C_q = B_q + \gamma_q$ , analog wie oben  $P_q$ , als Integral

$$C_q(x) = \int_0^{2\pi} C_{q-1}(t) dt + C_q(0)$$

Außerdem muß  $C_q$  die Bedingung

$$0 = \int_0^{2\pi} C_q(x) dx \tag{6.26}$$

erfüllen. Es gilt  $C_1 = B_1$  und mit der Bedingung (6.26) zeigen wir, dass  $\gamma_q$  verschwindet und damit die Gleichheit  $C_q = B_q$ . Dazu

$$0 = \int_0^{2\pi} C_q(x) dx = \int_0^{2\pi} B_q(x) dx + 2\pi \cdot \gamma_q$$

Da die  $B_q$  der zweiten Eigenschaft genügen und damit

$$\int_0^{2\pi} B_q(x) dx = 0$$

folgt

$$0 = 2\pi \cdot \gamma_q \Rightarrow \gamma_q = 0$$

□

#### Bernoulli-Zahlen

Setzen wir (6.25) für  $x = 0$ , so erhalten wir die harmonische Reihe

$$P_q(0) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{(ik)^q} = \frac{1}{i^q} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^q}$$

Damit lassen sich die sehr bekannten Bernoulli-Zahlen herleiten

$$P_{2r+1}(0) = 0, \quad P_{2r} = (-1)^r \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}}$$

**Bemerkung 6.7.2** Die Funktion  $B_1(x)$  kann Funktional in  $\mathcal{L}$  definiert werden, mit der Vorschrift

$$L_{B_1}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) B_1(x) dx$$

Dazu die Skizze

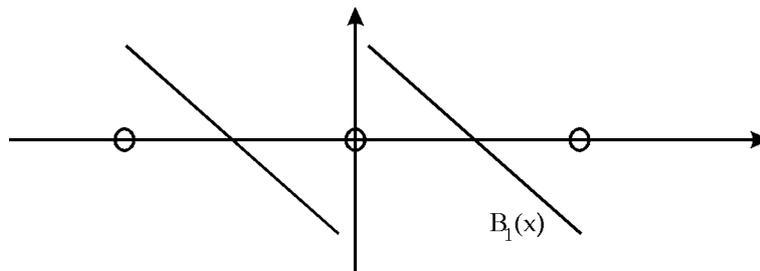


Abbildung 6.9: Skizze von  $B_1(x)$

Die Bernoulli-Polynome sind linear unabhängig und bilden eine Basis im Vektorraum der Polynome.

**Satz 6.7.3** (Basis)

Der Vektorraum  $\pi$  wird durch die Menge  $\langle \{B_q | q \geq 0\} \rangle$  aufgespannt.

*Beweis.*

Wir schreiben  $B_q$  als Linearkombination der Monome  $\{x^q\}$ :

$$B_q(x) = a_q x^q + a_{q-1} x^{q-1} + \dots, \quad a_q \neq 0$$

Wegen  $B_1(x) = \pi - x$  folgt

$$B_1(x) \cdot a_1 = -1$$

$B_2$  schreiben wir in Integralform

$$B_2 = \int_0^x B_1(t) dt + (\dots) = a_2 x^2 + \dots$$

Dann folgt hieraus die Rekursion der Koeffizienten mit

$$a_2 = \frac{a_1}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3}, \dots$$

Betrachte das Tableau

	1	$x$	$x^2$	$\dots$
$B_0$	$a_0$	0	0	0
$B_1$	*	$a_1$	0	0
$B_2$	*	*	$a_2$	0
$\vdots$				$\ddots$

Aufgrund des Dreieckschemas sieht man leicht, dass die  $B_q$  eine Basis bilden. Genauer gilt

$$\langle B_0, B_1, \dots, B_q \rangle = \pi_q$$

□

Die Bernoulli-Polynome finden später Anwendung beim Studium der Spline-Funktionen. Setzt man  $u = x - \pi$ , so gelten die Symmetrien:

$$\begin{aligned} B_1(x) &= b_1(u) = -u \\ B_2(x) &= b_2(u) = -\frac{u^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} \\ B_3(x) &= b_3(u) = -\frac{u^3}{3!} - \frac{\pi^2}{3!}u \end{aligned}$$

Damit lässt sich die allgemeine Aussage über die Symmetrie machen.

**Lemma 6.7.4** (Symmetrie der  $B_{2r}$ )

Die geraden Bernoulli-Polynome sind symmetrisch zur Stelle  $\pi$

$$B_{2r}(x + \pi) = B_{2r}(\pi - x), \quad x \in (0, 2\pi)$$

Anschaulich

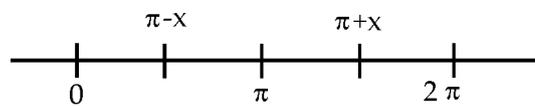


Abbildung 6.10: Symmetrie der geraden  $B_{2r}$

*Beweis.*

Fourier-Darstellung der  $B_{2r}$  in  $[0, 2\pi]$  bringt

$$B_{2r}(y) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{(ik)^{2r}} e^{iky} = (-1)^r \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}} \cos ky, \quad y = \pi + x$$

Anwenden des Additionstheorems zeigt sofort die Behauptung

$$\cos(k(\pi + x)) = \cos(k\pi) \cos(kx) = \cos(k(\pi - x))$$

□

**Lemma 6.7.5** (Antisymmetrie der  $B_{2r+1}$ )

Die ungeraden Bernoulli-Polynome sind im Intervall  $(0, 2\pi)$  antisymmetrisch:

$$B_{2r+1}(x + \pi) = -B_{2r+1}(\pi - x), \quad x \in (0, 2\pi)$$

*Beweis.*

Wir arbeiten wie im vorherigen Beweis mit der Fourier-Darstellung

$$\begin{aligned} B_{2r+1}(y) &= \sum_{k \neq 0} \frac{1}{(ik)^{2r+1}} e^{iky} \\ &= \frac{(-1)^r}{i} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^{2r+1}} e^{iky} \\ &= (-1)^r \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r+1}} \sin ky \end{aligned}$$

Anwenden des Additionstheorems für den Sinus ergibt

$$\begin{aligned} B_{2r+1}(\pi + x) &: \sin(k(\pi + x)) = \cos(k\pi) \cdot \sin(kx) \\ B_{2r+1}(\pi - x) &: \sin(k(\pi - x)) = \cos(k\pi) \cdot \sin(-kx) \end{aligned}$$

Damit gilt  $B_{2r+1}(\pi + x) = -B_{2r+1}(\pi - x)$ .

□

**Lemma 6.7.6** (Nullstellen der  $B_{2r+1}$ )

Die Bernoulli-Polynome haben die drei Nullstellen

$$B_{2r+1}(0) = B_{2r+1}(\pi) = B_{2r+1}(2\pi) = 0$$

und sind ungleich Null in  $(0 < x < \pi)$  und  $(\pi < x < 2\pi)$ .

*Beweis.* (Indirekt)

Zunächst

$$B_{2r+1}(x) = \sum_{k \neq 0} (ik)^{-2r+1} e^{ikx} = (-1)^r \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r+1}} \sin kx, \quad x = 0, \pi, 2\pi$$

$$r = 1: \quad B_3(x) \in \pi_3 \quad \rightarrow \quad \text{Aussage wahr}$$

SATZ VON ROLLE

Betrachten wir  $r = 2$ . Dann ist  $B_5(x) \in \pi_5$ . Wir nehmen an, es gäbe es zu den drei tatsächlichen Nullstellen zwei weitere (ein Polynom fünften Grades hat maximal fünf Nullstellen).

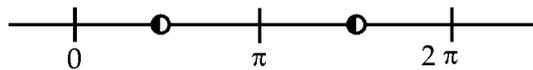
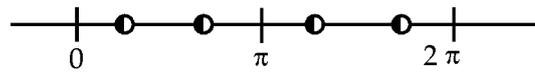
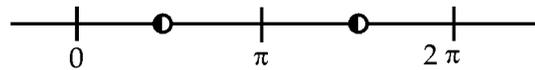


Abbildung 6.11: Annahme, dass zwei zusätzliche Nullstellen existieren

Per Satz (6.7.1) Eigenschaft i) gilt  $DB_5(x) = B_4(x) \in \pi_4$ , mit den vier Nullstellen

Abbildung 6.12: Satz von Rolle liefert vier Nullstellen für  $B_4$ 

Wir bilden die zweite Ableitung  $D^2 B_5(x) = B_3(x)$  und erhalten den Widerspruch.

Abbildung 6.13:  $B_3$  würde fünf Nullstellen besitzen

Denn dann lägen wieder fünf Nullstellen im Intervall  $[0, 2\pi]$  was dem Fundamentalsatz der Algebra widerspricht, dass ein Polynom dritten Grades maximal drei Nullstellen besitzt. Demnach wurde die Aussage des Satzes bewiesen. □

**Lemma 6.7.7** (Nullstellen der  $B_{2r}$ )

Das Polynom  $B_{2r}$  hat zwei Nullstellen im offenen Intervall  $(0, 2\pi)$  und es gilt außerdem

$$B_{2r}(0) \neq 0 \quad \text{und} \quad B_{2r}(\pi) \neq 0$$

*Beweis.*

Wir schreiben  $B_{2r}$  ausführlich in der Fourier-Darstellung.

$$B_{2r}(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{(ik)^{2r}} e^{ikx} = (-1)^r \cdot 2 \sum_{k=1}^r \frac{1}{k^{2r}} \cos kx$$

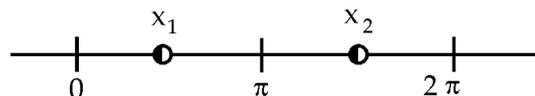
Wir setzen  $x = 0$ :

$$B_{2r}(0) = (-1)^r \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}}$$

bzw.  $x = \pi$ :

$$B_{2r}(\pi) = (-1)^r \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}} (-1)^k$$

Der weitere Beweis verläuft analog zum vorherigen für die ungeraden Bernoulli-Polynome  $B_{2r+1}$ . Wir beweisen indirekt. Zunächst stellen wir fest, dass für  $B_4 \in \pi_4$  alles klar geht. Denn

Abbildung 6.14:  $B_4$  habe die Nullstellen  $x_1$  und  $x_2$

Dann hat die Ableitung  $DB_4(x) = B_3(x)$  die bereits bekannten drei Nullstellen in  $0, \pi$  und  $2\pi$ . Siehe vorheriger Beweis. Dementsprechend besitzt  $B_2$  wieder zwei Nullstellen.

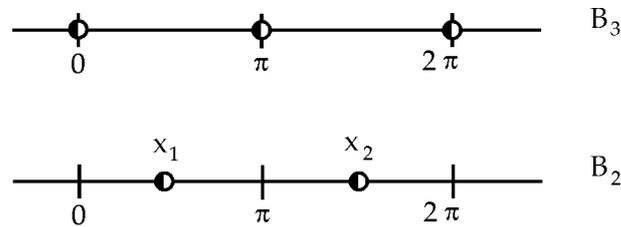


Abbildung 6.15: Nullstellen von  $B_3$  und  $B_2$

Betrachten wir nun aber das Bernoulli-Polynom  $B_5 \in \pi_5$ . Laut Lemma (6.7.6) finden wir die drei Nullstellen in  $0, \pi, 2\pi$ . Dann nehmen wir an, dass  $B_4$  vier Nullstellen besitzt. Dies führt aber zu dem Widerspruch, dass dann  $B_3$  wiederum fünf Nullstellen vorweisen würde. Das kann nicht sein.

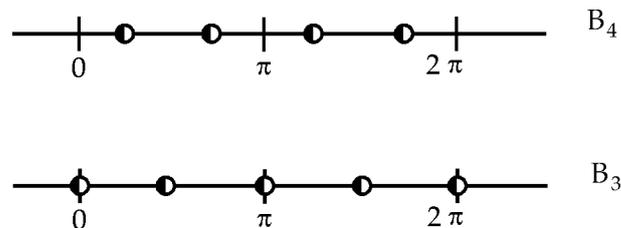


Abbildung 6.16: Nullstellenargumentation von  $B_4$  und  $B_3$

Damit ist der Widerspruch herbeigeführt. Man beachte, dass die komplette Argumentation auf dem Satz von Rolle beruht. □

### Beispiel.

Veranschaulichung von  $B_1(x)$  und  $B_2(x)$ .

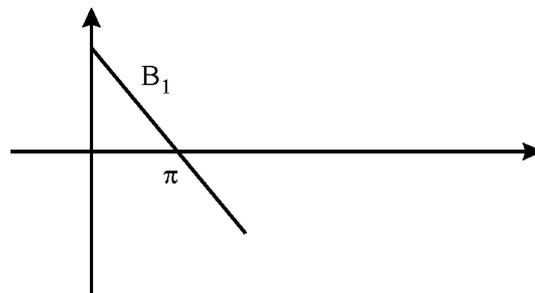
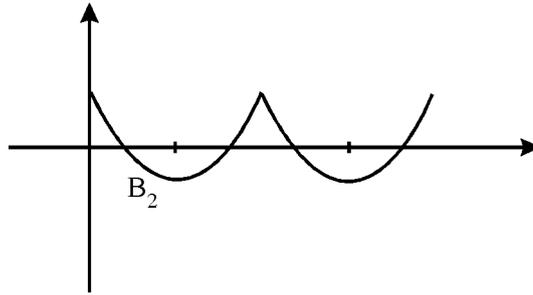


Abbildung 6.17: Stückweise lineares Polynom  $B_1(x)$

Integration liefert den periodisch fortgesetzten Mono-Spline  $B_2$ . Dieser ist ein stückweises quadratisches Polynom.

Abbildung 6.18: Stückweise quadratisches Polynom  $B_2(x)$ **Lemma 6.7.8** (Periodische Taylor-Formel)

Gegeben sei ein Polynom  $P \in \pi_n$ . Dieses lässt sich wie folgt periodisieren und darstellen:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n -(D^k P, e_0) B_k(x), \quad \text{für } 0 < x < 2\pi$$

An dieser Stelle lohnt sich der Vergleich mit der algebraischen Definition der Taylor-Formel am Entwicklungspunkt  $\zeta = 0$ :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{D^k P(0)}{k!} \cdot x^k$$

Wir beweisen das Lemma.

*Beweis.*

Wir schreiben das Skalarprodukt ausführlich,

$$-(D^k P, e_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^k P(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left( D^{k-1} P(0) - D^{k-1} P(2\pi) \right)$$

Wobei der letzte Term an die Schreibweise für dividierte Differenzen erinnert.

Damit erhalten wir die periodische Taylor-Formel mit Restglied

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi} \left( D^{k-1} P(0) - D^{k-1} P(2\pi) \right) \cdot B_k(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x) dx$$

Diese Darstellung ermöglicht eine Fourierreihenentwicklung wegen der  $B_k(x)$ . Somit können wir eine Fourierreihendarstellung für Polynome angeben.

Es sei an dieser Stelle gesagt, dass Polynome grundsätzlich keine periodische Funktion sein können. Bis auf die Ausnahme des konstanten Polynoms aus  $\pi_0$ . Mit Hilfe der Spline-Theorie können aber Polynome periodisch fortgesetzt werden.

Wir führen den Beweis zu Ende. Dazu wird mit der Dual-Basis gearbeitet. Setze  $P(x) = B_r(x) \in \pi_r$  für  $0 \leq r \leq n$ . Wir wissen aus einem vorherigen Satz, dass die Bernoulli-Polynome eine Basis  $\pi_n = \langle B_0(x), \dots, B_n(x) \rangle$  bilden.

Damit ist dies eine Dualbasis bezüglich der Funktionale  $\varphi_s \in \pi_n^* = L(\pi_n, \mathbb{C})$  mit der expliziten Darstellung

$$\varphi_s(P) = -(D^s P, e_0), \quad \text{bzw.} \quad \varphi_s(B_r) = -(D^s B_r, e_0)$$

Fallunterscheidung liefert:

- $s > r$  :  $\varphi_s(B_r) = 0$ ,
- $s < r$  :  $\varphi_s(B_r) = -(D^s B_r, e_0) = -(B_{r-s}, e_0) = 0$ , wobei  $r - s \geq 1$ ,
- $s = r$  :  $\varphi_s(B_r) = -(B_0, e_0) = 1$ , dabei gilt  $B_0 = -e_0 = -1$ .

Wir erhalten schlussendlich  $\varphi_s(B_r) = \delta_{rs}$  und somit das behauptete Ergebnis

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(P(x)) \cdot B_k(x) = \sum_{k=0}^n -(D^k P, e_0) \cdot B_k(x)$$

Damit ist der komplette Beweis geführt. □

Wir geben zur Vertiefung nochmal die Definition der Bernoulli-Funktionen

$$P_r(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{(ik)^r} e^{ikx}$$

und erhalten mit Faltung eine neue Darstellung für eine  $r$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $u$ .

**Lemma 6.7.9** Für eine Funktion  $u \in C_{2\pi}^r$  erhält man die Darstellung

$$u = (u, e_0) + P_r * D^r u, \quad u \in C_{2\pi}^r$$

*Beweis.*

Wir nutzen die Definition der Faltung für periodische Funktionen  $f, g \in C_{2\pi}$ :

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x-y) dy = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f, e_k)(g, e_k) \cdot e^{ikx} \quad (6.27)$$

Für  $g(x-y)$  erhält man folgende Darstellung der Fourierreihe

$$g(x-y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (g, e_k) e^{ik(x-y)}$$

Einsetzen in (6.27) bringt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sum_k (g, e_k) e^{ik(x-y)} dy &= \sum_k (g, e_k) \cdot \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iky} dy \right) \cdot e^{ikx} \\ &= \sum_k (g, e_k)(f, e_k) e^{ikx} \end{aligned}$$

Kurz

$$(f * g, e_k) = (f, e_k)(g, e_k)$$

Die zugehörige Fourier-Partialsumme schreibt sich

$$S_n(f * g)(x) = \sum_{|k| \leq n} (g, e_k)(f, e_k) \cdot e_k$$

mit der Eigenschaft  $(S_n f * g) = (f, S_n g)$ . Falls die Fourierreihe des Faltungsprodukts absolut konvergiert, sprich  $f * g \in A_{2\pi}$ , dann erhalten wir die Konvergenz mit Cauchy-Schwarz

$$\sum_k |(f * g, e_k)| = \sum_k |(f, e_k)| \cdot |(g, e_k)| \leq \left( \sum_k |(f, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_k |(g, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Wir bekommen

$$(P_r * D^r u, e_k) = (P_r, e_k) \cdot (D^r u, e_k) = \frac{1}{(ik)^r} \cdot (ik)^r \cdot (u, e_k) = (u, e_k)$$

Dieses Ergebnis gilt insbesondere auch für  $k = 0$  und erhalten die Behauptung. □

Setzen wir  $r = 1$ , so gilt  $P_1 \in W_{2\pi}^0$  mit der expliziten Darstellung

$$P_1(x) = \pi - x, \quad \text{für } 0 < x < 2\pi$$

mit den Fourierkoeffizienten  $(P_1, e_k) = \frac{1}{ik}$ .

### Konstruktion von $H_{2\pi}^r$

Die Bernoulli-Funktionen bilden die Grundlage für periodische Sobolev-Räume vom Typ  $H_{2\pi}^r, r \in \mathbb{N}$ . In diesem Kontext entsprechen diese dann den reproduzierenden Kernen. Dazu wird die definierende Folge  $(d_k)$  modifiziert:

$$d_0 = 1, d_k = \frac{1}{k^{2r}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Desweiteren erfüllt  $(d_k)$  die vier oben genannten Eigenschaften. Satz (6.6.2) liefert für  $H_{2\pi}^r$ :

$$\sum_{k \neq 0} |(u, e_k)|^2 \cdot k^{2r} < \infty$$

Der erste Satz stellt die Verbindung zwischen den Bernoulli-Funktionen und den reproduzierenden Kernen her:

**Satz 6.7.10**  $H_{2\pi}^r, r \in \mathbb{N}$ , ist ein RKHS mit reproduzierendem Kern

$$R(y, x) = R_r(y, x) = 1 + (-1)^r \cdot P_{2r}(y - x)$$

*Beweis.*

VORAUSSETZUNGEN.

