Theoretische Übungen (4)
zur Vorlesung „Numerik I“
im Wintersemester 2010/11
11.11.2010

1. Man beweise: Die Matrix $C = -D^{-1}(L + R)$ habe nur die reellen Eigenwerte $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n < 1$ mit den Eigenvektoren $z^{(1)}, \dots, z^{(n)}$. Dann hat $C(\omega)$ dieselben Eigenvektoren $z^{(1)}, \dots, z^{(n)}$, aber zu den Eigenwerten $\mu_j = 1 - \omega + \omega\lambda_j$ für $1 \leq j \leq n$. Der Spektralradius von $C(\omega)$ wird minimal, wenn

$$\omega^* = \frac{2}{2 - \lambda_1 - \lambda_n}$$

gewählt wird. Im Falle $\lambda_1 \neq -\lambda_n$ ist die Konvergenz des Relaxationsverfahrens besser als die des Gesamtschrittverfahrens.

2. Benutzen Sie den Banachschen Fixpunktsatz, um zu zeigen, dass es reelle Zahlen x, y gibt mit

$$x = \frac{1}{40}x^2 + 2y + \frac{2}{25}y^2 - \frac{1}{2},$$
$$y = 3x + \frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{100}y^2 - 1.$$

3. Bestimme zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

die Herationsmatrizen zum Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren.

Bestimme dann die zugehörigen Spektralradien.

4. Man betrachte die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für welche Matrix konvergiert das Jacobi- und für welche das Gauß-Seidel-Verfahren?