Theorie und Numerik von Variationsungleichungen

Mitschrift

von M. Dücker
unter Mitarbeit von
C. Fasel, J. Frohne und I. Cherlenyak

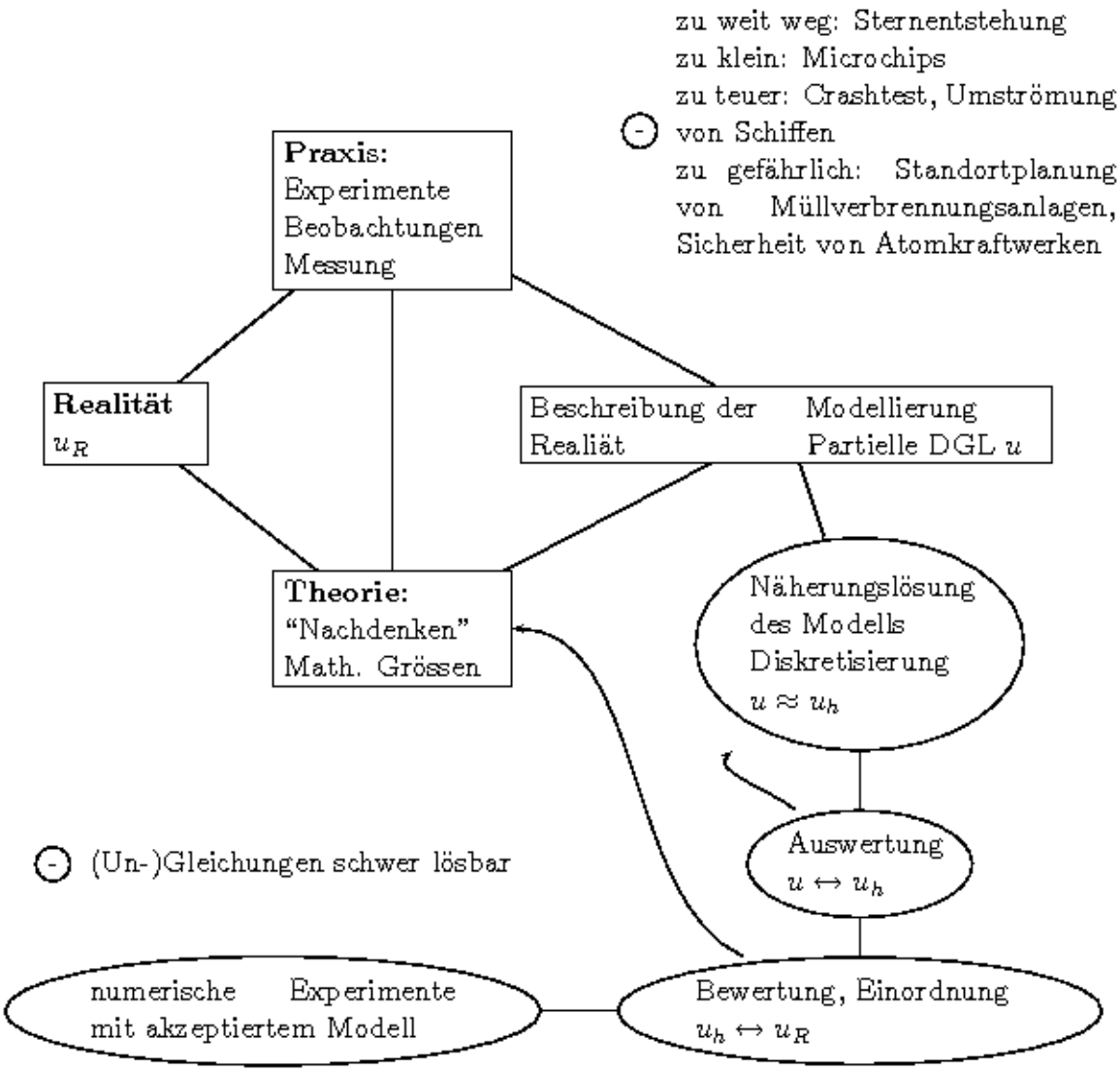
zu einer Vorlesung von Prof. F.-T. Suttmeier

Fachbereich 6 - Mathematik
der Universität Siegen

WS 2003/04

Inhaltsverzeichnis

1 Numerische Simulation: Eine Übersicht



Beispiel 1.1 *Auslenkung eines Drahtes.*

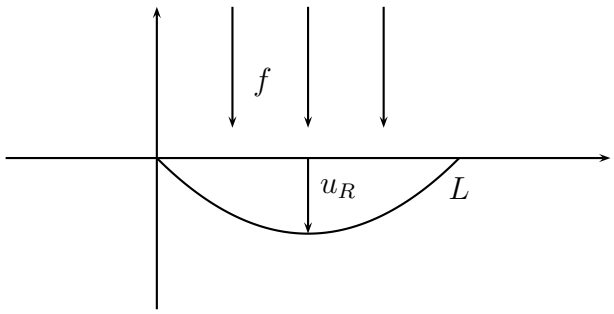


Abbildung 1.1: Draht der sich durch f verbiegt.

Praxis: *Je grösser f, desto grösser ist die Auslenkung u_R.*
Theorie: *Längenänderung Δl ist proportional zur "elastischen Energie":*

$$\Delta l \sim \frac{1}{2} \int_I (\partial_x u)^2 \, dx$$

Modellierung

$$-\partial_x^2 u = f, \quad u(0) = u(L) = 0$$

Diskretisierung

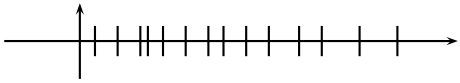


Abbildung 1.2: Diskretisierung

Wähle n bel. Punkte $x_i \in I,\ i = 1, \ldots, n$.
Bezeichnung: *$u_i = u(x_i)$.*

Approximation von $\partial_x^2 u$:

$$\partial_x^2 u(x_i) \approx \frac{u_{i-1} + 2u_i + u_{i+1}}{h^2}$$

Man erhält ein System von Gleichungen

$$-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Beachte die Randbedingungen: $u(0) = u(L) = 0$.
Mit den Bezeichungen: $x, b \in \mathbb{R}^n$*:*

$$x = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} h^2 f_1 \\ \vdots \\ h^2 f_n \end{pmatrix}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Löse das Gleichungssystem $Ax = b$.
Bestimme durch lineare Interpolation: $x \rightarrow u_h$.

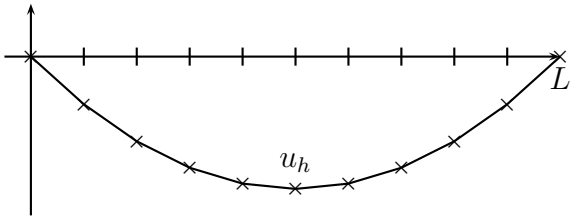


Abbildung 1.3: Interpolation

Auswertung der Rechnung: *Ist* $\|u - u_h\|_?$ *klein genug?*
Bewertung in Bezug auf u_R*:*

$$\begin{aligned} \|u_R - u_h\| &= \|u_R - u + u - u_h\| \\ &\leq \underbrace{\|u_R - u\|}_{Modellfehler} + \underbrace{\|u - u_h\|}_{Diskretisierungsfeher} \end{aligned}$$

Verbesserung des Modells:

$$-\partial_x^2 u = f \;\rightarrow\; -\mu \cdot \partial_x^2 u = f, \qquad \mu \text{ Elastizitätskonstante}$$

Akzeptiertes Modell z.B.: $-0.75 \cdot \partial_x^2 u = f$

Numerische Experimente:

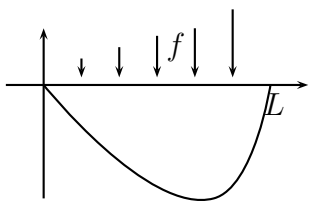
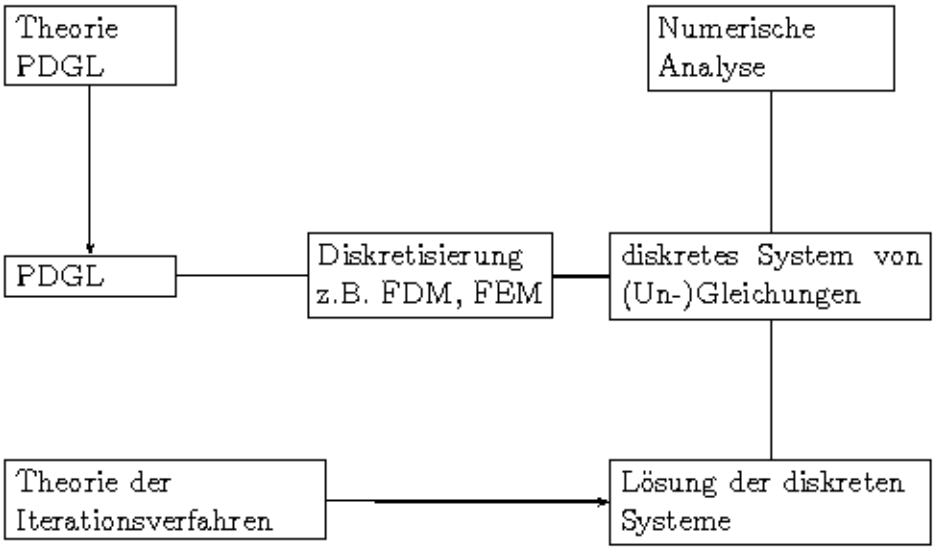


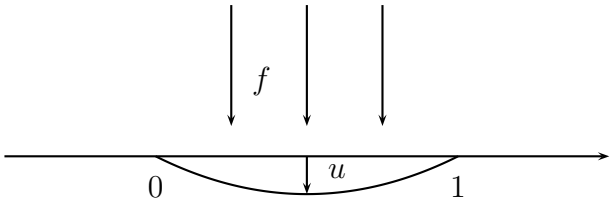
Abbildung 1.4: Numerische Experimente


Theorie
PDGL
Numerische
Analyse
PDGL
Diskretisierung
z.B. FDM, FEM
diskretes System von
(Un-)Gleichungen
Theorie der
Iterationsverfahren
Lösung der diskreten
Systeme

2 Einleitung zur FEM (Finite Element Methode)

2.1 Modell Beispiel

Elastischer Draht



Beschreibung der Auslenkung $u(x)$:

Betrachte die Längenänderung: $\Delta l = \int_I \sqrt{1 + (\partial_x u)^2}\, dx - \int_I 1\, dx.$

Benutze Taylor-Entwicklung: $\sqrt{1+y} \approx \sqrt{1+0} + \frac{1}{2\sqrt{1+0}}(y-0)$

$$\Delta l \approx \frac{1}{2} \int_I (\partial_x u)^2\, dx$$

Physik, Theorie: Elastische Energie ist proportional zu Δl:

$$U_E \sim \Delta l$$

Durch Einwirken der Kraft f besitzt der Draht eine potentielle Energie:

$$U_f = -\int_I f \cdot u\, dx \quad \text{(Arbeit=Kraft} \cdot \text{Weg)}$$

Stabile Gleichgewichtslage ist charakterisiert dadurch, dass die Gesamtenergie minimal wird.

$$U(u) = U_E + U_f = \frac{1}{2} \int_I (\partial_x u)^2\, dx - \int_I f \cdot u\, dx$$

Also:

Gesucht ist $u \in V$, so dass

$$U(u) \leq U(v) \qquad \forall\ v \in V \qquad (M)$$

V ist der Raum der Vergleichsfunktionen, V ist festgelegt durch:

1. Alle stetigen Funktionen mit Nullrandwerten.
2. Funktionen haben stückweise stetige, beschränkte 1. Ableitungen (Integrale müssen Sinn machen).

2.2 Klassische und variationelle Formulierung

Variationsrechnung

Wähle $\varphi \in V$ beliebig, aber fest.
Betrachte $v = u + \varepsilon\varphi$ für $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Aufgrund der Minimaleigenschaft

$$U(u) \leq U(v) = U(u + \varepsilon\varphi) \qquad \forall\varepsilon$$

folgt die notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\varepsilon} U(u+\varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{d}{d\varepsilon}\Big[\frac{1}{2}\int_I (\partial_x(u+\varepsilon\varphi))^2\ dx - \int_I f\cdot(u+\varepsilon\varphi)\ dx\Big]_{\varepsilon=0} &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \Big[\frac{1}{2}\int_I 2(\partial_x u + \varepsilon\partial_x\varphi)\ \partial_x\varphi\ dx - \int_I f\cdot\varphi\ dx\Big]_{\varepsilon=0} &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \int_I \partial_x u\ \partial_x\varphi\ dx - \int_I f\cdot\varphi\ dx &&= 0
\end{aligned}$$

Das Funktional $U(.)$ ist konvex und daher ist die Bedingung

$$\int_I \partial_x u\ \partial_x\varphi\ dx = \int_I f\ \varphi\ dx \qquad \forall\varphi \in V \qquad (V)$$

auch hinreichend.

Man spricht bei (V) von der variationellen (oder schwachen) Formulierung.
Obige Rechnung zeigt:

Satz 2.1 $(M) \Rightarrow (V)$.

Umgekehrt gilt:

Satz 2.2 $(V) \Rightarrow (M)$.

Beweis: Schreibweise: $(v, w) = \int_I v(x)w(x)\,dx$ für stückweise stetige beschränkte Funktionen.

1. u sei Lösung von (V).
2. Wähle $v \in V$ und setze $w = v - u$.
3. Somit gilt: $v = w + u$ und $w \in V$.

$$\begin{aligned} U(v) = U(u+w) &= \frac{1}{2}(\partial_x u + \partial_x w, \partial_x u + \partial_x w) - (f, u+w) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x u, \partial_x u) - (f,u) + \underbrace{(\partial_x u, \partial_x w) - (f,w)}_{=0 \text{ (wegen) } (V)} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_x w, \partial_x w)}_{\geq 0} \\ &\geq \frac{1}{2}(\partial_x u, \partial_x u) - (f,u) \\ &= U(u) \end{aligned}$$

Also gilt:

$$U(u) \leq U(v) \qquad \forall\ v \in V.$$

□

Satz 2.3 *(Klassische Formulierung)*
Sei u Lösung von (V). Zusätzlich existiere $\partial_x^2 u$ und sei stetig. Dann gilt:

$$-\partial_x^2 u = f \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (D)$$

Beweis:

$$\int_0^1 \partial_x u \partial_x v\ dx - \int_0^1 f \cdot v\ dx = 0 \qquad \forall\ v \in V$$

Partielle Integration liefert:

$$[\partial_x u \cdot v]_0^1 - \int_0^1 \partial_x^2 u \cdot v\ dx - \int_0^1 f \cdot v\ dx = 0$$

Beachte $v(0) = v(1) = 0$:

$$\int_0^1 (-\partial_x^2 u - f)\ v\ dx = 0 \qquad \forall\ v \in V$$

$$\Rightarrow \quad -\partial_x^2 u = f \quad \text{auf } [0,1]$$

□

Verwende gleiche Rechentechnik (also partielle Integration) um zu zeigen:

Satz 2.4 $(D) \Rightarrow (V)$.

Zusammenfassung:

$$(D) \Rightarrow (V) \Leftrightarrow (M)$$

2.3 Näherungslösung, Ritz-Galerkin-Verfahren

Idee: Approximation des Raumes V durch einen endlich dimensionalen Teilraum V^N mit $dim\ V^N = N$.

Betrachte die schwache Formulierung (V)

$$\int_I \partial_x u^N \partial_x \varphi^N\ dx = \int_I f \cdot \varphi^N\ dx \qquad \forall\ \varphi \in V^N$$

Schreibweise:

$$a(v,w) = (\partial_x v, \partial_x w)$$

Also gilt kompakt:

$$a(u^N, \varphi^N) = (f, \varphi^N)$$

Wähle Basis für V^N:

$$V^N = < \varphi_1, \ldots, \varphi_N >$$

Darstellung für $\varphi \in V^N$:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j, \qquad v_j \in \mathbb{R}$$

Es gnügt

$$a(u^N, \varphi_i) = (f, \varphi_i) \qquad \forall i = 1, \ldots, N \tag{2.1}$$

zu erfüllen:

$$a\left(u^N, \sum_{i=1}^{N} v_i \varphi_i\right) - \left(f, \sum_{i=1}^{N} v_i \varphi_i\right) = \sum_{i=1}^{N} v_i \underbrace{\Big(a(u^N, \varphi_i) - (f, \varphi_i)\Big)}_{=0} = 0 \tag{2.2}$$

Wie berechnet man u^N?