Bevor wir den Beweis angehen, stellen wir einige, uns schon bekannte, Tools zusammen. Bekannt sind

$$u(x) = (u, R(\cdot - x))_d \quad \text{und} \quad (u, u)_d = \sum_k \frac{|(u, e_k)|^2}{d_k}$$

Zur Erklärung des zweiten Terms: Die Fourierkoeffizienten müssen genügend schnell abfallen, damit die Reihe noch konvergiert. Desweiteren kennen wir die Darstellung mit orthonormierten Basisvektoren  $f_k = \sqrt{d_k} e_k$ , definieren

$$R(y, x) = \sum_k f_k(y) \overline{f_k(x)}$$

und das innere Produkt

$$(f_k, f_l)_d = \sum_j \frac{(f_k, e_j) \overline{(f_l, e_j)}}{d_j} = \sum_j \frac{\sqrt{d_k}(e_k, e_j) \cdot \sqrt{d_l}(e_l, e_j)}{d_j} = \delta_{kl}$$

Wir kommen nun zum Beweis und zeigen, dass die Aussage gilt.

BEWEIS.

Es ist

$$R(y, x) = \sum_k \sqrt{d_k} e^{iky} \sqrt{d_k} e^{-ikx} = \sum_k d_k e^{ik(y-x)} = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^{2r}} e^{ik(y-x)} + 1$$

Außerdem

$$P_{2r}(y-x) = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{(ik)^{2r}} e^{ik(y-x)} = (-1)^r \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^{2r}} e^{ik(y-x)}$$

Somit erhalten wir insgesamt

$$R(y, x) = 1 + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^{2r}} e^{ik(y-x)} = 1 + (-1)^r \cdot P_{2r}(y-x)$$

Was zu zeigen war. □

Das nächste Lemma stellt eine Verbindung zu den schwachen Ableitungen her:

**Lemma 6.7.11** *Der Raum  $H_{2\pi}^r, r \in \mathbb{N}$ , ist der lineare Unterraum von Funktionen  $u \in C_{2\pi}^{r-1}$  mit der Eigenschaft, dass  $D^{r-1}u$  eine schwache Ableitung  $D^r u \in \mathcal{L}$  besitzt.*

*Beweis.*

Bekannt ist die Relation

$$ik(u, e_k) = (Du, e_k)$$

Die Behauptung wird bestätigt, durch  $D^k u \in H_{2\pi}^{r-k}, 0 \leq k < r$ , und

$$D^r u = D(D^{r-1}u) \in \mathcal{L} =: H_{2\pi}^0$$

□

**Beispiel.**

Die periodischen Funktionen  $P_{2r}$  können den Räumen  $H_{2\pi}^r$  zugeordnet werden:

$$P_2 \in H_{2\pi}^1, \dots, P_{2r} \in H_{2\pi}^r$$

**Lemma 6.7.12** *(Inneres Produkt auf  $H_{2\pi}^r$ )*

*Zu zwei Funktionen  $u, v \in H_{2\pi}^r, r \in \mathbb{N}$ , definiert man das innere Produkt*

$$(u, v)_r = (u, e_0) \overline{(v, e_0)} + (D^r u, D^r v)$$

mit

$$(D^r u, D^r v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^r u(y) \overline{D^r v(y)} dy.$$

*Beweis.*

Folgt aus Satz (6.6.2) und Lemma (6.7.11). □

### Beispiel.

Wir erweitern die Aussage von Lemma (6.7.9) von  $C_{2\pi}^r$  auf  $H_{2\pi}^r, r \in \mathbb{N}$ .

$$v(y) = R_r(y - x) = (-1)^r \cdot P_{2r}(y - x) + 1$$

und berechnen  $u(x)$ . Wobei für den Differenzialoperator gilt  $D = \frac{d}{dy}$ . Also

$$\begin{aligned} u(x) &= (u, e_0) + (D^r u, D^r (-1)^r P_{2r}(\cdot - x)) \\ &= (u, e_0) + (D^r u, D^r P_{2r}(x - \cdot)) \\ &= (u, e_0) + (D^r u, P_r(x - \cdot)) \\ &= (u, e_0) + (P_r(x - \cdot), D^r u) \end{aligned}$$

Wenn wir den Platzhalter  $\cdot$  mit  $y$  belegen, folgt

$$D_y^r P_{2r}(y - x) = (-1)^r D_y^r P_{2r}(x - y)$$

Es soll nun die Periodisierung eines Polynoms bzw. einer stetigen Funktion angegeben werden. Mit den bisherigen Ergebnissen kann eine explizite Formel hergeleitet werden.

### Satz 6.7.13 (Euler-Maclaurin Theorem)

Die Funktion  $u \in C^r[0, 2\pi]$  kann wir folgt periodisiert werden:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(y) dy + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{2\pi} \left[ D^k u(0) - D^k u(2\pi) \right] \cdot B_{k+1}(x) + E(x) \quad (6.28)$$

wobei das Restglied  $E(x)$  gegeben ist durch

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(x - y) \cdot D^r u(y) dy$$

Der gesamte Ausdruck firmiert auch unter dem Namen *Periodische Taylorformel mit Restglied*.

*Beweis.*

Wir entwickeln ein Polynom in eine Fourierreihe. Der erste Term in (6.28) der das Integral enthält, leistet keinen interessanten Beitrag beim Beweis, und muß daher nicht berücksichtigt werden. Wir setzen

$$v(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{2\pi} \left[ D^k u(0) - D^k u(2\pi) \right] \cdot B_{k+1}(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq 2\pi \quad (6.29)$$

Für das erste Bernoulli-Polynom  $B_1(x)$  gilt gerade die Differenz

$$B_1(0) - B_1(2\pi) = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad P_1(0+) - P_1(0-) = 2\pi$$

Der Leser möge sich das an der Skizze von  $B_1$  klarmachen!

Außerdem wurde bereits

$$D^j B_{k+1}(0) - D^j B_{k+1}(2\pi) = 0 \quad \text{für } j \neq k$$

gezeigt und somit folgt

$$D^k v(0) - D^k v(2\pi) = 0, \quad 0 \leq k \leq r-1$$

Sei nun  $v \in H_{2\pi}^r$  mit

$$D^r v = D^r u - (D^r u, e_0) \quad (6.30)$$

Stelle (6.29) nach  $u(x)$  um:

$$\begin{aligned} u(x) &= v(x) + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{2\pi} \left[ D^k u(0) - D^k u(2\pi) \right] \cdot B_{k+1}(x) \\ &= (v, e_0) + (P_r(x - \cdot), D^r v) + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{2\pi} \left[ D^k u(0) - D^k u(2\pi) \right] \cdot B_{k+1}(x) \\ &= (u, e_0) + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{2\pi} \left[ D^k u(0) - D^k u(2\pi) \right] \cdot B_{k+1}(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(x-y) D^r u(y) dy \end{aligned}$$

Wobei in der letzten Gleichheit das letzte Integral mit (6.30) hergeleitet wird. Damit ist der Beweis geliefert. □

**Bemerkung 6.7.14** (Zum Euler-Maclaurin Theorem)

- i) Die Euler-Maclaurin Formel gilt auch für stückweise stetige Funktionen.
- ii) Der mittlere Term der  $k$ -ten Ableitungen korrigiert die Sprünge bei der Periodisierung, damit die Funktion glatt fortgesetzt werden kann.

Analogon der herkömmlichen Taylor-Entwicklung, der Funktion  $u$  im Punkt  $x_0 = 0$ :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{D^k u(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-y)^{r-1}}{(r-1)!} D^r u(y) dy$$

Falls das Restglied im Intervall  $[0, 2\pi]$  ausgerechnet wird, spricht man von den Green'schen Funktionen:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{D^k u(0)}{k!} x^k + \int_0^{2\pi} \frac{(x-y)^{r-1}}{(r-1)!} D^r u(y) dy$$

Aus der Euler-Maclaurin Formel lassen sich numerische Quadraturformeln wie Trapezregel und Mittelpunkregel sofort erschließen.

**Korollar 6.7.15** (Trapezregel)

Aus (6.28) sieht man

$$\frac{u(0) + u(2\pi)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(y) dy + \sum_{s=1}^{\frac{r}{2}} \frac{1}{2\pi} \left[ D^{2s-1}u(0) - D^{2s-1}u(2\pi) \right] \cdot B_{2s}(0) + E(x)$$

mit Restglied

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(2\pi - y) D^r u(y) dy$$

Sowie

**Korollar 6.7.16** (Mittelpunktregel)

Aus (6.28) sieht man

$$u(\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(y) dy + \sum_{s=1}^{\frac{r}{2}} \frac{1}{2\pi} \left[ D^{2s-1}u(0) - D^{2s-1}u(2\pi) \right] \cdot B_{2s}(\pi) + E(x)$$

mit Restglied

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\pi - y) D^r u(y) dy$$

In beiden Korollaren gilt noch die Beziehung

$$B_{2s}(\pi) = B_{2s}(0) \cdot \left( -1 + \frac{1}{2^{2s-1}} \right)$$

## 6.8 Euler-Polynome

Die Euler-Polynome werden über die Bernoulli-Funktionen definiert und haben sehr ähnliche Eigenschaften. Lediglich die Eigenschaften werden in diesem Abschnitt näher beleuchtet.

Sei die Definition der Euler-Polynome gegeben durch

$$E_{q-1}(x) := \frac{1}{2} [B_q(x) - B_q(x + \pi)]$$

wobei die  $B_q(x)$  die Bernoulli-Polynome sind. Diese erfüllen folgende Eigenschaften:

- i)  $B_q(x) \in \pi_q$  und  $B_q(x) \in C_{2\pi}^{q-2}$  mit  $B_0(x) = -1$ ,  $B_1(x) = \pi - x$ , ... ,
- ii)  $DB_q(x) = B_{q-1}(x)$ ,
- iii)  $B_q(x) = \sum_{k \neq 0} (ik)^{-q} e^{ikx}$

Zu zeigen ist nun, dass

- i)  $E_{q-1}(x) \in \pi_{q-1}$  für  $0 < x < \pi$ ,
- ii)  $DE_q(x) = E_{q-1}(x)$ , wobei  $E_0(x) = \frac{\pi}{2}$ ,
- iii)  $E_q(x) \in C_{2\pi}^{q-1}$ .

*Beweis.*

Es ist

$$\begin{aligned}
E_{q-1}(x) &= \frac{1}{2} [B_q(x) - B_q(x + \pi)] = \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^q a_k x^k - \sum_{k=0}^q a_k (x + \pi)^k \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^q a_k x^k - \sum_{k=0}^q a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j \pi^{k-j} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ a_q x^q + a_{q-1} x^{q-1} + \dots + a_0 - \left( a_q x^q + a_q q x^{q-1} \pi + \dots + a_q \pi^q \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( a_{q-1} x^{q-1} + a_{q-1} (q-1) x^{q-2} \pi + \dots + a_{q-1} \pi^{q-1} \right) - \dots - a_0 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ x^{q-1} \left( - \underbrace{a_q}_{\neq 0} q \pi \right) + x^{q-2} \left( -a_q \binom{q}{q-2} \pi^2 - a_{q-1} (q-1) \pi \right) + \dots \right. \\
&\quad \left. + (-a_1 \pi - a_2 \pi^2 - \dots - a_q \pi^q) \right] \in \pi_{q-1} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Desweiteren gilt mit den Eigenschaften der Bernoulli-Polynome

$$\begin{aligned}
DE_q(x) &= D \left( \frac{1}{2} [B_{q+1}(x) - B_{q+1}(x + \pi)] \right) \\
&= \frac{1}{2} [DB_{q+1}(x) - DB_{q+1}(x + \pi)] \\
&= \frac{1}{2} [B_q(x) - B_q(x + \pi)] = E_{q-1} \quad \checkmark \\
E_0(x) &= \frac{1}{2} [B_1(x) - B_1(x + \pi)] \\
&= \frac{1}{2} [\pi - x - (\pi - x - \pi)] = \frac{\pi}{2} \quad \checkmark \\
E_q(x + 2\pi) &= \frac{1}{2} [B_{q+1}(x + 2\pi) - B_{q+1}(x + \pi + 2\pi)] \\
&= \frac{1}{2} [B_{q+1}(x) - B_{q+1}(x + \pi)] \\
&= E_q(x) \\
E_q(x) &= \frac{1}{2} [B_{q+1}(x) - B_{q+1}(x + \pi)] \in C_{2\pi}^{q-1}, \quad \text{da } B_{q+1}(x) \in C_{2\pi}^{q-1}
\end{aligned}$$

# 7 Quantitative Abschätzungen

In allen bisherigen Überlegungen zu Konvergenzaussagen ging es ausschließlich um die reine Existenz. In welchen Fällen liegt überhaupt Konvergenz vor. Das fasst man unter den *qualitativen* Aussagen zusammen.

In den *quantitativen* Betrachtungen wollen wir nun die Geschwindigkeit der Konvergenz näher beleuchten. Das wird unsere Aufgabe in diesem Kapitel sein.

## 7.1 Das Landau-Symbol $o$

Die Landau-Symbole  $O$  und  $o$  beschreiben einerseits den Rechenaufwand bei implementierten Algorithmen. Auf der anderen Seite werden in der Mathematik dadurch Funktionen charakterisiert, die „von derselben Ordnung“ sind. Das heißt, man vergleicht zwei Funktionen, und untersucht diese in der Nähe der kritischen Stelle.

In unserem Zusammenhang benötigen wir nur  $o$ .

**Definition 7.1.1** *Es seien zwei Funktionen  $f, g$  in der Umgebung des Punktes  $x_0$  definiert. Dann steht*

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{im Limes } x \rightarrow x_0$$

für  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

Zur Illustration zeigen wir

**Beispiele.**

- i)  $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \rightarrow 0),$
- ii)  $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (|x| \rightarrow \infty),$
- iii)  $e^{-x} = o(x^{-26}) \quad (x \rightarrow \infty).$

## 7.2 Quantitative Fourier-Approximation in $H_d$

Bevor wir zu den ersten Sätzen kommen, stellen wir grundlegende Werkzeuge bereit. Das sind bereits bekannte Funktionen und Räume, die in den vorherigen Kapiteln hergeleitet worden sind.

Es sei nochmals der Raum  $H_d$  erläutert,

$$H_d = \left\{ u \in C_{2\pi} : \sum_k \frac{|(u, e_k)|^2}{d_k} < \infty \right\}$$

mit der charakterisierenden Folge  $(d_k)$ .

Wir definieren den beschränkten Operator  $A_d : H_d \rightarrow \mathcal{L} = L_b(C_{2\pi}, \mathbb{C})$  mit

$$v := A_d u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{d_k}} (u, e_k) e_k, \quad u \in H_d$$

Wir listen weitere Eigenschaften auf. Zunächst ist

$$(v, e_k) = \frac{1}{\sqrt{d_k}} (u, e_k)$$

und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |(v, e_k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{d_k})^2} |(u, e_k)|^2 < \infty$$

Zweitens gilt die Isometrie

$$\|A_d(u)\| = \|u\|_d$$

Kommen wir zur ersten Aussage:

**Satz 7.2.1** (Quantitative Fehlerabschätzung in der  $L^2$ -Norm für  $H_d$ )

Sei  $u \in H_d$ , so gilt

$$\|u - S_n(u)\|_2 \leq \sqrt{d_n} \|A_d(u) - S_n(A_d(u))\|_2$$

mit der Konvergenzordnung

$$\|u - S_n(u)\|_2 = o\left(d_n^{\frac{1}{2}}\right)$$

*Beweis.*

Die Bessel-Gleichung liefert

$$\|u - S_n(u)\|_2^2 = \sum_{|k|>n} |(u, e_k)|^2$$

Weiterhin nutzen wir die Eigenschaft des Raumes  $H_d$  aus,

$$u \in H_d \Leftrightarrow \sum_k \frac{1}{d_k} |(u, e_k)|^2 < \infty$$

Damit kann nun, unter Ausnutzung der Monotonie der Folge  $(d_k)$ , wie folgt geschlossen werden:

$$\begin{aligned} \|u - S_n(u)\|_2^2 &= \sum_{|k|>n} d_k \frac{|(u, e_k)|^2}{d_k} \\ &\leq d_n \cdot \sum_{|k|>n} \frac{|(u, e_k)|^2}{d_k} \\ &= d_n \cdot \|A_d(u) - S_n(A_d(u))\|_2^2 \end{aligned}$$

□

Eine analoge Abschätzung für den Raum  $H_{2\pi}^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , zeigt:

**Satz 7.2.2** (Quantitativer Fehler in der  $L^2$ -Norm für  $H_{2\pi}^r$ )

Sei nun  $u \in H_{2\pi}^r$ . Es folgt

$$\|u - S_n(u)\|_2 = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

In Worte gekleidet heißt das, je mehr Glätte, desto besser die Konvergenz.

*Beweis.*

Wie bereits angedeutet, muss lediglich die Folge  $(d_k)$  modifiziert werden. Also

$$d_0 = 1, d_k = \frac{1}{k^{2r}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{d_n} = \frac{1}{n^r}$$

Damit sieht man mit vorherigem Beweis leicht

$$\|u - S_n(u)\|_2 = o(\sqrt{d_n}) = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

□

Der nächste Satz erweitert die beiden bisherigen Aussagen auf den Fall der gleichmäßigen Konvergenz in der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm.

**Satz 7.2.3** Sei  $u \in H_{2\pi}^r$ , dann

$$\|u - S_n(u)\|_\infty \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{r-\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{2r-1}\right]^{\frac{1}{2}} \|D^r u - S_n(D^r u)\|_2$$

und

$$\|u - S_n(u)\|_2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^r \|D^r u - S_n(D^r u)\|_2$$

Konvergenz in der Supremumsnorm ist besser als  $L^2$ -Konvergenz.

*Beweis.*

Einfaches Rechnen zeigt

$$\begin{aligned}
 |u(x) - S_n(u)(x)| &= \left| \sum_{|k|>n} (u, e_k) e_k \right| \\
 &\leq \sum_{|k|>n} |(u, e_k)| \cdot \frac{1}{|k|^r} \cdot |k|^r \\
 &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left( 2 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{|k|>n} |(u, e_k)|^2 \cdot |k|^{2r} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{2} \cdot \left( \sum_{k>n} \frac{1}{k^{2r}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|A_d u - S_n(A_d u)\|_2
 \end{aligned}$$

Wir untersuchen den ersten Term genauer. Zur Abschätzung von

$$\left( 2 \cdot \sum_{k>n} \frac{1}{k^{2r}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

wird das Integralkriterium herangezogen. Zum Einstieg sei die graphische Wirkung skizziert:

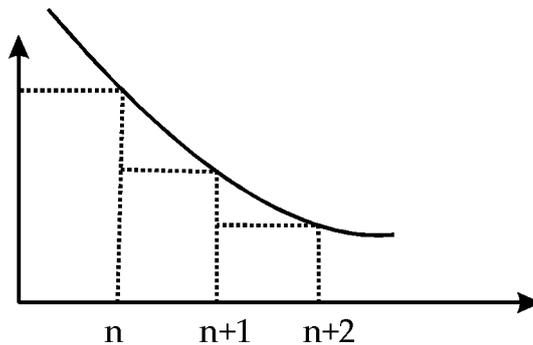


Abbildung 7.1: Integralkriterium

Wir setzen  $f(x) = \frac{1}{x^{2r}}$ . Dann kann so geschlossen werden:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)[(k+1) - k] &= \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \\
 &\leq \int_n^{\infty} f(x) dx = \int_n^{\infty} x^{-2r} dx \\
 &= \frac{1}{-2r+1} x^{-2r} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{2r-1} \frac{1}{n^{2r-1}}
 \end{aligned}$$

□

## ALTERNATIV

Ein andere Option mit funktionalanalytischen Methoden können wir an dieser Stelle einfügen. Einfließen wird der Satz von Riesz. Sei

$$\begin{aligned} u(x) - S_n(u)(x) &= (u, g(\cdot - x))_d - (S_n(u), g(\cdot - x))_d \\ &= (u, g(\cdot - x))_d - (u, S_n(g(\cdot - x)))_d \\ &= (u, \tau_x(g))_d - (u, S_n(\tau_x(g)))_d \\ &= (u, \tau_x(g) - S_n(\tau_x(g)))_d \end{aligned}$$

Die Norm der Funktionale geben den gesuchten Fehler an. Betragliche Abschätzung liefert

$$\begin{aligned} |u(x) - S_n(u)(x)| &\leq \|u\|_d \cdot \|\tau_x(g) - S_n(\tau_x(g))\|_d \\ &= \|u\|_d \cdot \|\tau_x(g - S_n(g))\|_d \\ &= \|u\|_d \cdot \|g - S_n(g)\|_d \end{aligned}$$

Die beiden letzten Gleichheiten dürfen vorgenommen werden, da

- i)  $S_n \tau_x = \tau_x S_n$ ,
- ii)  $\|\tau_x(v)\|_d = \|v\|_d$

Wir erhalten schließlich mit  $g(x) = \sum_k d_k e_k(x)$  die Gleichheit

$$\|g - S_n g\|_d^2 = \sum_{|k|>n} \frac{|(g, e_k)|^2}{d_k} = \sum_{|k|>n} d_k$$

Womit der alternative Beweis hiermit abgeschlossen ist. Zur Abwechslung wollen wir ein Beispiel rechnen.

**Beispiel.**

Die vorangegangenen Fehler-Approximationen sollen auf die Bernoulli-Funktionen übertragen werden. Dazu die Definition

$$P_q = \sum_{k \neq 0} (ik)^{-q} e_k$$

Wir untersuchen als Erstes für welche  $q$  die Funktion  $P_q$  in  $H_{2\pi}^r$  liegt. Wähle dazu die Folge  $(d_k)$  mit  $d_k = k^{-2r}$ . Die Bedingung an die Fourierkoeffizienten im Allgemeinen lautet

$$\sum_k \frac{|(u, e_k)|^2}{d_k} < \infty, \quad u \in H_{2\pi}^r$$

Für die Bernoulli-Funktionen folgert man damit

$$\sum_k \frac{|(P_q, e_k)|^2}{d_k} = \sum_k \frac{k^{2r}}{|k|^{2q}} = k^{2(r-q)} < \infty \quad \text{für } q \geq r + 1$$

Damit gilt mit  $D^r P_{r+1} = P_1$ :

$$P_{r+1} \in H_{2\pi}^r \subset C_{2\pi}^{r-1}$$

Anwendung des vorherigen Satzes (7.2.3) zeigt

$$\|P_{r+1} - S_n(P_{r+1})\|_\infty = \sum_{|k|>n} \frac{1}{n^{r+1}} = o(n^{-r})$$

Diese Abschätzung ist scharf und gilt von oben und von unten.

Wir geben nun eine Fehlerabschätzung für Funktionen der Wiener Algebra  $A_{2\pi}$ . Zum besseren Vergleich notieren wir  $A_d : H_d \rightarrow \mathcal{L}$  mit

$$H_d = \{u \in C_{2\pi} : A_d u \in \mathcal{L}\}$$

und führen den Unterraum  $\mathbb{A}_d \subset H_d$  ein,

$$\mathbb{A}_d = \{u \in C_{2\pi} : A_d u \in A_{2\pi}\}$$

mit den Funktionen

$$A_d u = \sum_k \frac{(u, e_k)}{\sqrt{d_k}} e_k$$

deren Fourierreihe absolut konvergiert.

**Satz 7.2.4** (Fehler in Supremumsnorm für  $A_{2\pi}$ )

Falls  $u \in \mathbb{A}_d$ , so gilt die Abschätzung

$$\|u - S_n u\|_\infty \leq \sqrt{d_n} \|A_d u - S_n(A_d u)\|_a$$

*Beweis.*

Wir rechnen

$$\begin{aligned} \|u - S_n u\|_\infty &\leq \sum_{|k|>n} |(u, e_k)| \\ &= \sum_{|k|>n} \sqrt{d_k} \frac{|(u, e_k)|}{\sqrt{d_k}} \\ &= \sum_{|k|>n} \sqrt{d_k} |(A_d u, e_k)| \\ &\leq \sqrt{d_n} \sum_{|k|>n} \sqrt{d_k} |(A_d u, e_k)| \\ &= \sqrt{d_n} \|A_d u - S_n(A_d u)\|_a \end{aligned}$$

□

Wir fordern höhere Differenzierbarkeit und erhalten

**Korollar 7.2.5** Sei  $u \in \mathbb{A}_{2\pi}^r$  mit  $d_k = k^{-2r}$ , wobei  $r$  den Grad der Glattheit angibt. Dann gilt

$$\|u - S_n u\|_\infty \leq \frac{1}{n^r} \|A_d u - S_n(A_d u)\|_a = o\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

Im nächsten Schritt beschäftigen wir uns mit Fehlerabschätzungen für holomorphe Funktionen. Wir setzen

$$d_k = e^{-2b|k|}, \quad b > 0$$

und bezeichnen zur besseren Unterscheidung den zugehörigen Raum mit  $H_d =: H_{2\pi}^b$ :

$$H_{2\pi}^b = \left\{ u \in C_{2\pi} : \sum_k |(u, e_k)|^2 \cdot e^{2b|k|} < \infty \right\}$$

**Satz 7.2.6** Für eine Funktion  $u \in H_{2\pi}^b$  hat man die Darstellung

$$u(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u, e_k) e^{ikz} \quad \text{mit } z \in \mathbb{C}$$

Dann ist  $u$  analytisch im Streifen  $-b < \text{Im}(z) < b$ .

*Beweis.*

Wir wählen  $0 < c < b$  und benutzen die Darstellung komplexer Zahlen  $z = x + iy$  mit der Bedingung  $|y| \leq c$ . So folgt

$$\left| e^{ikz} \right| = e^{-ky} \leq e^{|k|c}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Diese Umformung impliziert

$$\begin{aligned} \left| \sum_k (u, e_k) e^{ikz} \right| &\leq \sum_k |(u, e_k)| e^{|k|c} \cdot e^{k|b-|k|b} \\ &= \sum_k |(u, e_k)| e^{|k|b} e^{-|k|(b-c)} \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left( \sum_k |(u, e_k)|^2 e^{|k|2b} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_k e^{-2(b-c)|k|} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Somit ist die Gleichmäßigkeit in  $|\text{Im}(z)| \leq c$  für alle  $c \in (0, b)$  gegeben. Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (u, e_k) e^{ikz},$$

bestehend aus analytischen Funktionen, auf jeder abgeschlossenen und beschränkten offenen Menge des Streifens  $|\text{Im}(z)| < b$ . Daher ist die Reihe selbst analytisch. □

**Satz 7.2.7** ( $H_{2\pi}^b$  ist RKHS)

Der Raum  $H_{2\pi}^b$  ist ein RKHS mit reproduzierendem Kern

$$g(x) = \frac{\sinh(2b)}{\cosh(2b) - \cos(x)}$$

Der Kern  $g(x)$  besitzt Pole bei  $x = 2ib$ . Diese Tatsache drückt sich in der Fehlerabschätzung aus.

**Satz 7.2.8** (Quantitativer Fehler in  $H_{2\pi}^b$ )  
Für  $u \in H_{2\pi}^b$  gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u - S_n u\|_2 \leq e^{-nb} \|A_d u - S_n(A_d u)\|_2 = o(e^{-nb}) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Vergleiche dieses Resultat mit der Abschätzung für reelle Funktionen

$$\|u - S_n u\|_2 = o(n^{-r}) \quad \text{für } u \in H_{2\pi}^r$$

*Beweis.*

Mit Satz (7.2.1) und  $\sqrt{d_n} = \sqrt{e^{-n2b}} = e^{-nb}$  erhalten wir die Aussage sofort.

□

Im letzten Resultat dieses Kapitels geben wir die Fehlerabschätzung in der Supremumsnorm an.

**Satz 7.2.9** Sei  $u \in \mathbb{A}_{2\pi}^b$ . Dann

$$\|u - S_n u\|_\infty \leq e^{-nb} \|A_d u - S_n(A_d u)\|_a$$

*Beweis.*

Anwendung von Satz (7.2.4).

□

# 8 Interpolation in speziellen Räumen

## 8.1 Interpolation mit $\langle g(x - x_0), \dots, g(x - x_N) \rangle$

Im letzten Kapitel werden einige Aspekte der Interpolation in periodischen Räumen näher beleuchtet.

Es seien die Stützstellen

$$0 \leq x_0 < \dots < x_N < 2\pi$$

vorgelegt. Desweiteren sei die schon bekannte Funktion

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$$

mit der definierenden Folge  $(d_k)$  gegeben. Speziell ist

$$g(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k < \infty$$

Sei nun  $u \in H_d$  eine Funktion mit dem reproduzierenden Kern  $u(x) = (u, g(\cdot - x))_d$ . Wir wiederholen die Eigenschaften

i)  $\tau_n \subset H_d \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,

ii)  $(u, u)_d = \sum_k \frac{|(u, e_k)|^2}{d_k} < \infty$

### Lemma 8.1.1 (Basis)

Der Raum  $V_N$  wird aufgespannt durch

$$V_N(g) = \langle g(x - x_0), \dots, g(x - x_N) \rangle \tag{8.1}$$

Die Dimension ist  $\dim V_N(g) = N + 1$ .

*Beweis.*

Wir beweisen mit trigonometrischer Interpolation. Es sei  $N \leq 2m$  und  $T_j$  eine trigonometrische Funktion

$$T_j \in \tau_m = \langle e_{-m}, \dots, e_m \rangle$$

mit der Interpolationsbedingung  $T_j(x_k) = \delta_{jk}$ .

LINEARE UNABHÄNGIGKEIT

$$\sum_{j=0}^N \alpha_j g(x - x_j) \stackrel{!}{=} 0$$

Bei linearer Unabhängigkeit müssen alle  $\alpha_j$  verschwinden. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} 0 &= \left( T_{k,N}, \sum_{j=0}^N \alpha_j g(\cdot - x_j) \right)_d = \sum_{j=0}^N \alpha_j (T_{k,N}, g(\cdot - x_j))_d \\ &= \sum_{j=0}^N \alpha_j T_{k,N}(x_j) \\ &= \alpha_j \delta_{j,k} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $\alpha_k = 0$  für alle  $k = 0, \dots, N$ .

□

Wir kommen nun zur Interpolation einer beliebigen Funktion.

**Satz 8.1.2 (Eindeutige Interpolation)**

Es existiert genau ein  $Q_N(u) \in V_N(g)$  mit der Interpolationseigenschaft

$$Q_N(u)(x_j) = u(x_j), \quad j = 0, \dots, N$$

dabei ist  $Q_N(u)$  gegeben durch

$$Q_N(u) = \sum_{j=0}^N \alpha_j g(\cdot - x_j)$$

*Beweis.*

Für führen die Betrachtung auf ein lineares Gleichungssystem zurück und zeigen, dass dieses eindeutig lösbar ist. Bzw. die Gram-Matrix ist semi-positiv-definit, also regulär.

Wir schreiben die reproduzierenden Kerne in die Matrix  $A$

$$[g(x_r - x_j)] = A$$

Diese hat die Eigenschaften  $A = A^* = A^T$ . Weiter

$$u(x) = (u, g(\cdot - x))_d$$

und setzen  $u = g(\cdot - x_j)$  und  $x = x_r$ . Dann folgt

$$u(x) = (u, g(\cdot - x))_d = g(\cdot - x_j)|_{x=x_r} = g(x_r - x_j)$$

Nochmal

$$g(x_r - x_j) = (g(\cdot - x_j), g(\cdot - x_r))_d$$

Wie angekündigt werden diese Ausdrücke in eine Matrix  $A$  geschrieben,

$$A = [(g(\cdot - x_j), g(\cdot - x_r))_d]$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit, schaue Lemma (8.1.1), ist  $A$  stets positiv, damit auch  $\det(A) > 0$ . Also ist  $A$  regulär, und die Interpolation ist tatsächlich möglich.

□

**Satz 8.1.3** (Beste Approximation)

Es gilt

$$\|u - Q_N(u)\|_d \leq \left\| u - \sum_{j=0}^N \alpha_j g(\cdot - x_j) \right\|_d \quad (8.2)$$

Dann ist  $Q_N(u)$  die beste Approximation im Raum  $V_N(g)$  und wird durch Interpolation bestimmt, Satz (8.1.2).

Beweis.

Es gilt die Charakterisierung (Satz des Pythagoras)

$$(u - Q_N(u), g(\cdot - x_k))_d = u(x_k) - Q_N(u)(x_k) = 0, \quad k = 0, \dots, N$$

Damit ist  $Q_N(u)$  beste Approximierende und (8.2) ist gültig. □

**Bemerkung 8.1.4** Desweiteren gelten für  $Q_N$  die Eigenschaften der Projektion

i)  $Q_N^2 = Q_N$ ,

ii)  $Q_N^* = Q_N$ .

Wir kommen nun zur Spline-Interpolation.

**Satz 8.1.5** (Minimum-Norm-Interpolation)Es sei  $v$  eine Funktion, die die Interpolationsbedingung

$$v(x_k) = u(x_k), \quad k = 0, \dots, N$$

erfüllt. Desweiteren werde  $u$  selbst durch  $Q_N(u)$  interpoliert mit den IP-Bedingungen

$$Q_N(u)(x_k) = u(x_k), \quad k = 0, \dots, N$$

Dann gilt die Abschätzung

$$\|Q_N(u)\|_d \leq \|v\|_d \quad (8.3)$$

bzw.

$$\|Q_N(u)\|_d = \min\{\|v\|_d : v(x_j) = u(x_j), j = 0, \dots, N\}$$

Beweis.

Da  $Q_N(u)$  beste Approximierende ist, gilt der Pythagoras und wir können schreiben

$$\|u\|_d^2 = \|Q_N(u)\|_d^2 + \|u - Q_N(u)\|_d^2$$

Man sieht leicht

$$\|u\|_d^2 \geq \|Q_N(u)\|_d^2$$

Wir haben nun zu zeigen

$$\|v\|_d^2 \geq \|Q_N(u)\|_d^2$$

Wegen der Gleichheit in den Stützstellen  $u(x_k) = v(x_k)$  folgt, dass  $Q_N(v) = Q_N(u)$  und somit gilt (8.3). Also ist die Minimumeigenschaft erfüllt. Bleibt zu zeigen:

## EINDEUTIGKEIT

Sei  $w = u - v$  gesetzt. Dann ist die Interpolierende  $Q_N(w)$ , wegen  $Q_N(u) = Q_N(v)$  identisch Null.

Der Pythagoras liefert außerdem

$$\|v\|_d^2 = \|Q_N(u)\|_d^2 + \|v - Q_N(u)\|_d^2$$

Allerdings ist  $\|v - Q_N(u)\|_d^2 = 0$  und es folgt

$$\|v\|_d^2 = \|Q_N(u)\|_d^2$$

Damit wegen der Norm-Bedingung  $v - Q_N(u) = 0$ . Was zu zeigen war.

□

## 8.2 Interpolation in $H_d^\pi$

Wir wollen uns nun weiter spezialisieren und betrachten auf der Grundlage des Raums  $H_d$  den Teilraum der anti-periodischen Funktionen

$$H_d^\pi \subset H_d \quad \text{mit } u(x + \pi) = -u(x)$$

Wie üblich untersuchen wir zuerst die Vollständigkeit. Zu zeigen ist lediglich die Abgeschlossenheit von  $H_d^\pi$ . Dieses Argument haben wir schon oft benutzt! Gegeben sei  $u(x) = (u, g(\cdot - x))_d$ . Aufgrund der Stetigkeit des Skalarprodukts und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$|u(x)| \leq \|u\|_d \cdot \sqrt{g(0)} \quad \text{mit } g(y) = \sum_k d_k e^{iky}$$

Damit konvergieren alle Cauchy-Folgen in  $H_d^\pi$  gegen ein Grenzelement aus  $H_d^\pi$ . Also ist  $H_d^\pi$  abgeschlossen, insbesondere vollständig.

Unser Ziel besteht darin, alle vorher gemachten Überlegungen für  $V_N(g)$  auf den Raum  $H_d^\pi$  zu übertragen. Zu diesem Zweck müssen als Erstes die passenden Basisfunktionen konstruiert werden. Definition des Projektors  $Q_\pi$ :

$$Q_\pi(u) = \frac{1}{2}(u(x) - u(x + \pi)) = \left( u, \frac{1}{2}[g(\cdot - x) - g(\cdot - (x + \pi))] \right)_d$$

Man setzt

$$h(\cdot - x) = \frac{1}{2}[g(\cdot - x) - g(\cdot - (x + \pi))]$$

Dann formulieren wir

$$Q_\pi(u) = (u, h(\cdot - x))_d$$

und eine beliebige Funktion  $u \in H_d^\pi$  lässt sich durch den reproduzierenden Kern  $u(x) = (u, h(\cdot - x))_d$  darstellen. Als nächstes weisen wir die Basiseigenschaft nach.

**Lemma 8.2.1** (Basis in  $H_d^\pi$ )

Gegeben seien die Stützstellen  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{q-1} < \pi$ . Dann sind die Kerne  $h(\cdot - x_0), \dots, h(\cdot - x_{q-1})$  linear unabhängig, oder anders ausgedrückt

$$\dim \langle h(\cdot - x_0), \dots, h(\cdot - x_{q-1}) \rangle = q$$

*Beweis.*

Wir arbeiten mit der anti-periodischen trigonometrischen Interpolation. Zu den gegebenen Stützstellen  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{q-1} < \pi$  fügen wir  $q$  weitere hinzu, gemäß

$$\pi \leq x_q < x_{q+1} < \dots < x_{2q-1} < x_{2q} < 2\pi$$

mit

$$x_q = \pi + x_0, x_{q+1} = \pi + x_1, \dots, x_{2q-1} = \pi + x_{q-1}$$

Wir nehmen ein  $T_j \in \langle e_{-q}, \dots, e_q \rangle$  mit den Interpolationsbedingungen

$$T_j(x_k) = \delta_{j,k} \quad \text{für } 0 \leq j < 2q$$

Man definiere nun die trigonometrische Funktion  $S_j \in H_d^\pi$  für  $j = 0, \dots, q-1$  gemäß

$$S_j(y) = T_j(y) - T_j(y + \pi)$$

Die Funktion  $S_j$  entsteht demnach durch Aufstellen der Grundfunktionen und dann Betrachtung des anti-periodischen Anteils. Speziell gilt

- i)  $S \in \tau_q \subset H_d \cap H_d^\pi$  (Verschiebungsinvarianz der Trigonometrischen Polynome),
- ii)  $S_j(y + \pi) = -S_j(y)$  (Antiperiodizität)

Zur weiteren Beweisführung betrachten wir die Knoten  $x_k$ ,  $0 \leq k \leq q-1$ :

$$S_j(x_k) = T_j(x_k) - T_j(\underbrace{x_k + \pi}_{=x_{k+q}}) = \delta_{j,k} - \underbrace{\delta_{j,k+q}}_{=0 \text{ für } j < q} = \delta_{j,k}$$

Die lineare Unabhängigkeit erhalten wir nun auf die übliche Art und Weise:

$$0 = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j h(\cdot - x_j)$$

Weiter für  $0 \leq k < q$ :

$$0 = \left( S_k, \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j h(\cdot - x_j) \right)_d = \sum_{j=0}^{q-1} \bar{\alpha}_j (S_k, h(\cdot - x_j))_d = \sum_{j=0}^{q-1} \bar{\alpha}_j S_k(x_j) = \bar{\alpha}_j \delta_{j,k}$$

Damit sind alle Koeffizienten  $\alpha_k$  ( $k = 0, \dots, q-1$ ) zu Null diskutiert und die lineare Unabhängigkeit bewiesen. □

Für das nächste Resultat benötigen wir den Kern  $h(y) = \frac{1}{2}[g(y) - g(y - \pi)]$  und eine anti-periodische Funktion  $u \in H_d^\pi$  mit der Darstellung  $u(x) = (u, h(\cdot - x))_d$ .