Einsetzen von $u^N = \sum_j u_j \varphi_j$, $u_j \in \mathbb{R}$ in (2.1):

$$\begin{aligned} & a(u^N, \varphi_i) &=& (f, \varphi_i) \\ \Leftrightarrow \quad & a\Big(\sum_j u_j \varphi_j, \varphi_i\Big) &=& (f, \varphi_i) \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_j u_j \; a(\varphi_j, \varphi_i) &=& (f, \varphi_i) \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_j u_j \Big(\int_I \partial_x \varphi_j \; \partial_x \varphi_i \; dx \Big) &=& (f, \varphi_i) \qquad i = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

Die Bestimmung $u^N \in V^N$ wird somit auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt:

$$Ax = b$$

Mit $x^T = (u_1, \ldots, u_N),\ b^T = (b_1, \ldots, b_N),\ b_i = \int_I f \cdot \varphi_i \; dx$

$A_{ij} = \int_I \partial_x \varphi_j \; \partial_x \varphi_i \; dx, \quad A \in \mathbb{R}^{N \times N}.$

2.3.1 Erste Fehlerabschätzung, Galerkin-Eigenschaft

$$\begin{aligned} (\partial_x u, \partial_x \varphi) &= (f, \varphi) \qquad \forall \varphi \in V \\ (\partial_x u^N, \partial_x \varphi) &= (f, \varphi) \qquad \forall \varphi \in V^N \end{aligned}$$

Weitere Voraussetzung: $V^N \subset V$
Für ein $\varphi \in V^N$ gilt:

$$\begin{aligned} (\partial_x u, \partial_x \varphi) &= (f, \varphi) \\ -(\partial_x u^N, \partial_x \varphi) &= (f, \varphi) \\ \hline (\partial_x u - \partial_x u^N, \partial_x \varphi) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{Galerkin-Eigenschaft}$$

Abschätzung des Fehlers:

$$\begin{aligned} \|\partial_x u - \partial_x u^N\|^2 &= (\partial_x u - \partial_x u^N, \partial_x u - \partial_x \varphi + \partial_x \varphi - \partial_x u^N) \\ &= (\partial_x u - \partial_x u^N, \partial_x u - \partial_x \varphi) + (\partial_x u - \partial_x u^N, \underbrace{\partial_x \varphi - \partial_x u^N}_{\in V^N}) \end{aligned}$$

Falls $\varphi \in V^N$, dann verschwindet der 2. Term. Es bleibt:

$$\|\partial_x u - \partial_x u^N\|^2 \leq \|\partial_x u - \partial_x u^N\| \; \|\partial_x u - \partial_x \varphi\|$$

Nach Division:

$$\|\partial_x u - \partial_x u^N\| \leq \|\partial_x u - \partial_x \varphi\|$$

Gehe über zu:

$$\|\partial_x u - \partial_x u^N\| \leq \inf_{\varphi \in V^N} \|\partial_x u - \partial_x \varphi\|$$

2.4 Einfache Finite Elemente

Allgemeine Überlegung:

- Lösung u sollte gut approximierbar sein.
- Leichte Berechnung der Einträge von A.
- A sollte für die Numerik gute Eigenschaften haben. z.B. dünnbesetzt, moderate Kondition.

2.4.1 Lineare Finite Elemente

Idee: V^N besteht aus stückweise linearen Funktionen die global stetig sind.

Berechnung von A:

Basiswahl:

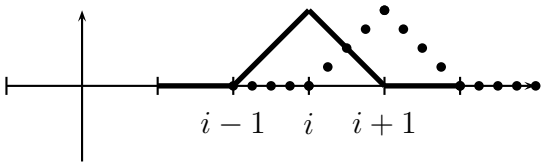


Abbildung 2.1: Basisfunktionen

Basisfunktionen φ_i:

$$\varphi_i(x_i) = 1,\ \varphi_i(x_{i+1}) = 0,\ \varphi_i \text{ linear auf } (x_i, x_{i+1})$$

$$\partial_x \varphi_i = -\frac{1}{h} \text{ auf } (x_i, x_{i+1})$$

$$\begin{aligned}
\int_I \partial_x\varphi_i\ \partial_x\varphi_i\ dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \partial_x\varphi_i\ \partial_x\varphi_i\ dx \\
&= 2\int_{x_i}^{x_{i+1}} \partial_x\varphi_i\ \partial_x\varphi_i\ dx \\
&= 2\frac{1}{h^2}(x_{i+1} - x_i) = \frac{2}{h} = A_{ii} \\
\int_I \partial_x\varphi_i\ \partial_x\varphi_{i+1}\ dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \partial_x\varphi_i\ \partial_x\varphi_{i+1}\ dx \\
&= (x_{i+1} - x_i)\left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) = -\frac{1}{h} = A_{i,i+1} = A_{i+1,i}
\end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechte Seite: $b_i = \int\limits_I f\varphi_i \, dx$

Falls f konstant ist: $b_i = f \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i \, dx = hf_i$

2.4.2 Interpolationsfehler

Motivation:

$$\|\partial_x(u - u_h)\| \leq \inf_{\varphi \in V_h} \|\partial_x(u - \varphi)\| \leq \|\partial_x(u - I_h u)\|$$

$I_h u$ bezeichne die lineare Interpolierende von u.

Satz 2.5 *Auf einem Teilintervall T, $T = (a_1, a_2)$, $h_T = a_2 - a_1$ der Zerlegung des Rechengebietes $I \subset \mathbb{R}$ gilt:*

$$\|v - I_h v\|_{L_\infty(T)} \leq c h_T^2 \, \|\partial_x^2 v\|_{L_\infty(T)} \tag{2.3}$$

$$\|\partial_x(v - I_h v)\|_{L_\infty(T)} \leq c h_T \, \|\partial_x^2 v\|_{L_\infty(T)} \tag{2.4}$$

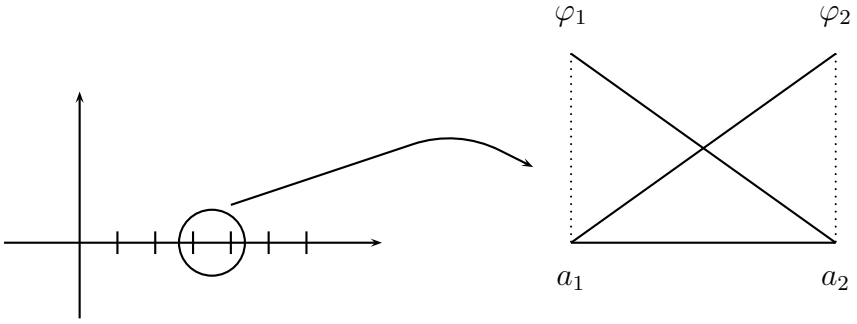


Abbildung 2.2: Skizze

Beweis: Vorbereitungen:

Die "Hutfunktionen" $\varphi_1, \ \varphi_2$ bestimmen die Basis für $P_1(T)$. Allgemein gilt für $w \in P_1(T)$:

$$w(x) = \sum_{i=1}^{2} w(a_i)\varphi_i(x), \qquad x \in T$$

Also

$$I_h v(x) = \sum_{i=1}^{2} v(a_i)\varphi_i(x), \qquad x \in T. \tag{2.5}$$

Betrachte die Taylor-Entwicklung von v um x in a_i:

$$v(a_i) = v(x) + \partial_x v(x)\ (a_i - x) + \frac{1}{2}\ \partial_x^2 v(\xi_i)\ (a_i - x)^2 \tag{2.6}$$

Zu zeigen ist (2.3). Einsetzen von (2.6) in (2.5):

$$I_h v(x) = \sum_{i=1}^{2} \left(v(x) + \partial_x v(x)\ (a_i - x) + \frac{1}{2}\ \partial_x^2 v(\xi_i)\ (a_i - x)^2 \right)\ \varphi_i(x)$$

Umsortieren ergibt:

$$\begin{aligned} I_h v(x) \quad = \quad & v(x) \sum_{i=1}^{2} \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{2} \partial_x v(x)\ (a_i - x)\ \varphi_i(x) + \\ & + \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\ \partial_x^2 v(\xi_i)\ (a_i - x)^2\ \varphi_i(x) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Wir zeigen später:

$$\sum_{i=1}^{2} \varphi_i(x) = 1, \quad \sum_{i=1}^{2} \partial_x v(x)\ (a_i - x)\ \varphi_i(x) = 0.$$

Was bleibt zunächst?

$$|I_h v(x) - v(x)| = \Big| \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\ \partial_x^2 v(\xi_i)\ (a_i - x)^2\ \varphi_i(x) \Big|$$

Wegen $\varphi_i(x) \leq 1$ und $(a_i - x) \leq h_T$ gilt:

$$\Big| I_h v(x) - v(x) \Big| \leq \max_{\xi \in T} |\partial_x^2 v(\xi)| \cdot h_T^2$$

Bleibt zu zeigen: $\sum\limits_{i=1}^{2} \varphi_i(x) = 1$:
Betrachte für $v(x) = 1$

$$\Rightarrow\ \partial_x v(x) = \partial_x^2 v(x) = 0$$

$I_h v = 1$. Einsetzen in (2.7):

$$I_h v = 1 = 1 \cdot \sum_{i=1}^{2} \varphi_i(x) \tag{$\square$}$$

Bleibt zu zeigen: $\sum_{i=1}^{2} \partial_x v(x)(a_i - x)\varphi_i(x) = 0$.