Der Satz zeigt die Existenz einer Interpolierenden für  $\pi$ -antiperiodische Funktionen.

**Satz 8.2.2** (Eindeutige Interpolation)

Die Interpolierende gestattet die Darstellung

$$R_q(u) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j h(\cdot - x_j)$$

mit der Interpolationseigenschaft

$$R_q(u)(x_j) = u(x_j), \quad j = 0, \dots, q-1$$

*Beweis.*

Der Beweis wird analog zu (8.1.2) geführt. Es sei  $u(x) = (u, h(\cdot - x))_d$ , daraus folgend

$$u(x_k) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j h(x_k - x_j), \quad \text{mit } k = 0, \dots, q-1$$

Dann können wir die Gram-Matrix aufstellen durch

$$h(x_k - x_j) = (h(\cdot - x_j), h(\cdot - x_k))_d \quad (j, k = 0, \dots, q-1)$$

Wie im analogen Beweis ist die Gram-Matrix regulär und die Aussagen sind bewiesen. □

**Satz 8.2.3** (Beste Approximation)

Sei  $u \in H_d^\pi$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte beste Approximierende  $R_q(u)$ , mit der Eigenschaft

$$\|u - R_q(u)\|_d \leq \left\| u - \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j h(\cdot - x_j) \right\|_d$$

*Beweis.*

Analog zu (8.1.3)! Konstruktion des Unterraums  $W_g \subseteq H_d^\pi$  mit

$$W = \langle h(\cdot - x_0), \dots, h(\cdot - x_{q-1}) \rangle$$

Wir nutzen die Charakterisierung (Pythagoras)

$$(u - R_q(u), v)_d = 0 \quad \forall v \in W_q$$

für  $v = h(\cdot - x_k)$ .

An dieser Stelle sollte die Analogie zu den Finiten Elementen und der Galerkin-Orthogonalität erwähnt werden: Der Fehler steht senkrecht zu den Elementen.

Einsetzen von  $v = h(\cdot - x_k)$  zeigt weiter

$$(u - R_q(u), h(\cdot - x_k)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u(x_k) - R_q(u)(x_k) = 0$$

Damit ist  $R_q(u)$  die beste Approximierende. □

**Satz 8.2.4** (Minimum-Norm-Interpolation)

Es gilt

$$\|R_q(u)\|_d = \min \{ \|v\|_d : v \in H_d^\pi, v(x_j) = u(x_j), j = 0, \dots, q-1 \}$$

Insbesondere ist die Darstellung eindeutig!

Beweis.

Analog zu (8.1.5). Sei nach Voraussetzung  $u(x_k) = v(x_k)$ . D.h.

$$(u - v, h(\cdot - x_k))_d = 0 \Rightarrow u - v \in W_q^\perp$$

Nutze Charakterisierung (vorheriges Lemma)

$$\|R_q(u)\|_d^2 = \|u\|_d^2 - \|u - R_q(u)\|_d^2$$

und

$$\|R_q(v)\|_d^2 = \|v\|_d^2 - \|v - R_q(v)\|_d^2$$

Wegen den Übereinstimmungen in den Stützstellen  $u(x_k) = v(x_k)$  gilt die Identität der Interpolationspolynome

$$R_q(u) = R_q(v),$$

welche durch die Gramsche Matrix eindeutig bestimmt sind. Nun können wir folgern, dass

$$\|R_q(u)\|_d^2 = \|R_q(v)\|_d^2 = \|v\|_d^2 - \|v - R_q(v)\|_d^2$$

Also

$$\|R_q(u)\|_d^2 \leq \|v\|_d^2$$

Gleichheit gilt für  $v = R_q(u) = R_q(v)$ . □

Wir wollen die bisherigen Ergebnisse nutzen, um auf den folgenden Seiten zunächst einen graphischen Eindruck der Grundfunktionen zu vermitteln und anschließend einen Konvergenzsatz bereit zu stellen.

Wir definieren  $g(y) = 1 - P_2(y)$ . Wobei  $P_2(y)$  das fortgesetzte Bernoulli-Polynom darstellt mit den Eigenschaften

$$\text{i) } DP_2(y) = \pi - x,$$

$$\text{ii) } \int_0^{2\pi} P_2(y) dy = 0$$

Diese werden nun genutzt, um die reproduzierenden Kerne  $h(y)$  näher zu bestimmen. Konkret

$$h(y) = \frac{1}{2}(g(y) - g(y + \pi)) = \frac{1}{2}(P_2(y + \pi) - P_2(y)) \quad \text{für } 0 < x < 2\pi$$

Mit dieser Konstruktion stellt der Kern  $h(y)$  eine stückweise lineare Funktion in den Intervallen  $(0, \pi)$  und  $(\pi, 2\pi)$  dar.Wir erweitern diese Überlegung auf nicht-äquidistante Stützstellen für die Anzahl von  $q$  Kernen

$$h(\cdot - x_0), \dots, h(\cdot - x_{q-1})$$

Diese sind linear in den Intervallen

$$(0, x_0), (x_0, x_1), \dots, (x_{q-1}, \pi)$$

**Beispiel.**

Für  $q = 2$  erhalten wir  $u(\pi) = -u(0)$  und die Darstellung

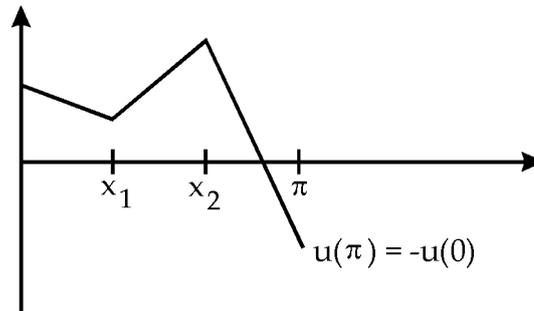


Abbildung 8.1: Grundfunktion für  $q = 2$

Für

$$R_3(u)(x_k) = u(x_k), \quad k = 0, 1, 2$$

zeichnen wir die ersten Grundfunktionen  $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \lambda_2(x)$ .

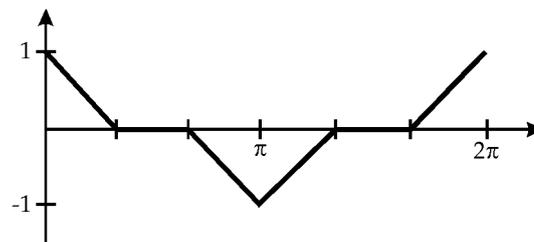
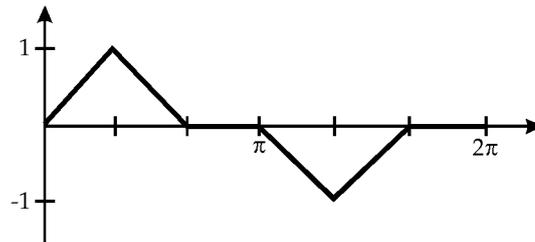
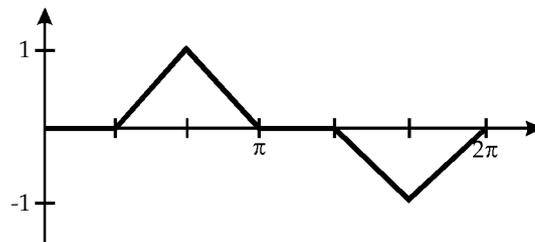


Abbildung 8.2: Grundfunktion  $\lambda_0(x)$

Abbildung 8.3: Grundfunktion  $\lambda_1(x)$ Abbildung 8.4: Grundfunktion  $\lambda_2(x)$ 

Damit das Thema der Grundfunktionen geschlossen werden. Wir wollen an dieser Stelle erwähnen, dass die bisherigen Überlegungen des Kapitels auf weitere spezielle Räume übertragen werden können. Beispielsweise definiere man den Raum

$$H_{\pi}^{-} \quad \text{mit } u(-x) = -u(x) \text{ und } u(2\pi - x) = -u(x)$$

Wie sieht nun  $H_{\pi}^{-}$  aus? Stichwort zur Konstruktion seien die Kerne gemäß der Definition  $u(x) = (u, g(\cdot - x))_d$ . Der Leser möge sich selbst mit diesen Überlegungen weiterbilden.

### 8.3 Konvergenzsatz

Wir besprechen nun den Hauptsatz des Kapitels. Dazu seien die nicht geordneten und paarweise verschiedenen Knoten  $x_k \in [0, 2\pi)$  im halboffenen Intervall gegeben. Dabei seien hinreichend viele Knoten vorgelegt, so dass diese dicht in  $[0, 2\pi]$  liegen:

$$\overline{\{x_k : k \in \mathbb{Z}_+\}} = [0, 2\pi]$$

Wir nutzen die bekannten Darstellungen

$$g_k(x) = g(x - x_k) \in H_d \quad \text{und} \quad u(x) = (u, g(\cdot - x))_d$$

Der Raum  $W = \langle \{g_k : k \geq 0\} \rangle$  liegt dicht in  $H_d$ . Konstruktion einer Funktion  $v \in W$  erfolgt gemäß

$$v = \sum_{r=1}^M \alpha_r g_{k_r}$$

Im folgenden widmen wir uns dem orthogonalen Komplement:

$$W^\perp = \{w' \in H_d : (w', v) = 0 \forall v \in W\}$$

Das orthogonale Komplement  $W^\perp$  ist ein Untervektorraum von  $H_d$  und wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts stets abgeschlossen. Es gilt

$$\overline{W} \oplus \overline{W}^\perp = H_d$$

*Rechnung.*

Es sei  $w' \in W^\perp$  mit  $(w', g_k)_d = 0$ . Damit gilt dann

$$w'(x_k) = 0, \quad k \geq 0$$

Desweiteren liegt  $w'$  in  $C_{2\pi}$ . Die Menge  $\overline{\{x_k : k \geq 0\}}$  liegt dicht in  $[0, 2\pi]$ . D.h.  $w'$  ist identisch Null. Demnach besteht  $W^\perp$  nur aus dem Nullvektor und  $H_d$  lässt sich als direkte Summe schreiben:

$$H_d = \overline{W} \oplus W^\perp, \quad \text{mit } W^\perp = \{0\}$$

□

Wir bemühen nun Satz (8.1.5) der Minimum-Norm-Interpolation für das nächste Resultat,

**Satz 8.3.1** (Konvergenz in der Energie-Norm)

Es gilt die monotone Konvergenz

$$\|u - Q_N(u)\|_d \searrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

Insbesondere liegt dann wegen  $\|u\|_\infty \leq \sqrt{g(0)} \cdot \|u\|_d$  auch gleichmäßige Konvergenz vor:

$$\|u - Q_N(u)\|_\infty \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

*Beweis.*

Es existiert eine Folge  $(w_r)$  aus  $W$  mit  $\|u - w_r\| \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ . Wir nutzen im weiteren Verlauf die Eigenschaft der besten Approximierenden. Zunächst gilt die Cauchy-Eigenschaft,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \|u - w_r\|_d < \varepsilon \quad (r \geq N_\varepsilon)$$

Dabei ist  $w_r$  ein Element aus dem Span  $\langle g_1, \dots, g_{M_r} \rangle$  mit  $M_{r-1} < M_r$ . Wegen bester Approximations-Eigenschaft kann man wie folgt abschätzen

$$\|u - Q_{N_r}(u)\|_d \leq \|u - w_r\| < \varepsilon, \quad r > N_\varepsilon \quad (8.4)$$

Wähle nun eine Teilfolge  $Q_{M_r}(u)$ , so dass

$$\|u - Q_s(u)\|_d \leq \|u - Q_{M_{r_0}}(u)\|_d, \quad s > M_{r_0}, r_0 = N_\varepsilon + 1$$

Wegen (8.4) schließen wir

$$\|u - Q_s(u)\|_d < \varepsilon, \quad s > M_{r_0}$$

Was zu zeigen war. □

## 8.4 Trigonometrische Interpolation in $H_d$

Zur weiteren Vertiefung wiederholen wir:

i) Fourier-Partialsummen

$$S_m u = \sum_{k=-m}^m (u, e_k) e^{ikx} \in \tau_m$$

ii) Approximation durch orthogonale Entwicklung mit Fehler

$$\|u - S_m u\|_2 = o(m^{-r}), \quad u \in H_{2\pi}^r$$

iii) Skalarprodukt

$$(u, e_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx} dx$$

Nun wollen wir einige interessante Fragestellungen der trigonometrischen Interpolation erarbeiten. Dazu seien die äquidistanten Stützstellen

$$x_{j,n} := x_j = \frac{2\pi}{n} j, \quad 0 \leq j \leq n$$

vorgegeben. Desweiteren führen wir für zwei komplexe Funktionen  $u, v \in C_{2\pi}$  das diskrete Skalarprodukt ein:

$$\langle u, v \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u(x_{j,n}) \overline{v(x_{j,n})} \quad (8.5)$$

Für  $v \equiv 1$  erhalten wir die Rechteckregel:

$$\langle u, 1 \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u\left(\frac{2\pi}{n}j\right) \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) dx$$

Dabei kann man mittels Auswertungen der Funktion  $u$  an den Knoten  $\frac{2\pi}{n}j$  den Vorgang als Folge sehen. Sei  $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  mit der Vorschrift

$$u_j = u\left(\frac{2\pi}{n}j\right), \quad u_{j+n} = u_j$$

Die grundlegende Formel der trigonometrischen Interpolation wird durch

$$e_n(x) - 1 = (e_1(x) - 1)(1 + e_1(x) + \dots + e_{n-1}(x))$$

gegeben. Damit können die Grundfunktionen aufgestellt werden. Vergleiche kurz mit

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = 1 + z + \dots + z^{n-1}$$

**Satz 8.4.1** (*Aliasing*)

Sei  $u \in A_{2\pi}$  eine Funktion der Wiener Algebra. Die Aliasing-Formel wird durch folgende Beziehungen erreicht:

i)

$$\langle u, e_r \rangle_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \langle u, e_{r+sn} \rangle$$

ii)

$$\langle u, e_r \rangle_n - \langle u, e_r \rangle = \sum_{|s| \geq 1} \langle u, e_{r+sn} \rangle$$

*Beweis.*

Wir geben als Erstes die Fourierreihe der Funktion  $u$ ,

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle u, e_k \rangle e_k(x)$$

Diese ist absolut und gleichmäßig konvergent. Wir nutzen das diskrete Skalarprodukt (8.5). Setzen anschließend für  $u$  die Fourierreihe ein, und nutzen die gleichmäßige Konvergenz zum Vertauschen der Summen,

$$\begin{aligned} \langle u, e_r \rangle_n &= \frac{1}{n} \sum_{0 \leq j < n} u(x_{j,n}) e_{-r}(x_{j,n}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{0 \leq j < n} \sum_k \langle u, e_k \rangle e_k(x_{j,n}) e_{-r}(x_{j,n}) \\ &= \sum_k \langle u, e_k \rangle \frac{1}{n} \sum_{0 \leq j < n} e_k(x_{j,n}) e_{-r}(x_{j,n}) \end{aligned}$$

Damit können wir den hinteren Teil wieder zum diskreten Skalarprodukt zusammenfassen und die Orthogonalität der Grundfunktionen ausnutzen,

$$\frac{1}{n} \sum_{0 \leq j < n} e_k(x_{j,n}) e_{-r}(x_{j,n}) = \langle e_k, e_r \rangle_n = \delta_{k,r} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq r + sn \\ 1 & \text{für } k = r + sn \end{cases}$$

und bekommen

$$\langle u, e_r \rangle_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (u, e_{r+sn})$$

□

Im nächsten Schritt sei  $g \in A_{2\pi}$  eine reelle Funktion. Der Vektorraum der Translate bezüglich  $g$  und Parameter  $n$  wird aufgespannt durch

$$\begin{aligned} V_n(g) &= \langle g(\cdot - x_{0,n}), \dots, g(\cdot - x_{n-1,n}) \rangle \\ &= \langle \{g(\cdot - x_{j,n}) \mid 0 \leq j < n\} \rangle, \quad x_{j,n} = \frac{2\pi}{n}j \end{aligned}$$

Es ist klar, dass Funktionen der Form

$$b_{j,n}(x) = \langle g(x - \cdot), e_j \rangle_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(x - x_{k,n}) e^{-ijxkn}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

Elemente von  $V_n(g)$  sind.

**Lemma 8.4.2** (Fourierentwicklung der Grundfunktionen  $b_{j,n}$ )  
Man erhält für  $b_{j,n}$  die Darstellung

$$b_{j,n}(x) = e_j(x) \sum_{s=-\infty}^{\infty} (g, e_{j+sn}) e_{sn}(x), \quad j \in \mathbb{Z}$$

mit der absolut summierbaren Reihe  $g(x) = \sum_k d_k e_k(x)$ .

*Beweis.*

Wir definieren

$$u(x) = g(x - t) = \sum_k d_k e^{ikx} e^{-ikt}, \quad \text{mit } d_k = (g, e_k)$$

Daraus sieht man

$$(u, e_k) = (g, e_{-k}) e_{-k}(x)$$

Wir nutzen Satz (8.4.1) mit

$$b_{j,n}(x) = \langle u, e_j \rangle_n = \sum_s (u, e_{j+sn})$$

und schließen wie folgt:

$$\begin{aligned} b_{j,n}(x) &= \langle u, e_{-j} \rangle_n = \sum_s (u, e_{-j+sn}) \\ &= \sum_s (g, e_{j-sn}) e_{j-sn}(x) = \sum_s (g, e_{j+sn}) e_{j+sn}(x) \end{aligned}$$

Womit die Behauptung gezeigt ist.

□

**Satz 8.4.3** (Basis)

Für

$$b_{j,n}(0) \neq 0, \quad (0 \leq j < n) \quad (8.6)$$

formen die Funktionen  $b_{j,n}$  eine Basis des  $V_n(g)$ . Speziell hat dieser Raum dann die Dimension  $n$ .

Beweis.

Wir setzen  $d_{j+sn} = (g, e_{j+sn})$  und benutzen

$$b_{j,n}(x) = e_j(x) \sum_s d_{j+sn} e_{sn}(x)$$

Insbesondere gelten dann

$$b_{j,n}(0) = \sum_s d_{j+sn} \neq 0 \quad \text{n.V.} \quad (8.7)$$

$$b_{j,n}(x_{k,n}) = e_j(x_{k,n}) b_{j,n}(0), \quad x_{k,n} = \frac{2\pi}{n}k \quad (8.8)$$

Die beiden Gleichungen (8.6) und (8.8) implizieren die lineare Unabhängigkeit der Funktionen  $b_{j,n}$ ,  $0 \leq j < n$ , da die Ausdrücke  $e_j(x_{k,n})$  als Einträge der Vandermonde Matrix aufgefasst werden und diese regulär ist. Wir beschreiben diese Argumentation ausführlicher, wenn wir die Exponential-Basis des  $V_n(g)$  einführen:

$$B_{j,n}(x) = \frac{b_{j,n}(x)}{b_{j,n}(0)}$$

Hieraus erhalten wir mit  $x_{k,n} = \frac{2\pi}{n}k$ 

$$B_{j,n}(x_{k,n}) = e_j(x_{k,n}) = e^{ij\frac{2\pi}{n}k}, \quad (0 \leq j, k < n) \quad (8.9)$$

Ansatz zur Überprüfung der linearen Unabhängigkeit

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j B_{j,n}(x_{k,n}) = 0$$

liefert durch bloßes Einsetzen

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ij\frac{2\pi}{n}k} = 0$$

Wie oben angedeutet können die  $e^{ij\frac{2\pi}{n}k}$  als Einträge der Vandermonde-Matrix aufgefasst werden, deren Determinante nicht verschwindet.

□

**Satz 8.4.4** (Interpolation)

Zu einer Funktion  $u \in C_{2\pi}$  existiert eine eindeutig bestimmte Funktion  $Q_n(u) \in V_n(g)$ , die den Interpolationsbedingungen

$$Q_n(u)(x_{k,n}) = u(x_{k,n}), \quad 0 \leq k < n$$

genügt, mit der expliziten Darstellung

$$Q_n(u) = \sum_{j=0}^{n-1} \langle u, e_j \rangle_n B_{j,n}$$

*Beweis.*

Wir bezeichnen den Operator der diskreten Fourier-Transformation mit

$$T_n(u)(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \langle u, e_j \rangle_n e_j(x)$$

Mit (8.9) folgt die Interpolationsbedingung

$$Q_n(u)(x_{k,n}) = T_n(u)(x_{k,n}), \quad 0 \leq k < n$$

DENN:

Bereits bekannt ist

$$T_n(u)(x_{k,n}) = u(x_{k,n}), \quad k = 0, \dots, n-1$$

Zu zeigen bleibt

$$Q_n(u)(x_{k,n}) = \sum_{j=0}^{n-1} \langle u, e_j \rangle_n \underbrace{B_{j,n}(x_{k,n})}_{=e_j(x_{k,n})} = T_n(u)(x_{k,n}) = u(x_{k,n})$$

□

Die Herangehensweise der Bestimmung des Interpolationspolynoms in Satz (8.4.4) erlaubt eine weitere Verallgemeinerung. Diese Methode ist nämlich Translationsinvariant unter Beachtung der Schrittweite  $h_n := h = \frac{2\pi}{n}$ .

Wir schauen uns den Operator  $T_n$  näher an, indem wir sein Bild bestimmen und anschließend eine Interpolationsformel angeben. Das Bild von  $T_n$  ist gegeben durch

$$R(T_n) = \text{rng}(T_n) = \langle e_0, \dots, e_{n-1} \rangle$$

Wir definieren

$$L_0(x) = \frac{1}{n} (1 + e^{ix} + \dots + e^{i(n-1)x}) = \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1}$$

Durch Einsetzen sieht man

$$L_0\left(\frac{2\pi}{n} \cdot 0\right) = 1 \quad \text{und} \quad L_0\left(\frac{2\pi}{n} k\right) = 0 \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

Wegen der passenden Wahl der  $L_0(x_{k,n})$  können wir nachfolgende Interpolation erreichen

$$T_n(u)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u(x_{k,n}) L_0(x - x_{k,n}), \quad x_{k,n} = \frac{2\pi}{n} k$$

Aufgrund der Allgemeinheit der bisherigen Überlegungen haben wir uns eine gute Ausgangsposition geschaffen, speziellere Resultate zu erschließen. Bisher haben wir die Funktion  $g \in A_{2\pi}$  ganz allgemein benutzt. In zwei Beispielen geben wir  $g$  nun explizit an.

**Beispiel 1.**

Im Raum  $H_d$  verwenden wir üblicherweise

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$$

mit der Folge  $(d_k)$  und deren gewohnten Eigenschaften. Dann gilt die Minimum-Norm-Interpolation (8.1.5). Außerdem erhalten wir das Interpolationspolynom durch

$$Q_n(u) = \sum_{r=0}^{n-1} \langle u, e_r \rangle_n B_{r,n}$$

**Beispiel 2.**

Sei der Index  $n = 2m + 1$  gegeben. Wir setzen weiterhin

$$d_r = \begin{cases} 1, & |r| \leq m \\ 0, & |r| > m \end{cases}$$

Dann erhalten wir

$$g(x) = \sum_{k=-m}^m e^{ikx} = 1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos kx$$

Zusätzlich benötigen wir die Formel für die  $b_{j,n}$ , welche der diskreten Poisson'schen Summenformel entspricht,

$$b_{j,n}(x) = e_j(x) \sum_s d_{j+sn} e_{sn}(x), \quad d_{j+sn} = (g, e_{j+sn})$$

Das impliziert die Identitäten

$$b_{j,n}(x) = e_j(x), \quad (0 \leq j \leq m)$$

und  $b_{n-j,n}(x) = e_{-j}(x), \quad (1 \leq j \leq m)$

Wir erhalten bei  $x = 0$

$$b_{j,n}(0) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} d_{j+sn} = 2m + 1 = n, \quad 0 \leq j < n$$

Spiegelung zeigt dann noch

$$b_{n-j,n}(0) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} d_{(n-j)+sn} = \sum_{s=0}^{\infty} d_{-j+sn}, \quad 0 < j < n$$

Wir leiten im folgenden den Operator der klassischen trigonometrischen Interpolation her. Dazu verwenden wir die Aliasing Formel aus Satz (8.4.1) mit

$$\langle u, e_{k+n} \rangle_n = \langle u, e_k \rangle_n$$

Der Operator ist für  $n = 2m + 1$  gegeben durch

$$Q_{2m+1}(u) = \sum_{k=-m}^m \langle u, e_k \rangle_{2m+1} e_k \quad (8.10)$$

und approximiert die Fourier-Partialsommen

$$S_m(u) = \sum_{k=-m}^m (u, e_k) e_k$$

mit der Eigenschaft

$$\|u - S_m u\|_\infty \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty), u \in A_{2\pi}$$

Diese Approximationseigenschaft wird ebenfalls von  $Q_{2m+1}$  erfüllt:

$$\|u - Q_{2m+1} u\|_\infty \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty), u \in A_{2\pi}$$

Der Fehler wird im wesentlichen bestimmt durch

$$\langle u, e_j \rangle_{2m+1} - (u, e_j) = \sum_{s=1}^{\infty} (u, e_{j+s(2m+1)}) + \sum_{s=1}^{\infty} (u, e_{j-s(2m+1)})$$

Es gelten außerdem die Relationen

- i)  $S_m Q_{2m+1} = Q_{2m+1}$ ,  
Rechnung.  
Bekannt sind

$$\begin{aligned} S_m^2 &= S_m, & R(S_m) &= \tau_m \\ Q_{2m+1}^2 &= Q_{2m+1}, & R(Q_{2m+1}) &= \tau_m \end{aligned}$$

Sei  $u \in \tau_m$  ein trigonometrisches Polynom, dann gilt

$$S_m(u) = u \in \tau_m$$

also  $u \in R(S_m)$ . Damit erhalten auch die Beziehung

$$u = Q_{2m+1}(u) \in \tau_m$$

Letztendlich

$$S_m(u) = S_m(Q_{2m+1}(u)) = Q_{2m+1}(u)$$

- ii)  $Q_{2m+1} S_m = S_m$ ,  
Rechnung analog zu oben.

Es folgen einige Stabilitätsaussagen.

**Satz 8.4.5** (Stabilität der Interpolation)

Es sei  $u \in A_{2\pi}$  eine Funktion der Wiener Algebra, die durch  $Q_{2m+1}(u)$  interpoliert wird. Dann gilt

$$\|Q_{2m+1}(u)\|_\infty \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(u, e_k)| = \|u\|_a$$

*Beweis.*

Wir rechnen in einer Zeile

$$|Q_{2m+1}(u)(x)| = \left| \sum_{k=-m}^m \langle u, e_k \rangle_{2m+1} e^{ikx} \right| \leq \sum_{|k| \leq m} |\langle u, e_k \rangle_{2m+1}|$$

und spezifizieren den inneren Teil durch Anwenden der Aliasing-Formel

$$\langle u, e_k \rangle_{2m+1} = \sum_s \langle u, e_{k+s(2m+1)} \rangle$$

so dass,

$$|Q_{2m+1}(u)(x)| \leq \sum_{|k| \leq m} \sum_s |\langle u, e_{k+s(2m+1)} \rangle| = \sum_r |\langle u, e_r \rangle| = \|u\|_a$$

□

Wir schwächen die Voraussetzung an die Funktion  $u$  nun ab.

**Satz 8.4.6** (*Stabilität der Interpolation*)

Sei nun  $u \in C_{2\pi}$ , deren Fourierreihe nicht notwendigerweise absolut konvergieren muss, dann erhält man

$$\|Q_{2m+1}(u)\|_2 \leq \|u\|_\infty$$

*Beweis.*

Konstruktion des trigonometrischen Polynoms

$$T(x) = |Q_{2m+1}(u)(x)|^2 = Q_{2m+1}(u)(x) \overline{Q_{2m+1}(u)(x)} = \sum_{k=-2m}^{2m} a_k e_k(x)$$

unter Ausnutzung der Aliasing-Formel, zeigt

$$\begin{aligned} \|Q_{2m+1}(u)\|_2^2 &= (T, e_0) \\ &= \langle T, e_0 \rangle_{2m+1} \\ &= \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{2m} T(x_{k,2m+1}) \\ &= \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{2m} |Q_{2m+1}(u)(x_{k,2m+1})|^2 \\ &= \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{2m} |u(x_{k,2m+1})|^2 \\ &\leq \|u\|_\infty^2 \end{aligned}$$

wie gehabt mit  $x_{k,2m+1} = \frac{2\pi}{2m+1}k$ .

□

An dieser Stelle erkennen wir einen Zusammenhang mit der Gauß-Quadratur. Zunächst sei die Relation zwischen den diskreten und den kontinuierlichen Fourierkoeffizienten nochmals geschrieben:

$$\langle f, e_r \rangle_n = \sum_s \langle f, e_{r+sn} \rangle$$

Hieraus folgt

$$\langle f, e_0 \rangle_n = \langle f, e_0 \rangle_{2m+1} = \sum_s (f, e_{0+s(2m+1)})$$

und

$$\langle f, e_0 \rangle_n = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=0}^{2m} f(x_{k,2m+1}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

für eine Funktion  $f \in \tau_{2m}$ . Für  $|s| \geq 1$  gilt stets

$$(f, e_{s(2m+1)}) = 0, \quad f \in \tau_{2m}$$

Nach den Bemerkungen und Stabilitätsaussagen der Interpolation, besprechen wir einige Aspekte der Approximation.

**Satz 8.4.7** (Gleichmäßige Approximation mit  $Q_{2m+1}(u)$ )

Falls  $u \in A_{2\pi}$  eine Funktion mit absolut konvergenter Fourierreihe ist, so kann diese mit dem Operator  $Q_{2m+1}(u)$  gleichmäßig approximiert werden, d.h.

$$\|u - Q_{2m+1}(u)\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

*Beweis.*

Aus früheren Überlegungen bekannt:

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_a$$

Das heisst, Konvergenz in der  $\|\cdot\|_a$ -Norm impliziert gleichmäßige Konvergenz. Wir übertragen diese Tatsache auf die Approximation mit Fourier-Partialsummen:

$$\|u - S_m u\|_\infty \leq \|u - S_m u\|_a \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

Damit kann der eigentliche Beweis geführt werden:

$$\begin{aligned} \|u - Q_{2m+1}(u)\|_\infty &= \|u - S_m u + S_m u - Q_{2m+1}(u)\|_\infty \\ &\leq \|u - S_m u\|_\infty + \|Q_{2m+1}(u - S_m u)\|_\infty \\ &\leq \|u - S_m u\|_a \cdot 2 \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Zur Erläuterung sei angemerkt, dass in der ersten Zeile zunächst mit  $S_m u$  künstlich erweitert wurde. Anschließend mit Dreiecksungleichung und der Identität  $S_m u = Q_{2m+1}(S_m u)$  die zweite Zeile begründet wird. Und die dritte Zeile durch Anwenden von Satz (8.4.5) erreicht wird, der dann die Konvergenz sichert.

Kurz: Die Normbeschränktheit liefert die Konvergenz.

□

**Satz 8.4.8** (Approximation im quadratischen Mittel mit  $Q_{2m+1}(u)$ )

Sei  $u \in C_{2\pi}$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion. Dann kann diese in der  $L^2$ -Norm mit  $Q_{2m+1}(u)$  approximiert werden, so dass

$$\|u - Q_{2m+1}(u)\|_2 \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

*Beweis.*

Wir führen zunächst einen weiteren Operator ein

$$K_m(u)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \varphi_m(x-t) dt$$

dabei sei  $\varphi_m \in \tau_m$  gegeben durch

$$\varphi_m(x) = c_m(1 + \cos x)^m, \quad \text{mit } c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_m(t) dt = 1$$

Dann gilt auf jeden Fall der Satz von Weierstraß

$$\|u - K_m u\|_\infty \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

Mit der Beziehung  $Q_{2m+1}(K_m u) = K_m u$  schließen wir

$$\begin{aligned} \|u - Q_{2m+1}u\|_2 &= \|u - K_m u - Q_{2m+1}(u - K_m u)\|_2 \\ &\leq \|u - K_m u\|_2 + \|Q_{2m+1}(u - K_m u)\|_2 \\ &\leq 2\|u - K_m u\|_\infty \\ &\rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Die Argumentation verläuft im Prinzip analog zum Beweis des Satzes (8.4.7). Im letzten Schritt wird Satz (8.4.6) herangezogen. □

Die vorherigen beiden Sätze liefern die qualitativen Resultate, unter welchen Voraussetzungen approximiert werden kann. Wir untersuchen nun die Fragestellung der Konvergenzgeschwindigkeit, sprich die Approximationsgüte. Dazu sei  $u \in H_d$  durch den trigonometrischen Operator im quadratischen Mittel approximiert. Zur Wiederholung stellen wir kurz zusammen, dass  $H_d$  ein linearer Unterraum von  $C_{2\pi}$  ist, mit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|(u, e_k)|^2}{d_k} =: (u, u)_d$$

Die definierende Folge  $(d_k)$  genügt den Eigenschaften

$$d_k > d_{k+1}, \quad d_{-k} = d_k > 0, \quad d_0 = 1, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k < \infty$$

Um das Maß der Approximationsgüte zu bestimmen, definiere man

$$D_m = \sum_{k=1}^{\infty} d_{km} \tag{8.11}$$

Dazu existiere eine Konstante  $\alpha$ , so dass

$$D_m \leq \alpha d_m \tag{8.12}$$

Wir brauchen desweiteren die hergeleiteten Resultate von  $S_m$ :

$$\|u - S_m u\|_2 \leq \sqrt{d_m} \|A_d(u - S_m u)\|_2 = \sqrt{d_m} \|u - S_m u\|_d$$

wobei für den Operator  $A_d : H_d \rightarrow \mathcal{L}$  gilt

$$A_d u = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{\sqrt{d_k}} (u, e_k) e_k$$

Wir formulieren den ersten Satz zur quantitativen Approximation.

**Satz 8.4.9** (Quantitative Fehlerabschätzung in der  $L^2$ -Norm)

Sei die Funktion  $u \in H_d$  gegeben. Dann gilt die Abschätzung

$$\|Q_{2m+1}(u - S_m u)\|_2 \leq \sqrt{\alpha} \sqrt{d_m} \|u - S_m u\|_d$$

*Beweis.*

Wir setzen  $v := u - S_m u$ , so dass

$$\|Q_{2m+1} v\|_2^2 = \sum_{k=-m}^m |\langle v, e_k \rangle_{2m+1}|^2$$

Die Aliasing-Formel in Kombination mit der Dreiecksungleichung liefert zunächst

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-m}^m \left| \sum_{r \neq 0} (v, e_{k+r(2m+1)}) \right|^2 \\ &= \sum_{k=-m}^m \left| \sum_{r \neq 0} \frac{1}{\sqrt{d_{k+r(2m+1)}}} (v, e_{k+r(2m+1)}) \sqrt{d_{k+r(2m+1)}} \right|^2 \\ &\leq \sum_{k=-m}^m \sum_{r \neq 0} \frac{1}{d_{k+r(2m+1)}} |(v, e_{k+r(2m+1)})|^2 \sum_{s \neq 0} d_{k+s(2m+1)} \end{aligned}$$

Weiter folgt mit (8.11) in der letzten Summe

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-m}^m \left| \sum_{r \neq 0} (v, e_{k+r(2m+1)}) \right|^2 \\ &\leq \sum_{k=-m}^m \sum_{r \neq 0} \frac{1}{d_{k+r(2m+1)}} |(v, e_{k+r(2m+1)})|^2 \left( \sum_{s=1}^{\infty} d_{k+s(2m+1)} + \sum_{s=1}^{\infty} d_{k-s(2m+1)} \right) \\ &= \sum_{k=-m}^m \sum_{r \neq 0} \frac{1}{d_{k+r(2m+1)}} |(v, e_{k+r(2m+1)})|^2 \left( \sum_{s=1}^{\infty} d_{k+s(2m+1)} + \sum_{s=1}^{\infty} d_{-k+s(2m+1)} \right) \\ &\leq \sum_{k=-m}^m \sum_{r \neq 0} \frac{1}{d_{k+r(2m+1)}} |(v, e_{k+r(2m+1)})|^2 \left( \sum_{s=1}^{\infty} d_{s \cdot 2m} + \sum_{s=1}^{\infty} d_{-m+s(2m+1)} \right) \\ &\leq \sum_{k=-m}^m \sum_{r \neq 0} \frac{1}{d_{k+r(2m+1)}} |(v, e_{k+r(2m+1)})|^2 \left( \sum_{s=1}^{\infty} d_{s \cdot 2m} + \sum_{s=1}^{\infty} d_{-m+s \cdot 2m} \right) \\ &\leq \sum_{k=-m}^m \sum_{r \neq 0} \frac{1}{d_{k+r(2m+1)}} |(v, e_{k+r(2m+1)})|^2 \sum_{s=1}^{\infty} d_{sm} \\ &= D_m \cdot \|A_d(u - S_m u)\|_2^2 \end{aligned}$$

Also mit (8.12)

$$\sum_{k=-m}^m \left| \sum_{r \neq 0} (v, e_{k+r(2m+1)}) \right|^2 = D_m \cdot \|A_d(u - S_m u)\|_2^2 \leq \alpha d_m \cdot \|A_d(u - S_m u)\|_2^2$$

Was zu zeigen war. □

**Satz 8.4.10** (Fehlerordnung in der  $L^2$ -Norm)

Sei  $u \in H_d$ . Es gilt die Approximationsgüte

$$\|u - Q_{2m+1}u\|_2 \leq (1 + \alpha) \sqrt{d_m} \cdot \|u - S_m u\|_d$$

*Beweis.*

Wir nutzen das Resultat von Satz (8.4.9) und zeigen

$$\begin{aligned} \|u - Q_{2m+1}u\|_2 &\leq \|u - S_m u\|_2 + \|S_m u - Q_{2m+1}u\|_2 \\ &= \|u - S_m u\|_2 + \|Q_{2m+1}(u - S_m u)\|_2 \\ &\leq \sqrt{d_m} \cdot \|u - S_m u\|_d + \alpha \sqrt{d_m} \cdot \|u - S_m u\|_d \end{aligned}$$

□

Wie schon so oft, werden die bisherigen Ergebnisse nun auf einen spezielleren Raum übertragen. Wir erinnern uns gerne an  $H_{2\pi}^r$ . Dieser ist charakterisiert durch die Folge  $(d_k)$  mit

$$d_k = \max\{1, |k|\}^{2r}, \quad (k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N})$$

und erfüllt (8.12):

$$D_m = \sum_{s=1}^{\infty} d_{sm} = m^{-2r} \sum_{s=1}^{\infty} s^{-2r} = (-1)^r \frac{B_{2r}(0)}{2} m^{-2r}$$

Wir haben

$$D_m = \alpha d_m \quad \text{mit } \alpha = (-1)^r \frac{B_{2r}(0)}{2} \quad \text{und } d_m = m^{-2r}$$

Eine Anwendung von Satz (8.4.10) ist

**Korollar 8.4.11** Sei  $u \in H_{2\pi}^r$  ein Element des periodischen Sobolev-Raumes. Dann erhält man die Fehlerabschätzung

$$\|u - Q_{2m+1}u\|_2 \leq \left(1 + (-1)^r \cdot \frac{B_{2r}(0)}{2}\right) \cdot m^{-r} \|D^r u - S_m(D^r u)\|_2$$

Die Aussage kann bei höherer Differenzierbarkeit noch verschärft werden. Vorher aber eine nützliche Abschätzung:

**Lemma 8.4.12** Es sei die schwache Ableitung  $g = D^r u \in \mathcal{L}$  vorgegeben. Diese sei stückweise stetig differenzierbar. So gilt

$$|(g, e_k)| \leq \beta |k|^{-1}, \quad \text{für } |k| \rightarrow \infty$$

*Beweis.*

Die Aussage erhält man durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_a^b g(t)e_{-k}(t) dt &= \frac{i}{2\pi \cdot k} \int_a^b g(t)De_{-k}(t) dt \\ &= \frac{i}{2\pi \cdot k} \left( [g(t)e_{-k}(t)]_a^b - \int_a^b Dg(t)e_{-k}(t) dt \right) \end{aligned}$$

für  $0 \leq a < b \leq 2\pi$ .