Sei v gegeben. Setze für festes x: $d = \partial_x v(x)$.
Ansatz:

$$\begin{aligned} w(x) &= d \cdot x \\ I_h w &= w \\ \partial_x w &= d \\ \partial_x^2 w &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen in (2.7):

$$w = w \cdot 1 + \sum_{i=1}^{2} d \cdot (a_i - x)\ \varphi_i(x) + 0$$

(□)

Zu zeigen (2.4):

$$\|\partial_x(v - I_h v)\|_{L_\infty(T)} \leq c h_T\ \|\partial_x^2 v\|_{L_\infty(T)}$$

Betrachte:

$$\partial_x I_h v(x) = \sum_{i=1}^{2} v(a_i)\ \partial_x \varphi(x)$$

Einsetzen der Taylor-Entwicklung für $v(a_i)$:

$$\begin{aligned} \partial_x I_h v(x) &= v(x) \sum_{i=1}^{2} \partial_x \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{2} \partial_x v(x)\ (a_i - x)\ \partial_x \varphi_i(x) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\ \partial_x^2 v(\xi_i)\ (a_i - x)^2\ \partial_x \varphi_i(x) \end{aligned}$$

Nun gilt: $\partial_x \varphi_1 = -\frac{1}{h_T},\ \partial_x \varphi_2 = \frac{1}{h_T}$
Damit

$$\sum_{i=1}^{2} \partial_x \varphi_i(x) = 0$$

Weiterhin:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \partial_x v(x)\ (a_i - x)\ \partial_x \varphi_i(x) &= \partial_x v(x)\ (a_1 - x)\ \left(-\frac{1}{h_T}\right) + \\ &\quad + \partial_x v(x)\ (a_2 - x)\ \frac{1}{h_T} \\ &= \partial_x v(x) \frac{(a_2 - a_1)}{h_T} \\ &= \partial_x v(x) \end{aligned}$$

Es bleibt also:

$$\begin{aligned} |\partial_x I_h v - \partial_x v(x)| &= \Big| \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}\, \partial_x^2 v(\xi_i)\, (a_i - x)^2\, \partial_x \varphi_i(x) \Big| \\ &\leq \max_{\xi \in T} |\partial_x^2 v(\xi)|\, h_T^2\, \frac{1}{h_T} \end{aligned}$$

□

2.4.3 Energiefehler-Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\partial_x u - \partial_x I_h u\|_I^2 &= \sum_T \int_T (\partial_x u - \partial_x I_h u)^2\, dx \\ &\leq \sum_T \int_T h_T^2\, \|\partial_x^2 u(x)\|_{L_\infty(T)}^2\, dx \\ &\leq \sum_T h_T^2\, \|\partial_x^2 u(x)\|_{L_\infty(T)}^2 \int_I 1\, dx \\ &\leq h_{max}^2\, \|\partial_x^2 u(x)\|_{L_\infty(I)}^2\, \mu(I) \end{aligned}$$

mit $\mu(I) = \int_I 1\, dx$. D.h es gilt:

$$\|\partial_x u - \partial_x I_h u\|_I \leq c h_{max}\, \|\partial_x^2 u(x)\|_{L_\infty(I)}$$

Wir hatten:

$$\|\partial_x u - \partial_x u_h\| \leq \|\partial_x u - \partial_x I_h u\| \leq c h_{max}\, \|\partial_x^2 u(x)\|_{L_\infty(I)}$$

Satz 2.6 *(Interpolationsfehler auf I.)*
Auf $I \subset \mathbb{R}$ gilt bei gegebener Zerlegung in $T \subset I$ mit maximaler Grösse h:

$$\partial_x^i (v - I_h v)\| \leq c h^{2-i}\, \|\partial_x^2 v\|_{L_\infty(I)}, \qquad i = 0, 1$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|\partial_x^i (v - I_h v)\|^2 &= \sum_T \int_T (\partial_x^i (v - I_h v))^2\, dx \\ &\leq \sum_T \int_T c h_T^{2(2-i)}\, \|\partial_x^2 v\|_{\infty(T)}^2\, dx \\ &\leq \sum_T c h_T^{2(2-i)}\, \|\partial_x^2 v\|_{L_\infty(T)} \int_T 1\, dx \\ &\leq c h^{2(2-i)}\, \|\partial_x^2 v\|_{L_\infty(I)}^2\, \mu(I) \end{aligned}$$

□

Satz 2.7 *(Energiefehler)*
Auf $I \subset \mathbb{R}$ gilt bei gegebener Zerlegung in Teilintervalle T mit maximaler Grösse h:

$$\|\partial_x(u - u_h)\| \leq ch \, \|\partial_x^2 u\|_{L_\infty(I)}$$

Beweis: Beachte:

$$\begin{aligned} \|\partial_x(u - u_h)\| &\leq \inf_{\varphi \in V_h} \|\partial_x(u - \varphi)\| \\ &\leq \|\partial_x(u - I_h u)\| \\ &\leq ch \, \|\partial_x^2 u\|_{L_\infty(I)} \end{aligned}$$

□

2.5 Variationsungleichungen

2.5.1 Minimumsuche 1D

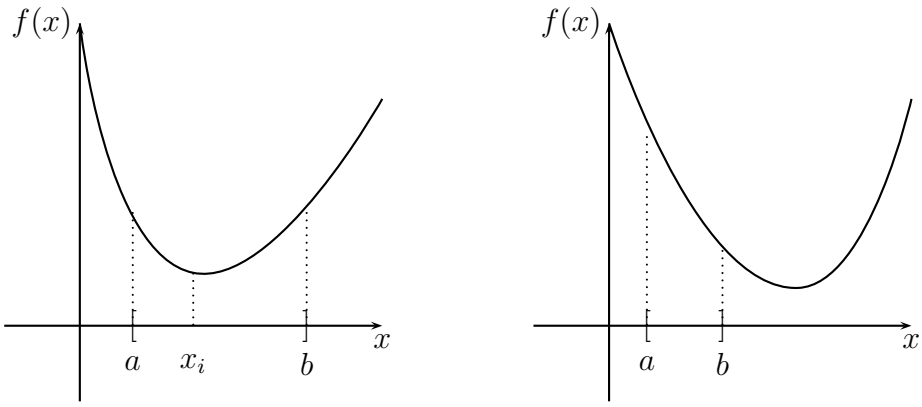


Abbildung 2.3: Fallunterscheidung

Weitere Voraussetzung: f stetig differenzierbar.
Fallunterscheidung auch für Minima am Rand:

$$\begin{array}{rcl} f(a) \leq f(x) \ \forall x & \rightarrow & f'(a) \geq 0 \\ f(b) \leq f(x) \ \forall x & \rightarrow & f'(b) \leq 0 \\ f(x_i) \leq f(x) \ \forall x & \rightarrow & f'(x_i) = 0 \end{array}$$

Kompakte Darstellung der notwendigen Bedingung für eine Minimalstelle x_0:

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) \geq 0 \qquad \forall x$$

2.5.2 Minimierung auf konvexer Menge $K \subset \mathbb{R}^N$

Für $f : K \to \mathbb{R}$. Gesucht ist x_0:

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in K$$

Betrachte $F(\varepsilon) = f(x_0 + \varepsilon(x - x_0))$
Aus dem 1-dimensionalen Fall ist bekannt:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\varepsilon} F(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon && \geq\ 0 && \forall\, \varepsilon \geq 0 \\ \Rightarrow\ & \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot \varepsilon && \geq\ 0 && \forall\, \varepsilon \geq 0 \\ \Rightarrow\ & \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) && \geq\ 0 && \forall\, x \in K \end{aligned}$$