□

Somit erhalten wir die angekündigte Verschärfung:

**Satz 8.4.13** Falls  $u \in H_{2\pi}^r$  gegeben und die schwache Ableitung  $g = D^r u \in \mathcal{L}$  stückweise stetig differenzierbar ist, so gilt mit einer Konstanten  $\gamma$ :

$$\|u - Q_{2m+1}u\|_2 \leq \gamma \cdot m^{-r-\frac{1}{2}}$$

*Beweis.*

Wir nutzen Lemma (8.4.12) und rechnen

$$\|D^r u - S_m(D^r u)\|_2^2 = \sum_{|k|>m} |(g, e_k)|^2 \leq \beta \sum_{|k|>m} |k|^{-2} \leq \beta_1 m^{-1}$$

Dann

$$\begin{aligned} \|u - Q_{2m+1}u\|_2 &\leq \left(1 + (-1)^r \frac{B_{2r}(0)}{2}\right) \cdot m^{-r} \|D^r u - S_m(D^r u)\|_2 \\ &\leq \left(1 + (-1)^r \frac{B_{2r}(0)}{2}\right) \cdot m^{-r} (\beta_1 m^{-1})^{\frac{1}{2}} \\ &= \gamma m^{-r-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Womit die Behauptung gezeigt ist.

□

Für Vollständigkeitsuntersuchungen benötigen wir Abschätzungen in der Supremumsnorm. Zum besseren Vergleich wiederholen wir an dieser Stelle das entsprechende Resultat für den Fourier-Partialsummen Operator, siehe Satz (7.2.3).

Sei  $u \in H_{2\pi}^r$  eine Funktion. Dann existiert eine Konstante  $c_r$ , so dass

$$\|u - S_m u\|_\infty \leq \|u - S_m u\|_a \leq c_r m^{-r+\frac{1}{2}} \cdot \|D^r u - S_m(D^r u)\|_2 \quad (8.13)$$

Falls zusätzlich die schwache Ableitung  $g = D^r u \in \mathcal{L}$  stetig differenzierbar ist, dann gilt Lemma (8.4.12). Damit existiert ein konstantes  $b_r$ , so dass

$$\|u - S_m u\|_\infty \leq b_r m^{-r}$$

Der letzte Satz der Vorlesung erläutert eine vergleichbare Aussage für den Operator  $Q_{2m+1}$ :

**Satz 8.4.14** *Konvergenzordnung für gleichmäßige Approximation in  $H_{2\pi}^r$*

Es sei die Funktion  $u \in H_{2\pi}^r$  mit der stetig differenzierbaren schwachen Ableitung  $g = D^r u \in \mathcal{L}$  gegeben. Dann gibt es eine Konstante  $b_r$  mit der quantitativen Fehlerabschätzung

$$\|u - Q_{2m+1}u\|_\infty \leq 2b_r m^{-r}$$

*Beweis.*

Es soll (8.4.7) angewendet werden. Dort wurde gezeigt, dass

$$\|u - Q_{2m+1}u\|_\infty \leq 2 \cdot \|u - S_m u\|_a$$

Mit der Beziehung (8.13) rechnen wir aus:

$$\|u - Q_{2m+1}u\|_\infty \leq 2c_r m^{-r+\frac{1}{2}} \cdot \|D^r u - S_m(D^r u)\|_2$$

Mit Lemma (8.4.12) wird die Behauptung endgültig bestätigt.

□

# 9 Kardinale Approximation in harmonischen Hilberträumen

In diesem Kapitel werden die Konzepte der trigonometrischen Interpolation in periodischen Hilberträumen auf harmonische Hilberträume ausgedehnt. Speziell werden Fehlerabschätzungen in der  $L_2$ -Norm für kardinale Interpolation angegangen.

## 9.1 Trigonometrische Approximation in periodischen Hilberträumen

In diesem Abschnitt werden die bisherigen Resultate zusammen gefasst, die für die neue Theorie des harmonischen Hilbertraums von Interesse sind.

Der periodische Hilbertraum basiert auf der Zahlenfolge

$$d = (d_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z})$$

Diese soll die folgende Eigenschaft besitzen:

$$d_k > d_{k+1}, \quad \text{für } k \geq 0$$

Die Basisfunktionen sind gegeben durch

$$c_k(t) = \exp(ikt), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Somit kann der Raum  $H_d$  definiert werden gemäß

$$H_d = \left\{ f \in L_{2\pi}^2 : \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|(f, e_k)|^2}{d_k} < \infty \right\}$$

Das zugehörige Skalarprodukt wird dann wie folgt konstruiert:

$$(f, g)_d = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(f, e_k)(e_k, g)}{d_k}$$

wobei

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$

Die endliche Fouriertransformation von  $f$  ist ebenfalls bekannt und schreibt sich

$$(f, e_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-ikt) dt$$

Aufbauend auf diesen einleitenden Bemerkungen werden drei allgemeine Raumtypen definiert. Diese stellen die Grundlage für alle weiteren Überlegungen. Zunächst bezeichne  $C_{2\pi}$  die Banach-Algebra aller stetigen komplexwertigen periodischen Funktionen, ausgestattet mit der Maximumsnorm

$$\|f\|_{\infty} = \max\{|f(t)| : 0 \leq t < 2\pi\}$$

Der zweite Raum, die Wiener Algebra  $A_{2\pi}$ , enthält alle Funktionen aus  $C_{2\pi}$ , deren Fourier-Reihe absolut konvergiert. Bezüglich der Norm

$$\|f\|_a = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(f, e_k)|$$

wird  $A_{2\pi}$  zu einer Banach-Algebra. Es gelten

$$A_{2\pi} \subset C_{2\pi}, \quad \|f\|_{\infty} \leq \|f\|_a$$

Die nächsten Beziehungen sind von grundlegender Bedeutung:

$$H_d \subset A_{2\pi} \subset C_{2\pi}, \quad \|f\|_{\infty} \leq \|f\|_a \leq \|f\|_d \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \right)^{1/2} \quad (9.1)$$

Dabei kann für  $H_d$  eine erzeugende Funktion angegeben werden

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_k(t) \in H_d$$

Ebenso gilt  $\psi(\cdot - a) \in H_d, a \in \mathbb{R}$  mit

$$\psi(x - a) = \sum_k (d_k e^{-ika}) e^{ikx}$$

Jeder periodische Hilbertraum unterliegt der Translationsinvarianz

$$(f, g)_d = (f(\cdot - a), g(\cdot - a))_d, \quad a \in \mathbb{R}$$

Mit Hilfe der erzeugenden Funktion kann jede Funktion  $f$  wie folgt definiert werden

$$f(x) = (f, \psi(\cdot - a))_d$$

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung liefert

$$|f(x)| \leq \|f\|_d \cdot \|\psi(\cdot - a)\|_d$$

mit  $\|\psi(\cdot - a)\|_d = \|\psi\|_d = \sqrt{\sum_k d_k}$ . Dieses Ergebnis kennen wir bereits aus (9.1).

Zuletzt erinnern wir an den Fourier-Partialsummen Operator und dessen Eigenschaften. Dieser ist durch

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n (f, e_k) e_k \quad (9.2)$$

gegeben und genügt

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\|_a &\leq \|f\|_a \quad (\text{Beschränktheit}) \\ S_n S_n &= S_n \quad (\text{Projektor}) \\ S_n^* &= S_n \quad (\text{Selbst-Adjungiertheit}) \end{aligned}$$

Die Norm bestimmt sich mit

$$\|S_n(f)\|_d^2 = \sum_{k=-n}^n \frac{|(f, e_k)|^2}{d_k} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|(f, e_k)|^2}{d_k} = \|f\|_d^2$$

Dann gilt auch

$$\|f - S_n(f)\|_{\infty} \leq \|f - S_n f\|_a = \sum_{|k|>n} |(f, e_k)|$$

Eine allgemeinere Definition von (9.2) ist

$$S_{\varphi}(f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x)(f, e_k) e_k(x)$$

wobei  $\varphi(x)$  eine Gewichtsfunktion charakterisiert. Für  $\varphi(x) = \chi_{[-n,n]}$  erhalten wir (9.2). Dabei ist  $0 \leq \varphi(t) \leq 1$  für alle  $t$ .

Wir formulieren die ersten Resultate.

**Satz 9.1.1** (Qualitativer Konvergenzsatz)

Sei  $f \in A_{2\pi}$  gegeben. Dann gilt

$$\|f - S_n f\|_{\infty} \leq \|f - S_n f\|_a \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Ohne Beweis.

**Satz 9.1.2** (Quantitative Abschätzung)

Sei  $f \in H_d$ . Dann erhält man

$$\|f - S_n f\|_{\infty} \leq \|f - S_n f\|_a \leq \left[ 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k \right]^{1/2}$$

D.h. auch

$$\|f - S_n f\|_d \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Ohne Beweis.

**Trigonometrische Interpolation**

Es seien  $N = 2n + 1$  paarweise verschiedene Knoten vorgelegt

$$t_j := t_{j,2n+1} = j \frac{2\pi}{2n+1}, \quad j = 0, \dots, 2n$$

Mit Hilfe dieser Stützstellen definieren wir das diskrete innere Produkt

$$\langle f, g \rangle_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(t_j) \cdot g(t_j),$$

die diskrete Fourier-Transformation

$$\langle f, g \rangle_{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(t_j) \exp(-ikt_j)$$

und geben die diskrete Poisson'sche Summenformel an

$$\langle f, g \rangle_{2n+1} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (f, e_{k+r(2n+1)}), f \in A_{2\pi}$$

Der Fehler zwischen diskreten- und kontinuierlichen Fourierkoeffizienten bestimmt sich mit

$$\langle f, e_k \rangle_{2n+1} - (f, e_k) = \sum_{r \neq 0} (f, e_{k+r(2n+1)})$$

Wir kommen nun zur Approximation des Fourier-Partialsummen Operators  $S_n(f)$ . Diese Approximation wird  $T_n(f)$  genannt, und es gilt

$$T_n(f) = \sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle_{2n+1} e_k$$

$T_n$  ist ein trigonometrischer Interpolations-Projektor hinsichtlich der Stützstellen

$$T_n \left( j \frac{2\pi}{2n+1} \right) = f \left( j \frac{2\pi}{2n+1} \right), \quad 0 \leq j \leq 2\pi$$

und den Eigenschaften

- i)  $\|T_n f\|_{\infty} \leq \|T_n f\|_a$
- ii)  $S_n T_n f = T_n f$
- iii)  $T_n S_n f \neq S_n f$
- iv)  $S_n T_n \neq T_n S_n$  i.Allg.

**Satz 9.1.3 (Erste Fehlerabschätzung)**

Es gilt

$$\|S_n f - T_n f\|_{\infty} \leq \|S_n f - T_n f\|_a \leq \|f - S_n f\|_a$$

*Beweis.*

Die erste Ungleichung ist klar! Die zweite zeigen wir nun. Es gilt

$$\|S_n f - T_n\|_a = \sum_{|k| \leq n} |(f, e_k) - \langle f, e_k \rangle_{2n+1}|$$

Mit der Aliasing-Formel

$$\langle f, e_k \rangle_{2n+1} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} (f, e_{k+r(2n+1)})$$

folgt

$$\begin{aligned} \|S_n f - T_n f\|_a &= \sum_{|k| \leq n} |(f, e_k) - \langle f, e_k \rangle_{2n+1}| \\ &= \sum_{|k| \leq n} \left| \sum_{r \neq 0} (f, e_{k+r(2n+1)}) \right| \\ &\leq \sum_{|k| \leq n} \sum_{r \neq 0} |(f, e_{k+r(2n+1)})| \\ &= \sum_{|s| > n} |(f, e_s)| \\ &= \|f - S_n f\|_a \end{aligned}$$

□

**Korollar 9.1.4** Für  $f \in A_{2\pi}$  erhält man aus dem vorherigen Satz sofort

$$\|f - T_n f\|_a \leq \|f - S_n f\|_a + \|S_n f - T_n f\|_a \leq 2 \cdot \|f - S_n f\|_a \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Damit erhält man eine quantitative Aussage für  $f \in H_d$ .

**Korollar 9.1.5** Sei  $f$  aus  $H_d$ . Dann erhält man die quantitative Fehlerabschätzung

$$\|f - T_n f\|_{\infty} \leq \|f - S_n f\|_a \leq 2 \left[ 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k \right]^{1/2} \cdot \|f - S_n f\|_d$$

*Beweis.*

Anwendung der Sätze (9.1.2), (9.1.3) und des vorigen Korollars.

□

Für die spezielle Folge  $(d_k)$  mit den Gliedern  $d_k = k^{-2r}$  und dem Startwert  $d_0 = 1$  erkennen wir

$$\begin{aligned} \|f - S_n f\|_{\infty} &= o\left(n^{-r+\frac{1}{2}}\right), \quad r > \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow \infty \\ \|f - T_n f\|_{\infty} &= o\left(n^{-r+\frac{1}{2}}\right), \quad r > \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

*Rechung.*

Wir skizzieren die Herleitung des Konvergenzfaktors  $n^{-r+\frac{1}{2}}$ :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r}} \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{t^{2r}} dt = \left[ \frac{1}{-2r+1} t^{-2r+1} \right]_n^{\infty} = \frac{n^{-2r+1}}{2r-1}$$

□

**Satz 9.1.6** Es sei  $f \in H_d$  gegeben. Für die Approximation mit  $S_n$  gilt die Fehlerabschätzung

$$\|f - S_n f\|_2 \leq \sqrt{d_n} \|f - S_n f\|_d$$

*Beweis.*

Es gilt

$$\|f - S_n f\|_2^2 = \sum_{|k|>n} \frac{|(f, e_k)|^2}{d_k} d_k$$

Nach Voraussetzung ist die definierende Folge  $(d_k)$  eine monoton fallende Folge mit  $d_k > d_{k+1} > 0$ . Somit ist

$$\|f - S_n f\|_2^2 \leq d_n \sum_{|k|>n} \frac{|(f, e_k)|^2}{d_k} = d_n \|f - S_n f\|_d^2$$

Was zu zeigen war. □

Für die Abschätzung der Approximations-Operatoren  $T_n$  und  $S_n$  erhalten wir

**Satz 9.1.7** Sei  $f \in H_d$  eine Funktion. Dann gilt

$$\|T_n f - S_n f\|_2 \leq \sqrt{2 \sum_{s=1}^{\infty} d_s} \|f - S_n f\|_d$$

*Beweis.*

Wir haben

$$\begin{aligned} \|T_n f - S_n f\|_2^2 &= \sum_{|k| \leq n} |\langle f, e_k \rangle_{2n+1} - (f, e_k)|^2 \\ &= \sum_{|k| \leq n} \left| \sum_{r \neq 0} (f, e_{k+r(2n+1)}) \right|^2 \cdot \frac{\sqrt{d_{k+r(2n+1)}}}{\sqrt{d_{k+r(2n+1)}}} \\ &\leq \sum_{|k| \leq n} \left( \sum_{r \neq 0} d_{k+r(2n+1)} \right) \left( \sum_{s \neq 0} \frac{|(f, e_{k+s(2n+1)})|^2}{d_{k+s(2n+1)}} \right) \end{aligned}$$

Genauere Untersuchung des zweiten Terms liefert

$$\sum_{r \neq 0} d_{k+r(2n+1)} < 2 \sum_{r=1}^{\infty} d_{(2r-1)n} < 2 \sum_{r=1}^{\infty} d_{rn}$$

Einsetzen ergibt die Behauptung. □

Die beiden vorangegangenen Sätzen ermöglichen eine Fehlerabschätzung zwischen Originalfunktion  $f$  und dem Approximations-Operator  $T_n$ .

**Satz 9.1.8** Sei  $f$  aus  $H_d$ , dann

$$\|f - T_n f\|_2 \leq 2 \sqrt{2 \sum_{s=1}^{\infty} d_{sn}} \|f - S_n f\|_d$$

*Beweis.*

Wir rechnen

$$\|f - T_n f\|_d \leq \|f - S_n f\|_d + \|S_n f - T_n f\|_d \leq 2 \sqrt{2 \sum_{s=1}^{\infty} d_{sn}} \|f - S_n f\|_d$$

□

Für die Folge  $(d_k)$  mit  $d_k = \frac{1}{k^{2q}}$  gilt

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(sn)^{2q}} = \frac{1}{n^{2q}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{2q}} < \frac{1}{n^{2q}} \frac{2q}{2q-1}$$

Was mit Hilfe des Cauchy-Integralkriteriums zu zeigen ist. Dann erhalten wir

**Satz 9.1.9** Sei nun  $f \in H_{2\pi}^q$ . Dann gilt

$$\|f - T_n f\|_2 = o\left(\frac{1}{n^q}\right)$$

Oder die Aussage für komplexwertige Funktionen mit der Folge  $(d_k)$  mit  $d_k = e^{-|k|b}$ :

$$\sum_{s=1}^{\infty} e^{-snb} = \frac{1}{1 - e^{-nb}} - 1 = \frac{e^{-nb}}{1 - e^{-nb}} < 2e^{-nb}$$

**Satz 9.1.10** Sei  $f \in H_{2\pi}^b$ . Dann

$$\|f - T_n f\|_2 = o\left(e^{-nb/2}\right)$$

## 9.2 Harmonische Hilberträume

Eine Erweiterung aller Resultate auf höhere Theorie führt auf die sog. harmonischen Hilberträume  $H_D(\mathbb{R})$ . Wichtiges Tool wird das Fourier Integral sein.

Es sei  $D \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$  positive und gerade Dichtefunktion von einer Distributionenfunktion. Die Funktion wird, analog zur definierenden Folge  $(d_k)$  bisher, die harmonischen Hilberträume charakterisieren. Daher legen wir für  $D$  die folgenden Eigenschaften fest:

- i)  $1 > D(-t) = D(t) \geq 0, \quad D(0) = 1$
- ii)  $D(t) > D(t+h) > 0, \quad h, t > 0$

Bevor der Raum  $H_D$  definiert werden kann, müssen noch einige Voraussetzungen geschaffen werden. Es sei  $F \in M(\mathbb{R})$  eine messbare Funktion, mit der wir

$$\frac{F}{\sqrt{D}} \in L_2(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad F \in L_1(\mathbb{R})$$

erhalten. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert die Norm

$$\|F\|_1 \leq \sqrt{\|D\|_1} \left\| \frac{F}{\sqrt{D}} \right\|_2$$

**Beispiele.**

1) Sei  $F = D$ . Dann erhalten wir

$$\frac{F}{\sqrt{D}} = \sqrt{D} \in L_2(\mathbb{R})$$

2) Für die  $D$  können beispielsweise die Funktionen

$$\frac{1}{1+t^2} = D(t) \quad \text{oder} \quad D(t) = e^{-h(t)}$$

gewählt werden.

Wir definieren nun das Fourier-Integral

$$\hat{F}(x) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{ixt} dt$$

Dies können wir leicht mit der Fourier-Reihe vergleichen, die wir nochmal schreiben:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f, e_k) e^{ixk} \underbrace{\Delta k}_{=1}$$

Das Fourier-Integral  $f$  ist eine Funktion aus  $C_0(\mathbb{R})$ . Wir erhalten die Beschränktheit

$$|f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| dt$$

Die Stetigkeit folgt aus

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) [e^{ix(t+h)} - e^{ixt}] dt \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{ixt} (e^{ith} - 1) dt \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)| \underbrace{|e^{ith} - 1|}_{\rightarrow 0 (h \rightarrow 0)} dt \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Hinter dem letzten Schritt steckt der Konvergenzsatz von Lebesgue. Insgesamt haben somit die Stetigkeit gezeigt.

Es gilt

$$F \in L_1(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f(x) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |x| \rightarrow \infty$$

Rechnung.

$$f(t) = \int_a^b e^{ixt} dt = \left[ \frac{e^{ixt}}{ix} \right]_a^b = \frac{e^{ibx}}{ix} - \frac{e^{iax}}{ix} \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

Wegen  $|e^{i\zeta x}| = 1, \zeta = a, b$  streben die Terme jeweils gegen Null für  $|x| \rightarrow \infty$ .

In  $L_1(\mathbb{R})$  liegen die Treppenfunktionen dicht. Definiere dazu

$$f_h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(nh + \frac{h}{2}\right) \chi_{[nh, nh+h]}(x)$$

Die Dichtheit folgt dann aus der Betrachtung

$$\int |f(x) - f_h(x)| dx \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

Rechnung.

Es sei nach Voraussetzung  $|f(x)| = 0$  für  $|x| \geq R$ . Wir definieren die Funktion  $f_h$  gemäß

$$f_h(x) = \sum_{|nh| \leq R+1} f\left(nh + \frac{h}{2}\right) \chi_{[nh, (n+1)h]}(x)$$

Wir zeigen die Dichtheit für festes  $R$  mit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_h(x)| dx &= \int_{-(R+1)}^{R+1} |f(x) - f_h(x)| dx \\ &= \sum_{n=-S}^S \int_{nh}^{nh+h} |f(x) - f_h(x)| dx \\ &= \sum_{n=-S}^S \int_{nh}^{nh+h} |f(x) - f(nh + h/2)| dx \\ &\rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei noch ein kleiner nützlicher Trick erwähnt:

$$\int_{nh}^{nh+h} 1 \cdot |f(x) - f(nh + h/2)| dx \leq h^{\frac{1}{2}} \left( \int_{nh}^{nh+h} |f(x) - f(nh + h/2)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Es werden nun zwei Beispiele für  $F$  gegeben.

**Beispiel.**

i) Sei  $F(t) = \chi_{[-b, b]}(t)$ . Wir berechnen das Fourier-Integral

$$f(x) = \int_{-b}^b e^{ixt} dt = 2 \frac{\sin bx}{x \cdot b} \cdot b = 2b \left[ \frac{\sin(2bx/2)}{2bx/2} \right]$$

Vergleiche mit  $\frac{\sin z}{z}$ .

ii) Gegeben sei  $F(t) = e^{-a|t|}$ . Dann ist das Fourier Integral wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{ixt} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(xt) dt \\ &= \frac{2a}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Der Schritt zum zweiten Integral wird mit der Laplace-Transformation geführt. Hier können wir Verbindungen zur DGL feststellen. Dazu bilden wir von  $f$  die ersten beiden Ableitungen,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \int_0^\infty e^{-at} \sin xt \, dt \cdot (x) \\ f''(x) &= 2 \int_0^\infty e^{-at} \cos xt \, dt \cdot (-xx) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$f''(x) + x^2 f(x) = 0$$

Wir besprechen nun weitere Analogien der Hilbertraumkonzepte. Analog zur Wiener Algebra  $A_{2\pi}$  führen wir den Linearraum  $A(\mathbb{R})$  ein, der absolut integrierbare Fourier Integrale beinhaltet. Wann ist eine Funktion absolut integrierbar? Falls für  $F \in L_1(\mathbb{R})$  gilt

$$\int |F(t)| \, dt < \infty$$

Als nächstes wird  $A(\mathbb{R})$  mit einer Metrik ausgestattet:

$$\|f\|_a = \int |F(t)| \, dt$$

Woraus wieder die Inklusionen

$$A(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R}), \quad \|f\|_\infty \leq \|f\|_a$$

folgen. Diese Vorarbeiten erlauben uns nun eine präzise Formulierung des periodischen Hilbertraums  $H_D$ . Dieser ist ein Unterraum von  $A(\mathbb{R})$ , so dass  $\frac{F}{\sqrt{D}} \in L_2(\mathbb{R})$  und

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \exp(itx) \, dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(t)|^2}{D(t)} \, dt < \infty$$

Da  $H_D$  ein Hilbertraum sein soll, müssen wir die Existenz eines Skalarprodukts nachweisen. Vorschlag sei

$$(f, g)_D = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t) \overline{G(t)}}{D(t)} \, dt$$

Damit zeigen wir explizit die Vollständigkeit von  $H_d$ . Vorgabe sei die Cauchy-Folge  $(f_n)$ . Dann

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_D &= \int \frac{|F_n(t) - F_m(t)|^2}{D(t)} \, dt \\ &= \int \left| \frac{F_n}{\sqrt{D}} - \frac{F_m}{\sqrt{D}} \right|^2 \, dt \end{aligned}$$

Wir definieren die Folgen  $(u_n)$  und  $(u_m)$  aus  $L_2(\mathbb{R})$  mit  $u_n = \frac{F_n}{\sqrt{D}}$  und  $u_m = \frac{F_m}{\sqrt{D}}$ . Wir schieben die Zwischenrechnung zum Nachweis des Grenzelements  $u \in L_2(\mathbb{R})$  ein:

Es sei  $u = \frac{u\sqrt{D}}{\sqrt{D}} = \frac{v}{\sqrt{D}}$ . Daraus folgt sofort  $v = u\sqrt{D} \in L_2(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\left\| \frac{F_n}{\sqrt{D}} - u \right\|_2 \rightarrow 0, \quad u \in L_2(\mathbb{R})$$

Nun können wir weiter folgern das

$$\|f_n - f_m\|_D = \int \left| \frac{F_n}{\sqrt{D}} - \frac{v}{\sqrt{D}} \right|^2 dt \rightarrow 0$$

Wir setzen  $F(t) = v(t)\sqrt{D}$  und erhalten

$$\int \frac{|F(t)|^2}{D(t)} = \int \frac{|v(t)|^2 D(t)}{D(t)} = \int |v(t)|^2 < \infty$$

Woraus die Vollständigkeit folgt. Also ist  $H_D$  ein Hilbertraum.

Desweiteren sind Funktionen aus  $H_D$  translationsinvariant, so dass

$$(f(\cdot - a), g(\cdot - a))_D = (f, g) \quad (9.3)$$

und

$$\|f(\cdot - a)\|_D = \|f\|_D$$

*Rechnung.*

Wir zeigen (9.3). Es seien  $h(x) := f(x - a)$  und  $k(x) := g(x - a)$  zwei um  $a$  verschobene Funktionen mit

$$h(x) = f(x - a) = \int [F(t)e^{-iat}] e^{ixt} dt$$

und

$$k(x) = g(x - a) = \int [G(t)e^{iat}] e^{ixt} dt$$

Wir schreiben das Skalarprodukt  $(h, k)_D$  und bekommen

$$(h, k)_D = \int [F(t)e^{-iat}] \overline{[G(t)e^{-iat}]}$$

□

Wir halten die wichtigen Beziehungen

$$H_D \subset A \subset C_0, \quad \|f\|_\infty \leq \|f\|_a \leq \|f\|_D \left( \int D(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

*Rechnung.*

Wir zeigen die letzte Ungleichung  $\|f\|_a \leq C\|f\|_D$ :

$$\begin{aligned} \|f\|_a &= \int \frac{|F(t)|}{\sqrt{D(t)}} \sqrt{D(t)} dt \\ &\leq \left( \int \frac{|F(t)|^2}{D(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int D(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

Das Fourier Integral erlaubt die Konstruktion einer definierenden Funktion  $d$  für  $H_D$ :

$$d(x) = \int D(t)e^{ixt} dt$$

mit  $d(x - a) \in H_D$  und der Norm

$$\|d\|_D^2 = \int \frac{D^2(t)}{D(t)} dt = \int D(t) dt < \infty$$

Daraus folgern wir die Existenz des reproduzierenden Kerns

$$f(x) = (f, d(\cdot - x))_D$$

mit dem Punktfunktional  $f$  und Repräsentanten  $d \cdot -x$ . Einmal gilt nämlich

$$g(y) = d(y - x) = \int D(t) e^{-ixt} e^{iyt} dt$$

Zum anderen rechnen wir

$$(f, d(\cdot - x))_D = \int \frac{F(t) \overline{G(t)}}{D(t)} = \int \frac{F(t) D(t)}{D(t)} e^{ixt} dt = f(x)$$

Diese Rechnung zeigt, dass jeder harmonische Hilbertraum ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern ist.

Da  $L_2(\mathbb{R})$  im Allg. kein Unterraum von  $L_1(\mathbb{R})$  ist, wird des folgende Lemma von Bedeutung.

**Lemma 9.2.1** *Es sei  $f \in H_D$ . Dann ist  $f \in L_2(\mathbb{R})$  und es gilt die Abschätzung*

$$\|f\|_2 = \sqrt{2\pi} \|F\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|D\|_\infty \|f\|_D$$

*Beweis.*

Nach Voraussetzung gilt  $F/\sqrt{D} = G \in L_2(\mathbb{R})$ . Für  $\sqrt{D} \in L_\infty(\mathbb{R})$  folgt

$$G\sqrt{D} = F \in L_2(\mathbb{R})$$

Weiter gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(t) |F(t)|^2}{D(t)} dt \leq \|D\|_\infty \|f\|_D^2$$

Nach Plancherel gilt

$$F(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int f(x) \exp(-itx) dx$$

$$2\pi \int |F(t)|^2 dt = \int |f(x)|^2 dx$$

Was zu zeigen war. □

Wir diskutieren nun konkrete Fälle des Raumes  $H_D$ . Es sei

$$D(t) = \chi_{[-b,b]}$$

Diesen Raum wollen wir mit  $PW_b = H_D$  bezeichnen, genannt Paley-Wiener-Raum. Der Parameter  $b$  bezeichne die Bandbreite.  $PW_b$  entspricht im diskreten Fall dem Raum  $\tau_n$  der trigonometrischen Polynome.

Sei  $f$  eine beliebige Funktion aus  $PW_b$ . Dann gelten

$$f(x) = \int_{-b}^b F(t) \exp(ixt) dt, \quad F \in L_2(\mathbb{R}), \quad F(t) = 0 \text{ f.ü., für } |t| > b$$

Das innere Produkt ist wie folgt festgelegt

$$(f, g)_D = \int_{-b}^b F(t) \overline{G(t)} dt$$

und die erzeugende Funktion mit

$$h_b(x) = \int_{-b}^b e^{ixt} dt = \frac{2 \sin bx}{x}$$

Im zweiten Fall sei

$$D(t) = e^{-\alpha|t|} \tag{9.4}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} h_D(x) &= \int e^{-\alpha|t|} e^{ixt} dt \\ &= \int e^{-\alpha|t|} (\cos xt + i \sin xt) dt \\ &= \int e^{-\alpha|t|} \cos xt \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos xt \\ &= \dots \\ &= 2 \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \end{aligned}$$

Die Funktion  $h_D(x)$  ist damit holomorph für  $|x| < \alpha$ .

Als drittes Beispiel besprechen wir den Poisson-Kern. Es sei

$$D(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Dann wird

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{ixt} dt$$

Für die weiteren Rechnungen benötigen wir den Fourier-Umkehrsatz:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx \tag{9.5}$$

wobei  $f(x)$  das gewohnte Fourier Integral darstellt. Wir setzen in (9.4)  $\alpha = 1$  und bekommen

$$\int e^{-|t|} e^{ixt} dt = \frac{2}{1+x^2}$$

Mit (9.5) gilt dann

$$\begin{aligned} e^{-|t|} &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{2}{1+x^2} e^{-itx} dx \\ &= \int \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} e^{-itx} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{1+x^2} e^{ixt} dx \end{aligned}$$

Hieraus fließt  $g(x) = \pi e^{-|t|}$ .

# 10 Aufgaben

**Aufgabe 10.0.1** Zu zeigen ist die Identität:

$$g_1(z) = \sin(nz) \cot\left(\frac{z}{2}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cos(kz) + \cos(nz)$$

**Aufgabe 10.0.2** Zu zeigen ist, dass

$$g_2(z) = \sin^2(nz) D^1\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) \in T_{2n}$$

**Aufgabe 10.0.3** Zu zeigen ist, dass

$$g_3(z) = \sin^3(nz) D^2\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) \in T_{3n}$$

**Aufgabe 10.0.4** Zu zeigen ist: Sei  $u(x)$  gerade und  $v(x)$  ungerade  $\Rightarrow \langle u, v \rangle = 0$

**Aufgabe 10.0.5** Sei  $\tau = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ .

Bestimmen Sie  $\tau^+ = \{T \in \tau : T(-x) = T(x)\}$ ,  $\tau^- = \{T \in \tau : T(-x) = -T(x)\}$ , wobei für alle  $T$  gilt  $T(x + 2\pi) = T(x)$ .

**Aufgabe 10.0.6** Seien  $\omega = \{T \in \tau : T(x + \pi) = T(x)\}$  und  $\omega^\perp = \{T \in \tau : T(x + \pi) = -T(x)\}$  gegeben. Dann gilt:

$$e^{ik(x+\pi)} = e^{ikx} e^{ik\pi} = \begin{cases} e^{ikx} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -e^{ikx} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

**Aufgabe 10.0.7** Sei  $d_n(z) := \sin(nz) \cot\left(\frac{z}{2}\right)$ , weiter gilt  $d_n\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$  für  $k = 1, \dots, 2n - 1$  und  $d_n(0) = 2n$ . Desweiteren ist nun ein Interpolationspolynom  $T_{2n}(f)(x)$  gegeben durch

$$T_{2n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \frac{d_n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)}{2n}$$

Zu zeigen ist:  $T_{2n}(f)(x) \in T_n$  und  $T_{2n}(f)\left(\frac{r\pi}{n}\right) = f\left(\frac{r\pi}{n}\right)$ ,  $r = 0, \dots, 2n - 1$

**Aufgabe 10.0.8** Es ist

$$D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \in T_n$$

Desweiteren gilt:

$$D_n\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right) = 0, \quad r = 1, \dots, 2n$$

$$D_n(0) = 2n + 1$$

Sei zusätzlich

$$T_{2n+1}(f)(x) = \sum_{k=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right) \frac{D_n\left(x - \frac{2\pi k}{2n+1}\right)}{2n+1} \in T_n$$

Zu zeigen ist:  $T_{2n+1}(f)\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right) = f\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right)$ ,  $r = 0, \dots, 2n$

**Aufgabe 10.0.9** Sei  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} < 2\pi$  und

$$\lambda_{0,2n}(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_1}{2}\right) \cdots \sin\left(\frac{x-x_{2n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right) \cdots \sin\left(\frac{x_0-x_{2n}}{2}\right)}$$

Zu zeigen ist  $\lambda_{0,2n}(x) \in T_n$  und  $\lambda_{0,2n}(x_k) = \delta_{0,k}$

**Aufgabe 10.0.10** Sei  $\mathbb{P}_q(\cot(\frac{z}{2})) := \langle 1, \cot(\frac{z}{2}), \cot^2(\frac{z}{2}), \dots, \cot^q(\frac{z}{2}) \rangle$ , der Raum der Polynome, die im  $\cot(\frac{z}{2})$  laufen, vom Grade  $q$ .

Zu zeigen ist nun:  $D^q(\cot(\frac{z}{2})) \in \mathbb{P}_{q+1}(\cot(\frac{z}{2}))$

**Aufgabe 10.0.11** Gesucht ist die Potenzreihendarstellung für  $\frac{\sin(x)}{x}$ .

**Aufgabe 10.0.12** Gegeben ist  $g(x) = \cos(ax)$  für  $-\pi \leq x \leq \pi$ . Es sollen nun die zugehörigen Fourierkoeffizienten  $c_k(g)$  und danach die Besselsche Gleichung bestimmt werden.

**Aufgabe 10.0.13** Sei  $u \in C_{2\pi}$ . Zeigen Sie  $F_{Du}(e_k) = ik(u, e_k)$ .

**Aufgabe 10.0.14** Seien :

$$T_1(x) = \sum_{k=-N}^N b_k \sin(kx) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

$$T_2(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

$$\begin{aligned} \text{Zeigen Sie } \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} &= \sum_{k=-N}^N c_k (\cos kx + i \sin(kx)) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^N [c_k + c_{-k}] \cos(kx) + i [c_k - c_{-k}] \sin(kx) \end{aligned}$$

**Aufgabe 10.0.15** Gegeben ist

$$h(z) = h_{0,p}(z) = \frac{(-1)^p}{2} \sin^{p+1}(z) \cdot \sum_{0 \leq r \leq p} \frac{a_r}{(p-r)!} D^{p-r} \cot\left(\frac{z}{2}\right)$$

Zeigen Sie  $h_{0,p}(0) = 1$

$$D^j h_{0,p}(0) = 0, \quad \text{für } j = 1, \dots, p$$

$$D^j h_{0,p}(\pi) = 0, \quad \text{für } j = 0, \dots, p$$

**Aufgabe 10.0.16** Sei  $Q_\pi(u) = \frac{1}{2} (u(x) - u(x + \pi))$ ,  $u \in \mathcal{H}_d$   
Zu zeigen:  $Q_\pi$  ist eine idempotente Linearform auf  $\mathcal{H}_d$

**Aufgabe 10.0.17** Gesucht ist die Fourierreihe von  $E_q(x)$ .



# 11 Lösungen zu ausgewählten Aufgaben

**Lösung zu (10.0.1).**

$$\begin{aligned}g_1(z) &= \sin(nz) \cot\left(\frac{z}{2}\right) = \sin(nz) \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{z}{2}\right) \cos(nz)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}\end{aligned}$$

Hier wurde das Additionstheorem  $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right) = \sin(nz) \cos\left(\frac{z}{2}\right) + \cos(nz) \sin\left(\frac{z}{2}\right)$  verwendet. Nun ist:

$$\frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} = \sum_{k=-n}^n e^{ikz} \text{ (n-ter Dirichlet-Kern)}$$

Mit der Tatsache, dass  $\sin(z)$  eine ungerade Funktion und  $\cos(z)$  eine gerade Funktion ist, gilt für den n-ten Dirichlet-Kern:

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} &= \sum_{k=-n}^n e^{ikz} = \sum_{k=-n}^n (\cos(kz) + i \sin(kz)) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kz)\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}g_1(z) &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{z}{2}\right) \cos(nz)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kz) - \cos(nz) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cos(kz) + \cos(nz)\end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.2).**

Nun gilt:

$$D^1\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) = D^1\left(\frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)}\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)} + 1\right)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} g_2(z) &= \sin^2(nz) D^1\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) = -\frac{\sin^2(nz)}{2} \left( \frac{\cos^2\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)} + 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \left( \underbrace{\frac{\sin(nz) \cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}}_{\in T_n} \right)^2 + \sin^2(nz) \right) \in T_{2n} \end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.3).**

Nun gilt:

$$\begin{aligned} D^2\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) &= D^2\left(\frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right) \sin^3\left(\frac{z}{2}\right) + \cos^3\left(\frac{z}{2}\right) \sin\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{z}{2}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} + \frac{\cos^3\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{z}{2}\right)} \right) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} g_3(z) &= \sin^3(nz) D^2\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) = \frac{\sin^3(nz)}{2} \left( \frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} + \frac{\cos^3\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{z}{2}\right)} \right) \\ &= \frac{\sin^2(nz)}{2} \left( \underbrace{\frac{\sin(nz) \cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}}_{\in T_n} \right) + \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{\sin(nz) \cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}}_{\in T_n} \right)^3 \in T_{3n} \end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.4).**

Seien  $u$  gerade, d.h.  $u(-x) = u(x)$ , und  $v(x)$  ungerade, d.h.  $v(-x) = -v(x)$ . Desweiteren seien  $u, v$  reellwertig. Für das Produkt der beiden Funktionen gilt  $u(-x)v(-x) = -u(x)v(x)$ . Die Produktfunktion ist also ungerade. Als ungerade Funktion ist  $u(x)v(x)$  punktsymmetrisch zum Ursprung und es gilt somit  $u(0)v(0) = 0$ .