2.5.3 Minimierung auf $K \subset V$

$K = \{v \in V \mid v \geq g\}$

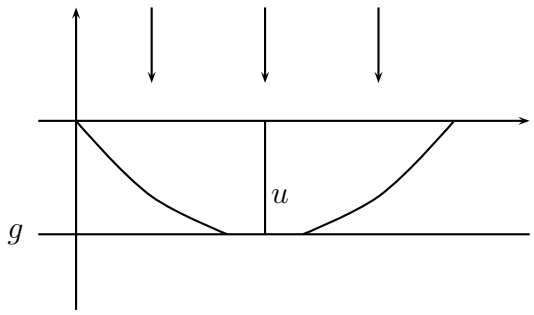


Abbildung 2.4: Skizze

Bemerkung 2.1 *K ist konvex: $v_1,\ v_2 \in K,\ \alpha \in (0, 1)$.*

$$\alpha v_1 + (1 - \alpha) v_2 \geq \alpha g + (1 - \alpha) g = g$$

Welches Funktional wird minimiert?

$$U(v) = \frac{1}{2} \int_I (\partial_x v)^2 \, dx - \int_I f v \, dx$$

Betrachte: $F(\varepsilon) = U(u + \varepsilon(v - u))$.
Aus dem 1-dimensionalen Fall:

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon \geq 0$$

Ausrechnen liefert:

$$\begin{aligned} \int_I \partial_x\Big(u+\varepsilon(v-u)\Big)\ \partial_x(v-u)\ dx - \int_I f(v-u)\ dx|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon &\geq 0 \\ \Rightarrow \qquad \left(\int_I \partial_x u\ \partial_x(v-u)\ dx - \int_I f(v-u)\ dx\right)\cdot\varepsilon &\geq 0 \quad \forall\ \varepsilon\geq 0 \end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$\Big(\partial_x u, \partial_x(v-u)\Big) \geq (f, v-u) \qquad \forall\ v\in K$$

Bemerkung 2.2 $\Big(\partial_x u, \partial_x(v-u)\Big) \geq (f, v-u)$ *ist der Prototyp einer elliptischen Variationsungleichung 1. Art.*

Die Diskretisierung mit linearen Finiten Elementen

$$a(u, \varphi-u) \geq (f, \varphi-u) \qquad \forall\varphi\in K \tag{2.8}$$

$$a(u_h, \varphi-u_h) \geq (f, \varphi-u_h) \qquad \forall\varphi\in K_h = V_h\cap K \tag{2.9}$$

Insbesondere gilt: $K_h\subset K$.

Satz 2.8 *(Energiefehler)*
Voraussetzungen wie in Satz 2.7. Dann gilt:

$$\|\partial_x(u-u_h)\| \leq O(h)$$

Beweis: Bezeichnung $u_i = I_h u$. Ausgangspunkt:

$$\begin{aligned} a(u-u_h, u-u_h) &= a(u-u_h, u-u_i+u_i-u_h) \\ &= a(u-u_h, u-u_i) + a(u-u_h, u_i-u_h) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Bei Variationsgleichungen war der 2. Term 0. Hier:

$$\begin{aligned} a(u-u_h, u_i-u_h) &= (f, u_i-u_h) - a(u_h, u_i-u_h) \quad \text{Term 1} \\ &\quad +a(u, u_i-u) - (f, u_i-u) \\ &\quad +a(u, u-u_h) - (f, u-u_h) \quad \text{Term 2} \end{aligned}$$

Term 1 ≤ 0 wegen Test mit $\varphi = u_i$ in (2.9).
Term 2 ≤ 0 wegen Test mit $\varphi = u_h$ in (2.8).

$$\begin{aligned} & a(u, u_h-u) && \geq (f, u_h-u) \\ \Leftrightarrow\ & a(u, u_h-u) - (f, u_h-u) && \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & a(u, u-u_h) - (f, u-u_h) && \leq 0 \end{aligned}$$

Nun weiter in (2.10):

$$\begin{aligned} \ldots &\leq \|\partial_x(u-u_h)\|\ \|\partial_x(u-u_i)\| + a(u, u_i-u) - (f, u_i-u) \\ &\leq \frac{1}{2}\ \|\partial_x(u-u_h)\|^2 + \frac{1}{2}\ \|\partial_x(u-u_i)\|^2 - \int_I (\partial_x^2 u)(u_i-u)\ dx - (f, u_i-u) \\ &\leq \frac{1}{2}\ \|\partial_x(u-u_h)\|^2 + \frac{1}{2}\ \|\partial_x(u-u_i)\|^2 + \|\partial_x^2 u\|\ \|u-u_i\| + \|f\|\ \|u-u_i\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\|\partial_x(u-u_h)\|^2 &\leq O(h^2) + (\|\partial_x^2 u\| + \|f\|)\ \|u-u_i\| \\ &\leq O(h^2) + O(h^2) \end{aligned}$$

□

2.6 A posteriori Fehlerschätzer

Bisher:

$$\|\partial_x(u-u_h)\| \leq ch\ \|\partial_x^2 u\|_{L_\infty(I)}$$

mit unbekannter Lösung u.

Ziel:

$$\|\partial_x(u-u_h)\| \leq \eta(u_h, f).$$

Satz 2.9 *Auf einem Intervall $T = (x_i, x_{i+1})$ gilt für $v \in V$ und $v(x_i) = 0$:*

$$\|v\|_{L^2(T)} \leq h\ \|\partial_x v\|_{L^2(T)}$$

Beweis: $y \in (x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} v(y) &= \int_{x_i}^{y} \partial_x v(x)\ dx \\ &\leq \left(\int_{x_i}^{y} 1^2\ dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{x_i}^{y} (\partial_x v)^2\ dx\right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{h}\ \|\partial_x v\|_{L^2(T)} \end{aligned}$$

Quadrieren liefert:

$$v^2(y) \leq h\ \|\partial_x v\|^2_{L^2(T)}$$

Intergrieren liefert:

$$\begin{aligned} \int_T v^2\ dx &\leq \int_T h\ \|\partial_x v\|^2\ dy \\ &\leq h^2\ \|\partial_x v\|^2 \end{aligned}$$

□

Satz 2.10 *(Stabilität der Interpolation)*
Auf $I \subset \mathbb{R}$ gilt bei gegebener Zerlegung in Zellen T:

$$\|\partial_x I_h v\|_{L^2(T)} \leq \|\partial_x v\|_{L^2(T)}$$

Beweis: $y \in (x_i, x_{i+1})$

$$\begin{aligned}
\partial_y I_h v(y) &= \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{h} \\
&= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \partial_x v(x)\ dx \\
&\leq \frac{1}{h} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1^2\ dx \right)^{1/2} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\partial_x v)^2\ dx \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{h}}\ \|\partial_x v\|_{L^2(T)}
\end{aligned}$$

Quadrieren und Integrieren liefert:

$$\int \partial_x I_h v(y)^2\ dy \leq \int_T \frac{1}{h}\ \|\partial_x v\|^2\ dy$$

$$\|\partial_x I_h v\|_{L^2(T)} \leq \|\partial_x v\|_{L^2(T)}$$

□

Satz 2.11 *(Energiefehlerschätzer)*
Auf dem Rechengebiet I mit Zerlegung in T gilt:

$$\|\partial_x (u - u_h)\|_{L^2(I)} \leq c \left(\sum_T h_T^2\ \rho_T^2 \right)^{1/2}$$

mit $\rho_T = 2\ \|f + \partial_x^2 u_h\|_{L^2(T)}$.

Beweis: Schreibweisen: $e = u - u_h,\ e_i = I_h e$

$$\begin{aligned}
\|\partial_x (u - u_h)\|_{L^2(I)}^2 &= (\partial_x u - \partial_x u_h, \partial_x e - \partial_x e_i) \\
&= (f, e - e_i) - (\partial_x u_h, \partial_x e - \partial_x e_i)_I \\
&= (f, e - e_i) - \sum_T (\partial_x u_h, \partial_x e - \partial_x e_i)_T \\
&= (f, e - e_i) - \sum_T \left((-\partial_x^2 u_h, e - e_i)_T + \underbrace{[\partial_x u_h \cdot (e - e_i)]_{x_i}^{x_{i+1}}}_{=0} \right) \\
&= \sum_T (f + \partial_x^2 u_h, e - e_i)_T
\end{aligned}$$

Betrachte:

$$\begin{aligned}
(f + \partial_x^2 u_h, e - e_i)_T &\leq \|f + \partial_x^2 u_h\|_{L^2(T)} \; \|e - e_i\|_{l^2(T)} \\
&\leq \|f + \partial_x^2 u_h\|_{L^2(T)} \; h_T \; \|\partial_x (e - e_i)\|_{L^2(T)} \\
&\leq \|f + \partial_x^2 u_h\|_{L^2(T)} \; h_T \; \Big(\|\partial_x e\|_{L^2(T)} + \underbrace{\|\partial_x e_i\|_{L^2(T)}}_{\leq \|\partial_x e\|_T} \Big) \\
&\leq \underbrace{\|f + \partial_x^2 u_h\|_{L^2(T)} \; 2}_{\rho_T} \; h_T \; \|\partial_x e\|_{L^2(T)}
\end{aligned}$$

Einsammeln:

$$\begin{aligned}
\|\partial_x (u - u_h)\|^2 &\leq \sum_T h_T \; \rho_T \; \|\partial_x e\|_{L^2(T)} \\
&\leq \Big(\sum_T h_T^2 \; \rho_T^2 \Big)^{1/2} \underbrace{\Big(\sum_T \|\partial_x e\|_{L^2(T)}^2 \Big)^{1/2}}_{\|\partial_x e\|_I}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; \|\partial_x (u - u_h)\| \leq \Big(\sum_T h_T^2 \; \rho_T^2 \Big)^{1/2} \qquad \square$$

2.7 Referenzelement, Gebietstransformation

Ziel: Alle Rechnungen auf einem Referenzelement (z.B. Einheitsintervall).

+ Basisfunktionen nur einmal ausrechnen.
+ (numerische) Integrationsformeln werden nur auf dem Referenzelement benötigt.

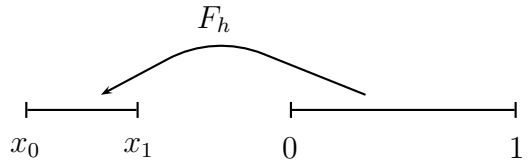


Abbildung 2.5: Gebietstransformation.

Vorbereitungen für die Substitutionsregel:

$F_h : T_1 \to T_h$
$\xi \mapsto x = x_0 + (1 - x_0)\xi$

$$\frac{d}{dx} : 1 = (x_1 - x_0)\frac{d\xi}{dx} \quad \Rightarrow \; dx = \underbrace{(x_1 - x_0)}_{=:J} d\xi$$

$F_h^{-1} : T_h \to T_1$

$$\xi = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \xi_x = \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{x_1 - x_0}$$

Eine Basisfunktion φ_i^h auf T_h wird wie folgt angesetzt:

$$\varphi_i^h(x) := \varphi_i^1(F_h^{-1}(x)) = \varphi_i^1(\xi)$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} u(x) &= v(F_h^{-1}(x)) \\ \partial_x u(x) &= \partial_\xi v(\xi)\ \partial_x F_h^{-1}(x) \\ &= \partial_\xi v(\xi)\ \xi_x \end{aligned}$$

Beispiel 2.1

$$\int_{T_h} f(x)\ \varphi_i^h(x)\ dx = \int_{T_1} f(F_h(\xi))\ \varphi_i^1(\xi)\ J\ d\xi$$

$$\int_{T_h} \partial_x\varphi_i^h(x)\ \partial_x\varphi_j^h(x)\ dx = \int_{T_1} (\partial_x\varphi_i^1)\ \xi_x\ (\partial_\xi\varphi_j^1)\ \xi_x\ J\ d\xi$$

Numerische Integration:
Allgemein:

$$\int_{T_1} g(\xi)\ d\xi \approx \sum_{k=1}^{q} w_k\ g(\xi_k)$$

mit Integrationsgewichten w_k und Stützstellen $\xi_k, \quad k = 1, \ldots, q$

Beispiel 2.2 *Für $q = 2$:* $\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1,\ w_1 = \frac{1}{2} = w_2$

Bei unserem Beispiel:

$$\int_{T_h} f(x)\ \varphi_i^h\ dx \approx \sum_{k=1}^{q} w_k\ f(F_h(\xi_k))\ \varphi_i^1(\xi_k)\ J$$

Entsprechend:

$$\int_{T_h} \partial_x\varphi_j^h(x)\ \partial_x\varphi_i^h(x)\ dx \approx \sum_{k=1}^{q} w_k \Big(\partial_\xi\varphi_j^1(\xi_k)\cdot\xi_x\Big)\cdot\Big(\partial_\xi\varphi_i^1(\xi_k)\cdot\xi_x\Big)J$$

2.8 Rechentechnische Betrachtungen

$$A_{ij} = \int_I \partial_x \varphi_j \; \partial_x \varphi_i \; dx = \sum_T \int_T \partial_x \varphi_j \; \partial_x \varphi_i \; dx$$

for $i = 1$ to n
  for $j = 1$ to n
    $A_{ij} = \int_I \partial_x \varphi_j \; \partial_x \varphi_i \; dx$

Praxis: Summation vertauschen

forall T
  for $i = 1$ to n
    for $j = 1$ to n
      $A_{ij} += \int_T \partial_x \varphi_j \; \partial_x \varphi_i \; dx$

Was passiert auf einer Zelle T?

for $k = 1$ to q
  Berechne Basisfunktionen auf T^1 in ξ_k
    for $i = 1$ to local_n
      for $j = 1$ to local_n
        $A_{ij} += w_k \; \partial_\xi \varphi_j^1 \; \xi_x \; \partial_\xi \varphi_i^1 \; \xi_x \; J$

3 FEM für elliptische Probleme

3.1 Poisson Problem

Rechengebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, beschränkt (meistens $(0,1)^2$).

Betrachte die Aufgabe:

$$\min \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla u)^2 \, dx - \int_\Omega f \cdot u \, dx \qquad (M)$$

mit $u = u(x),\ f(x) = f,\ x = (x_1, x_2) \in \Omega,\ \ f, u : \Omega \to \mathbb{R},\ \nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u)$

Suche die Lösung von (M) in $V = \{\varphi \mid \varphi$ ist stetig auf $\Omega,\ \partial_{x_1}\varphi,\ \partial_{x_2}\varphi$ sind stückweise stetig, beschränkt, $\varphi = 0$ auf $\partial\Omega\}$

Satz 3.1 *(Greensche Formel)*
Für hinreichend glatte Funktionen v, w gilt:

$$\int_\Omega \nabla v \nabla w \, dx = -\int_\Omega v \Delta w \, dx + \int_{\partial\Omega=\Gamma} v \cdot \partial_n w \, d\Gamma$$

mit $\Delta = \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2},\ \partial_n w = \nabla w \cdot n$ und n bezeichne die nach aussen gerichtete normierte Normale von $\Gamma = \partial\Omega$

Beweis: Benutze den Divergenzsatz in 2D für vektorwertige Funktionen. □

Klassisches Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{auf} \quad \Omega \qquad (D) \\ u &= 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

Satz 3.2 *Analog zum 1D-Fall gilt:*
Für hinreichend glatte Lösung u gilt:

$$(D) \Rightarrow (M).$$

Beweis: Benutze die Greensche-Formel □

Betrachte die variationelle Formulierung

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi) \qquad \forall\ \varphi \in V \qquad (V)$$

mit $a(v, w) = (\nabla v, \nabla w),\ v, w \in V$ und $(v, w) := \int_\Omega vw \, dx \ \ v, w \in V.$

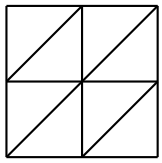
Analog zum 1D-Fall gilt:

Satz 3.3 $(V) \Leftrightarrow (M)$.