Für das Skalarprodukt folgt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle u, v \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \overline{v(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 u(x)v(x) dx + \int_0^{\pi} u(x)v(x) dx \right] \\ &\stackrel{\text{Sym.}}{=} \frac{1}{2\pi} \left[ - \int_0^{\pi} u(x)v(x) dx + \int_0^{\pi} u(x)v(x) dx \right] = 0 \end{aligned}$$

Für komplexwertige Funktionen kann durch eine separate Betrachtung für Real- und Imaginärteil das Problem auf den reellen Fall reduziert werden.

**Lösung zu (10.0.5).**

Es ist  $T(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ ; die Forderung  $T(-x) = T(x)$  liefert:

$$a_k = a_{-k} \text{ und } T(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + 1. \text{ Damit ist:}$$

$$\tau^+ = \langle 1, \cos(x), \cos(2x), \dots \rangle = \langle \{\cos(kx) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \rangle$$

Die Forderung  $T(-x) = -T(x)$  liefert  $a_k = -a_{-k}$  und  $T(x) = 2i \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ . Damit ist:

$$\tau^- = \langle \sin(x), \sin(2x), \dots \rangle = \langle \{\sin(kx) : k \in \mathbb{N}\} \rangle$$

Insgesamt ist somit jedes Basiselement von  $\tau^+$  eine gerade Funktion und jedes Basiselement von  $\tau^-$  eine ungerade Funktion. Damit gilt nach Aufgabe 1:

$$\begin{aligned} \langle \cos(mx), \sin(nx) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ &\Rightarrow \tau^+ \perp \tau^- \end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.6).**

Es liefern für  $T(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$  die Forderungen:

$$T(x + \pi) = T(x) \Rightarrow a_k = 0 \text{ für } k \text{ ungerade}$$

$$T(x + \pi) = -T(x) \Rightarrow a_k = 0 \text{ für } k \text{ gerade}$$

Somit gilt für beliebige  $u \in \omega$  und  $v \in \omega^\perp$

$$u = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} a_k e^{ikx}, v = \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \text{ ungerade}}}^{\infty} b_r e^{irx}$$

Somit folgt, dass

$$\langle u, v \rangle = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \text{ ungerade}}}^{\infty} a_k \overline{b_r} \langle e_k, e_r \rangle = 0, \text{ da } k \neq r.$$

Es folgt außerdem:

$$\begin{aligned} \omega &= \langle \{e_k : k \in \mathbb{Z}, k \text{ gerade}\} \rangle \\ \omega^\perp &= \langle \{e_k : k \in \mathbb{Z}, k \text{ ungerade}\} \rangle \end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.7).**

$$T_{2n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \underbrace{\frac{d_n\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)}{2n}}_{\in T_n} \in T_n$$

$$\text{Es ist } \frac{d_n\left(\frac{j\pi}{n} - \frac{k\pi}{n}\right)}{2n} = \frac{d_n\left(\frac{(j-k)\pi}{n}\right)}{2n} = \delta_{j,k}$$

Damit folgt nun insgesamt

$$T_{2n}(f)\left(\frac{r\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{2n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \underbrace{\frac{d_n\left(\frac{r\pi}{n} - \frac{k\pi}{n}\right)}{2n}}_{=\delta_{r,k}} = f\left(\frac{r\pi}{n}\right), \quad r = 0, \dots, 2n-1$$

**Lösung zu (10.0.8).**

$$\begin{aligned} T_{2n+1}(f)\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right) &= \sum_{k=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right) \frac{D_n\left(\frac{2\pi r}{2n+1} - \frac{2\pi k}{2n+1}\right)}{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} f\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right) \underbrace{\frac{D_n\left(\frac{2\pi(r-k)}{2n+1}\right)}{2n+1}}_{=\delta_{r,k}} = f\left(\frac{2\pi r}{2n+1}\right), \quad r = 0, \dots, 2n \end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.9).**

Der Beweis läuft über eine vollständige Induktion über die Anzahl der Interpolationsstützstellen:

$$\begin{aligned} \text{I.A.: } n = 1 \quad \lambda_{0,2}(x) &= \frac{\sin\left(\frac{x-x_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-x_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_0-x_2}{2}\right)} \\ &= \frac{\left(e^{i\left(\frac{x-x_1}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-x_1}{2}\right)}\right) \cdot \left(e^{i\left(\frac{x-x_2}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-x_2}{2}\right)}\right)}{\left(e^{i\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)}\right) \cdot \left(e^{i\left(\frac{x_0-x_2}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x_0-x_2}{2}\right)}\right)} \\ &= \frac{e^{ix} e^{-i\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)} + e^{-ix} e^{i\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}}{e^{ix_0} e^{-i\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)} + e^{-ix_0} e^{i\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}} \in T_n \quad \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzungen: Die Behauptung gelte bis zu einem festen  $n-1$ .

$$I.S.: n-1 \rightarrow n \quad \lambda_{0,2n}(x) = \underbrace{\lambda_{0,2n-2}(x)}_{\in T_{n-1}} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x-x_{2n-1}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-x_{2n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_0-x_{2n-1}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x_0-x_{2n}}{2}\right)}}_{\in T_1} \in T_n$$

Mit der oben an die Interpolationsknoten gestellten Bedingung, gilt für  $k \neq j$ :

$$\sin\left(\frac{x_j - x_k}{2}\right) \neq 0, \text{ da } 0 < \frac{x_j - x_k}{2} < \pi$$

Desweiteren ergibt sich für  $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \lambda_{0,2n}(x_k) &= \frac{\sin\left(\frac{x_k-x_1}{2}\right) \cdots \sin\left(\frac{x_k-x_k}{2}\right) \cdots \sin\left(\frac{x_k-x_{2n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right) \cdots \sin\left(\frac{x_0-x_{2n}}{2}\right)} = 0 \\ \lambda_{0,2n}(x_0) &= \frac{\sin\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right) \cdots \sin\left(\frac{x_0-x_{2n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_0-x_1}{2}\right) \cdots \sin\left(\frac{x_0-x_{2n}}{2}\right)} = 1 \\ &\Rightarrow \lambda_{0,2n}(x_k) = \delta_{0,k} \end{aligned}$$

Mit den Betrachtungen ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} \lambda_{r,2n}(x) &= \frac{\prod_{j=0, j \neq r}^{2n} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{j=0, j \neq r}^{2n} \sin\left(\frac{x_r-x_j}{2}\right)} \in T_n \text{ für } r = 0, \dots, 2n \\ &\Rightarrow T(x) = T_{2n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \lambda_{r,2n}(x) \in T_n \\ &\Rightarrow T(x_l) = T_{2n}(f)(x_l) = \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \underbrace{\lambda_{r,2n}(x_l)}_{=\delta_{l,k}} = f(x_l) \text{ für } 0 \leq l \leq 2n \end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.10).**

Beweis (vollständige Induktion):

$$\begin{aligned} \text{I.A.: } q=0 \quad D^0\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) &= \cot\left(\frac{z}{2}\right) \in \mathbb{P}_1\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) \checkmark \\ q=1 \quad D^1\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) &= -\frac{1}{2} \left(1 + \cot^2\left(\frac{z}{2}\right)\right) \in \mathbb{P}_2\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) \checkmark \\ q=2 \quad D^2\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) &= \frac{1}{2} \cot\left(\frac{z}{2}\right) \left(1 + \cot^2\left(\frac{z}{2}\right)\right) \in \mathbb{P}_3\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) \checkmark \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte bis zu einem festen  $n$ .

Induktionsschritt:  $n \rightarrow n+1$ :

$$\begin{aligned} D^{n+1}\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right) &= D\left(\underbrace{D^n\left(\cot\left(\frac{z}{2}\right)\right)}_{\in \mathbb{P}_{n+1}}\right) \\ &= D\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k \cot^k\left(\frac{z}{2}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k D\left(\cot^k\left(\frac{z}{2}\right)\right) \text{ „Kettenregel“} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} k a_k \cot^{k-1}\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \cot^2\left(\frac{z}{2}\right)\right) \in \mathbb{P}_{n+2} \end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.11).**

Es gilt

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}$$

**Lösung zu (10.0.12).**

$$\begin{aligned} a \neq 0 \quad c_0(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax) dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(ax)}{a} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi a} (\sin(a\pi) - \sin(-a\pi)) = \frac{\sin(a\pi)}{\pi a} \end{aligned}$$

$$a = 0 \quad c_0(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

$$\begin{aligned} k \neq 0 \quad c_k(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{-\cos(ax) e^{-ikx}}{ik} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{a}{2\pi ik} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(ax) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi ik} (-\cos(a\pi)(-1)^k + \cos(a\pi)(-1)^k) \\ &\quad - \frac{a}{2\pi ik} \left[ \frac{-\sin(ax) e^{-ikx}}{ik} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{a^2}{2\pi k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ax) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow c_k(g) = \frac{a}{2\pi ik} \left[ \frac{2 \sin(a\pi)(-1)^k}{ik} \right] \cdot \frac{k^2}{k^2 - a^2} = \frac{-a \sin(a\pi)(-1)^k}{\pi(k^2 - a^2)}, \text{ für } a \neq \pm k$$

$$c_k(g) = 0, \text{ für } a \in \mathbb{Z} \text{ und } a \neq \pm k$$

$$\begin{aligned} a = k : \quad c_k(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left[ \frac{-\cos(kx) e^{-ikx}}{ik} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\left[ \frac{-\sin(kx) e^{-ikx}}{ik} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{k}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow c_k(g) = 0 \quad \text{analog gilt für } a = -k \quad c_k(g) = 0$$

Desweiteren gilt für die Norm von  $g$ :

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(ax)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\cos(ax) \sin(ax)}{a} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(ax) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos(a\pi) \sin(a\pi)}{a} \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2(ax)) dx \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \|g\|^2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\cos(a\pi) \sin(a\pi) + a\pi}{a} \right] \quad \text{für } a \neq 0$$

Insgesamt liefert die Besselsche Gleichung:

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(g)|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\cos(a\pi) \sin(a\pi) + a\pi}{a} \right] &= \frac{\sin^2(a\pi)}{\pi^2 a^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^2 \sin^2(a\pi)}{\pi^2 (k^2 - a^2)^2} \end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.13).**

$$\begin{aligned} F_{Du}(e_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Du(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ u(x) e^{-ikx} \right]_0^{2\pi} + \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-ikx} dx = ik \langle u, e_k \rangle \end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.14).**

Zum Verschwinden der Cosinusterme muss gelten  $c_k = -c_{-k}$  und zum Verschwinden der Sinusterme muss gelten  $c_k = c_{-k}$ . Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für die Koeffizienten von  $T_1(x)$  und  $T_2(x)$  folgendes:

$$\begin{aligned} b_k &= ic_k \text{ und } b_k = -b_{-k} \\ a_k &= 2c_k, \text{ für } 1 \leq k \leq N \text{ wobei } a_0 = c_0 \end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.15).**

Aus einer modifizierten Variante der Polynomdivision folgt:

$$\cot\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{z}{z} - \underbrace{\frac{z^3}{360} - \frac{z^5}{15120} \dots}_{=g(z) \text{ holomorph}}, \text{ für } 0 < |z| < 2\pi$$

Desweiteren gilt, dass  $D^{p-r}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{(-1)^{p-r}(p-r)!}{z^{p+1-r}}$ . Damit ist

$$D^{p-r} \cot\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{2(-1)^{p-r}(p-r)!}{z^{p+1-r}} + D^{p-r}(g(z))$$

Zusätzlich hat  $\frac{1}{\sin^{p+1}(z)}$  in 0 eine Polstelle der Ordnung  $p+1$  und vom Residuum 1. Damit hat die zugehörige Laurentreihenentwicklung um 0 die Gestalt:

$$\frac{1}{\sin^{p+1}(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_r}{z^{p+1-k}}$$

Wir setzen  $a_0 = 1$  und  $b_0 = 1$ . Nun gilt damit:

$$\begin{aligned} h_{0,p}(z) &= \frac{(-1)^p}{2} \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_r}{z^{p+1-k}}} \cdot \sum_{0 \leq r \leq p} \left( \frac{2a_r(-1)^{p-r}}{z^{p+1-r}} + \frac{a_r D^{p-r} g(z)}{(p-r)!} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{0 \leq r \leq p} \frac{a_r(-1)^{-r}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_r}{z^{r-k}}}}_{\rightarrow 1, \text{ für } z \rightarrow 0} + \underbrace{\sum_{0 \leq r \leq p} \frac{(-1)^p a_r \sin^{p+1}(z) D^{p-r} g(z)}{2(p-r)!}}_{\rightarrow 0, \text{ für } z \rightarrow 0} \\ &\rightarrow 1, \text{ für } z \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit ist  $h_{0,p}(0) = 1 \checkmark$ .

Desweiteren gilt:

$$D^k(\sin^{p+1}(z)) = \sum_{j=0}^k \frac{(1 + (-1)^{j+k})}{2} a_{jk}(p) \sin^{p+1-j} [\cos(z)]^{\frac{1-(-1)^k}{2}}$$

Dabei ist  $a_{jk}(p)$  ein Polynom in  $p$ .

Weiter wissen wir:

$$\begin{aligned} D^n(h_{0,p}(z)) &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} D^l(\sin^{p+1}(z)) D^{n-l} \left( \sum_{0 \leq r \leq p} \left( \frac{a_r(-1)^{-r}}{z^{p+1-r}} + \frac{a_r(-1)^p D^{p-r} g(z)}{2(p-r)!} \right) \right) \\ &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} D^l(\sin^{p+1}(z)) D^{n-l} \left( \sum_{0 \leq r \leq p} \left( \frac{a_r(-1)^{-r}}{z^{p+1-r}} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} D^l(\sin^{p+1}(z)) D^{n-l} \left( \sum_{0 \leq r \leq p} \left( \frac{a_r(-1)^p D^{p-r} g(z)}{2(p-r)!} \right) \right) \\ &= \underbrace{\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \sum_{j=0}^l \frac{(1 + (-1)^{j+l})}{2} a_{jl}(p) \sin^{p+1-j} [\cos(z)]^{\frac{1-(-1)^l}{2}}}_{=0 \text{ für } z=\pi} \\ &\quad \cdot \underbrace{\sum_{0 \leq r \leq p} \left( \frac{a_r(-1)^{n-l-r} (p+1-r) \cdots (p+1+n-l-r)}{z^{p+1+n-l-r}} \right)}_{\neq 0 \text{ für } z=\pi} \\ &= \underbrace{\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \sum_{j=0}^l \frac{(1 + (-1)^{j+l})}{2} a_{jl}(p) \sin^{p+1-j} [\cos(z)]^{\frac{1-(-1)^l}{2}}}_{=0 \text{ für } z=\pi} \\ &\quad \cdot \sum_{0 \leq r \leq p} \left( \frac{a_r(-1)^p D^{p+n-l-r} g(z)}{2(p-r)!} \right) \end{aligned}$$

Damit ist  $D^j h_{0,p}(\pi) = 0$ , für  $j = 0, \dots, p \checkmark$ .

**Lösung zu (10.0.16).**

Beweis:

Additivität: Seien  $u, v \in \mathcal{H}_d$ . Dann gilt mit  $Q := Q_\pi$ :

$$\begin{aligned} Q(u+v) &= \frac{1}{2} ((u+v)(x) - (u+v)(x+\pi)) \\ &= \frac{1}{2} (u(x) - u(x+\pi)) + \frac{1}{2} (v(x) - v(x+\pi)) \\ &= Q(u) + Q(v) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Homogenität: Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} Q(\alpha u) &= \frac{1}{2} (\alpha \cdot u(x) - \alpha \cdot u(x+\pi)) = \alpha \cdot \frac{1}{2} (u(x) - u(x+\pi)) \\ &= \alpha Q(u) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Idempotenz:

$$\begin{aligned}
 Q(Q(u)) &= Q\left(\frac{1}{2}(u(x) - u(x + \pi))\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(u(x) - u(x + \pi)) - \frac{1}{2}(u(x + \pi) - u(x + 2\pi)) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{2}u(x + \pi) - \frac{1}{2}u(x + \pi) + \underbrace{\frac{1}{2}u(x + 2\pi)}_{=\frac{1}{2}u(x)} \right] \\
 &= \frac{1}{2}(u(x) - u(x + \pi)) = Q(u)
 \end{aligned}$$

**Lösung zu (10.0.17).**

Es gilt  $E_q(x) := \frac{1}{2} [B_{q+1}(x) - B_{q+1}(x + \pi)]$ . Aus der Vorlesung ist und die Fourierreihe der Bernoulli-Polynome bereits bekannt:

$$B_q(x) = \sum_{k \neq 0} (ik)^{-q} e^{ikx}$$

Somit ergibt sich für die Fourierreihe der Eulerpolynome:

$$\begin{aligned}
 E_q(x) &= \frac{1}{2} [B_{q+1}(x) - B_{q+1}(x + \pi)] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k \neq 0} (ik)^{-(q+1)} e^{ikx} - \sum_{k \neq 0} (ik)^{-(q+1)} e^{ik(x+\pi)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{k \neq 0} (ik)^{-(q+1)} e^{ikx} - \sum_{k \neq 0} (ik)^{-(q+1)} e^{ikx} \underbrace{e^{ik\pi}}_{=(-1)^k} \right] \\
 &= \sum_{k \neq 0} \frac{(ik)^{-(q+1)} (1 + (-1)^{k+1})}{2} e^{ikx}
 \end{aligned}$$



# Literaturverzeichnis

- [1] Franz-Jürgen Delvos, Approximation in periodic spaces  
*Skript, Uni-Bib Siegen*
- [2] Franz-Jürgen Delvos, Cardinal Approximation in harmonic Hilbert spaces  
*Applied Analysis 4 (2000), no. 2, 157-172*
- [3] Rainer Kress, Numerical Analysis  
*Springer-Verlag 1998*
- [4] Dirk Werner, Funktionalanalysis, 5.,erweiterte Auflage  
*Springer-Verlag 2005*
- [5] Günther Hämmerlin, Karl-Heinz Hoffmann, Numerische Mathematik  
*Springer-Verlag 1989*
- [6] Konrad Königsberger, Analysis 1, 6.,durchgesehene Auflage  
*Springer-Verlag 2004*
- [7] Erwin Kreyszig, Introductory Functional Analysis  
*John Wiley & Sons 1978*