Beweis: Variationsrechnung. □

Finite Elemente

Triangulierung $\mathbb{T}_h$, Ω polygonal



Gitterparameter $h = \max_{T \in \mathbb{T}_h} diam(T)$ mit $diam(T)$ = längste Seite von T.
Diskreter Teilraum $V_h \subset V$:

$$V_h = \{\varphi \mid \varphi \in V,\ \varphi|_T \text{ ist linear für } T \in \mathbb{T}_h\}$$

Diskretisierung:

$$u_h \in V_h :\ a(u_h, \varphi) = (f, \varphi) \qquad \forall\ \varphi \in V_h$$

Satz 3.4 *(Galerkin-Eigenschaft)*
Es gilt

$$a(u - u_h, \varphi) = 0 \qquad \forall\ \varphi \in V_h$$

Beweis:

$$\begin{array}{rcll} a(u,\varphi) & = & (f,\varphi) & \forall\ \varphi \in V \\ -a(u_h,\varphi) & = & (f,\varphi) & \forall\ \varphi \in V_h \\ \hline a(u-u_h,\varphi) & = & 0 & \forall\ \varphi \in V_h \end{array}$$

□

Satz 3.5 *u, u_h Lösungen von (V) und (V_h), dann gilt:*

$$\|\nabla(u - u_h)\| \leq \|\nabla(u - I_h u)\|$$

mit $\|w\| = \sqrt{\int_\Omega w^2\ dx}$ *und $I_h w$ ist definiert durch:*
$w \in V :\ I_h w \in V_h$ *und* $I_h w(x_i) = w(x_i)$ *wobei x_i die Ecken aller $T \in \mathbb{T}_h$ durchläuft.*

Satz 3.6 *u, u_h Lösungen von (V), (V_h):*

$$\|\nabla(u - u_h)\| \leq ch$$

3.2 Natürliche und wesentliche Randbedingung

Beispiel 3.1 *Neumann-Problem*

Klassisch

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \quad auf\ \Omega \qquad (D) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad auf\ \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

$g := g(x_1, x_2),\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definition 3.1 $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ *heisst Neumann-Bedingung.*

$u = u_0$ *heisst Dirichlet-Bedingung.*

Variationelle Formulierung

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi) + \int_\Gamma g\varphi \, d\Gamma \qquad \forall\ \varphi \in V \quad (V)$$

$V = \{\varphi \mid \varphi$ ist stetig, $\partial_{x_i}\varphi$ stückweise stetig und beschränkt$\}$

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega u\varphi \, dx$$

$$(f, \varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx$$

Minimum-Problem

$$u \in V : \ \min_{\varphi \in V} \frac{1}{2}\, a(\varphi, \varphi) - (f, \varphi) - \int_\Gamma g\varphi \, d\Gamma \quad (M)$$

Satz 3.7 $(D) \Rightarrow (V)$.

Beweis:

1. $-\Delta u + u = f$
2. $(-\Delta u, \varphi) + (u, \varphi) = (f, \varphi) \qquad \forall\ \varphi \in V$
3. Mit der Greenschen Formel:
   $(f, \varphi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\varphi \, d\Gamma + \int_\Omega u\varphi \, dx$

4. Benutze die Randbedingung $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx + \int_\Omega u\varphi \, dx = (f, \varphi) + \int_\Gamma g\varphi \, d\Gamma \qquad \square$$

Satz 3.8 *Lösung u von (V) sei hinreichend glatt. Dann gilt $(V) \Rightarrow (D)$.*

Beweis: Greensche Formel:

$$(f, \varphi) + \int_\Gamma g\varphi \, d\Gamma = a(u, \varphi) = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \, \varphi \, d\Gamma + \int_\Omega (-\Delta u + u) \, \varphi \, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_\Omega (-\Delta u + u - f) \, \varphi \, dx + \int_\Gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial n} - g\Big)\varphi \, d\Gamma = 0 \qquad \forall \, \varphi \in V \qquad (3.1)$$

Insbesondere gilt (3.1) für $\bar{\varphi} \in V$ mit der zusätzlichen Bedingung $\bar{\varphi} = 0$ auf Γ. Also gilt:

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f) \, \bar{\varphi} \, dx = 0$$

d.h. $-\Delta u + u - f = 0$ auf Ω. Somit reduziert sich (3.1) zu:

$$\int_\Gamma \Big(\frac{\partial u}{\partial n} - g\Big)\varphi \, d\Gamma = 0 \qquad \forall \, \varphi \in V$$

Standardvariationsargument: $\rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ $\qquad \square$

Bemerkung 3.1 *Die Randbedingung $\dfrac{\partial u}{\partial n} = g$ taucht in der variationellen Formulierung (V) nicht explizit auf. Sie heisst daher auch* ***natürliche Randbedingung****. Im Gegensatz dazu muss die Bedingung $u = u_0$ explizit bei der Formulierung berücksichtigt werden. Sie heisst auch* ***wesentliche Randbedingung****.*

3.3 Sobolev-Räume

Bezeichnungen:

Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, offen, stückweise glatter Rand.
$L_2(\Omega)$: Menge aller Funktionen, deren Quadrat lebesgueintegrierbar ist.
Skalarprodukt: $(v, w)_0 := (v, w)_{L_2} = \int_\Omega v(x)w(x) \, dx$

$L_2(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit Norm $\|v\|_0 = \sqrt{(v, v)_0}$.

Definition 3.2 *(Schwache Ableitung)*
$u \in L_2(\Omega)$ besitzt in $L_2(\Omega)$ die schwache Ableitung $v = \partial^\alpha u$, falls $v \in L_2(\Omega)$ und $(\varphi, v) = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha \varphi, u)_0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.
Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha| := \sum \alpha_i$
$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$

Beispiel 3.2 *In $\mathbb{R}^2$:* $\alpha = (1,1)$*:* $\partial^\alpha u = \partial_{x_1} \partial_{x_2} u$

$(\varphi, \partial_{x_i} u) = -(\partial_{x_i} \varphi, u)$
$\varphi \in C_0^\infty$: $\varphi \in C^\infty$ mit *supp* $\varphi = \{x \in \Omega \mid \varphi(x_i) \neq 0\}$ ist kompakt in Ω enthalten.

Definition 3.3 *(Sobolev Räume)*
Sei $m \in \mathbb{N}_0$.
$H^m(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) \mid u$ *besitzt schwache Ableitungen $\partial^\alpha u$ für alle $|\alpha| \leq m\}$*
In $H^m(\Omega)$ wird durch

$$(u, v)_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0$$

ein Skalarprodukt definiert. Die zugehörige Norm ist

$$\|u\|_m = \sqrt{(u,u)_m} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)}}.$$

Man betrachtet auch:

$$|u|_m = \sqrt{\sum_{\alpha = m} \|\partial^\alpha u\|_0^2}$$

Bemerkung 3.2 *Mit $\|.\|_m$ ist $H^m(\Omega)$ vollständig.*

Satz 3.9 *Sei $m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ dicht in $H^m(\Omega)$.*

Definition 3.4 *(Verallgemeinerung von Nullrandbedingungen)*
Die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der Sobolev-Norm $\|.\|_m$ wird mit $H_0^m(\Omega)$ bezeichnet.

Beispiel 3.3

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{auf } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

Geeignete Wahl von V: $V = H_0^1(\Omega)$

Satz 3.10 *(Poincaré-Ungleichung)*
Sei Ω in einem n-dimensionalen Würfel der Kantenlänge s enthalten, dann:

$$\|v\|_0 \leq s|v|_1 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Beweis: Übertragung der Idee aus Aufgabe 3.1

$$\|\partial^1 v\|_0^2 \leq \|v\|_0^2 + \|\partial^1 v\|0^2 \leq s^2 \|\partial^1 v\|_0^2 + \|\partial^1 v\|_0^2$$

□

3.4 Abstrakte Formulierung

Abstrakter Rahmen:

V ein Hilbertraum.
$(.,.)_V$ das zugehörige Skalarprodukt
$\|.\|_V = \sqrt{(.,.)_V}$ die zugehörige Norm.
$a(.,.)$ eine Bilinearform auf $V \times V$.
$L(.)$ eine Linearform auf V.

Variationelle Formulierung

$$u \in V: \quad a(u,\varphi) = L(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in V \quad (V) \tag{3.2}$$

Voraussetzungen:

V.i) $a(.,.)$ ist symmetrisch.

V.ii) $a(.,.)$ ist stetig:

$$|a(v,w)| \leq c\|v\|_V \|w\|_V \qquad \forall\, v,w \in V,\ c > 0$$

V.iii) $a(.,.)$ ist V-elliptisch:

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \qquad \forall\, v \in V,\ \alpha > 0$$

V.iv) $L(.)$ ist stetig:

$$|L(v)| \leq \Lambda \|v\|_V \qquad \forall\, v \in V,\ \Lambda > 0$$

Satz 3.11 *(Existenzsatz)*
Angenommen, es gelten die Bedingungen V.i)-V.iv):
$\exists!$ Lösung $u \in V$ von (V) mit der Stabilitätsabschätzung

$$\|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}.$$

Beweis:

1. **Eindeutigkeit**

   Annahme $\exists\ u_1,\ u_2 \in V,\ u_1, u_2$ lösen (V).

$$\begin{array}{rcll} a(u_1,\varphi) & = & L(\varphi) & \forall\, \varphi \in V \\ -a(u_2,\varphi) & = & L(\varphi) & \forall\, \varphi \in V \\ \hline a(u_1-u_2,\varphi) & = & 0 & \forall\, \varphi \in V \end{array}$$

Wähle $\varphi = u_1 - u_2$:

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$$

Benutze V.iii):

$$\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$$

2. **Existenz**

Idee: Reduziere (V) auf ein Fixpunktproblem

Rieszscher Darstellungssatz (für Hilberträume)

$\exists\ A \in \mathcal{L}(V, V)$ =: Lineare Abbildungen, stetig, von V nach V und ein $l \in V$, so dass

$$a(u, v) = (Au, v)_V \qquad \forall\ u, v \in V$$

und

$$L(v) = (l, v)_V \qquad \forall\ v \in V$$

Betrachte (V):

$\forall\ \varphi \in V$ gilt:

$$\begin{array}{rrcll} & a(u,\varphi) - L(\varphi) & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & (Au - l, \varphi)_V & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & (-\rho(Au - l), \varphi)_V & = & 0 & \forall\ \rho > 0 \\ \Leftrightarrow & (u - \rho(Au - l) - u, \varphi)_V & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & u & = & -\rho(Au - l) & \forall\ \rho > 0 \end{array}$$

Betrachte $W_\rho : V \to V$ mit $W_\rho(v) = v - \rho(Av - l)$.

Abschätzung von $\|W_\rho(v_1) - W_\rho(v_2)\|_V^2$:

$$\begin{aligned} \|W_\rho(v_1) - W_\rho(v_2)\|_V^2 &= \|v_1 - \rho(Av_1 - l) - v_2 + \rho(Av_2 - l)\|_V^2 \\ &= \Big(v_1 - \rho Av_1 - (v_2 - \rho Av_2), v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - Av_2)\Big)_V \\ &= \Big(v_1 - v_2, v_1 - v_2\Big)_V - 2\rho\Big(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2\Big)_V \\ &\quad + \rho^2\Big(A(v_1 - v_2), A(v_1 - v_2)\Big)_V \\ &= \|v_1 - v_2\|_V^2 - 2\rho\ a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) + \rho^2 \|A(v_1 - v_2)\|_V^2 \end{aligned}$$

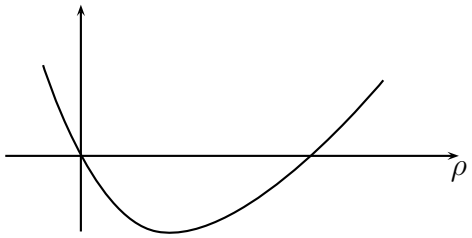
Benutze V-elliptisch:

$$\begin{aligned} \ldots &\leq \|v_1 - v_2\|_V^2 - 2\rho\ \alpha\ \|v_1 - v_2\|_V^2 + \rho^2 \|A\|_V^2\ \|v_1 - v_2\|_V^2 \\ &= (1 - 2\rho\ \alpha + \rho^2 \|A\|^2)\ \|v_1 - v_2\|_V^2 \end{aligned}$$

Kurvendiskussion für $(1 - 2\rho\ \alpha + \rho^2 \|A\|^2)$:

Bedingung dafür, dass W_ρ eine Kontraktionsabbildung ist:

$1 - 2\rho\ \alpha + \rho^2 \|A\|^2 < 1$, d.h. $p(\rho) = -\rho(2\alpha - \|A\|^2 \rho) < 0$



$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \rho > 0 \text{ und } \rho < \frac{2\alpha}{\|A\|^2} \\ &\Rightarrow \quad p(\rho) < 0 \\ &\Rightarrow \quad \text{Kontraktionsbedingung} \end{aligned}$$

Also: Mit dieser Wahl ist $W_\rho(v) = v - \rho(Av - l)$ eine strikte Kontraktionsabbildung

$\rightarrow$ Es gibt einen Fixpunkt.

$\rightarrow$ Es gibt eine Lösung von (V).

3. **Stabilitätsabschätzung**

   Wähle $\varphi = u$ in (V) und benutze V-ellitisch (V.iii)) und die Stetigkeit von L (V.iv)):

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u,u) = L(u) \leq \Lambda\|u\|_V$$

$$\Leftrightarrow \quad \|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$$

□

Abstraktes Minimierungsproblem

Finde $u \in V$, so dass

$$F(u) \leq F(\varphi) \qquad \forall\, \varphi \in V \qquad (M)$$

gilt, mit $F(\varphi) = \frac{1}{2}\, a(\varphi,\varphi) - L(\varphi)$.

Satz 3.12 $(V) \Leftrightarrow (M)$.

3.5 Diskretisierung

$$\begin{array}{lrcll} u \in V: & a(u,\varphi) & = & L(\varphi) & \forall\, \varphi \in V \\ u_h \in V_h: & a(u_h,\varphi) & = & L(\varphi) & \forall\, \varphi \in V_h \subset V \end{array}$$

$V_h =< \varphi_1, \ldots, \varphi_n >$

$$\varphi \in V_h : \varphi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \ \varphi_i, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$$
$$u_h \in V_h : u_h = \sum_{j=1}^{N} x_j \ \varphi_j, \qquad x_j \in \mathbb{R}$$

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \qquad i = 1, \ldots, N$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_i) x_j = L(\varphi_i), \qquad i = 1, \ldots, N$$

$\rightarrow$ Matrixform $Ax = b, \ A \in \mathbb{R}^{N \times N}, \ x, b \in \mathbb{R}^N$

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad b_i = L(\varphi_i)$$

Satz 3.13 *Unter den Voraussetzungen V.i),... V.iv) ist A symmetrisch und positiv definit.*

Satz 3.14 *Es gelte V.i),..., V.iv), dann gilt:*

$$\|u_h\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$$

Satz 3.15 *Für den Diskretisierungsfehler gilt:*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{c}{\alpha} \|u - \varphi\| \qquad \forall \ \varphi \in V_h$$

3.6 Variationsungleichungen

Mit obigen Bezeichnungen betrachte das Problem

$$a(u, \varphi - u) \geq L(\varphi - u) \qquad \forall \ \varphi \in K \subset V$$

K ist abgeschlossen und konvex. Man spricht von einer elliptischen Variationsungleichung 1. Art.

Lemma 3.1 *Sei $K \subset V$ abgeschlossen und konvex. Dann gilt:*

$$\forall \ x \in V \ \exists! \ y \in K, \ \textit{so dass} \ \|x - y\| = \inf_{\varphi \in K} \|x - \varphi\|$$

Der Punkt y heisst Projektion von x auf K : $y = P_K(x)$.

Beweis:

1. "Es gibt ein y"

   Sei φ_k eine Minimalfolge, d.h.

   $$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - x\| = d = \inf_{\varphi\in K} \|\varphi - x\|$$

   Durch Ausmultiplizieren verifiziert man

   $$\|\varphi_k - \varphi_l\|^2 = 2\|x - \varphi_k\|^2 + 2\|x - \varphi_l\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_l)\right\|^2.$$

   Da K konvex: $\frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_l) \in K$ ist $d^2 \leq \left\|x - \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_l)\right\|^2$.

   Zusammen:

   $$\|\varphi_k - \varphi_l\|^2 \leq 2\underbrace{\|x - \varphi_k\|^2}_{\to d^2} + 2\underbrace{\|x - \varphi_l\|^2}_{\to d^2} - 4d^2$$

   Und damit gilt:

   $$\lim_{k,l\to\infty} \|\varphi_k - \varphi_l\| = 0$$

   Da V vollständig ist und K abgeschlossen

   $$\exists\ y \in K \text{ mit } \lim_{k\to\infty} \varphi_k = y.$$

   Wegen der Stetigkeit der Norm gilt:

   $$\|x - y\| = \lim_{k\to\infty} \|x - \varphi_k\| = d$$

2. "Eindeutigkeit von y"

   Seien $y_1, y_2 \in K$ mit

   $$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \inf_{\varphi\in K} \|x - \varphi\|.$$

   Analog zu 1.:

   $$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &\leq 2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_2\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right\|^2 \\ &\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0 \end{aligned}$$

   $\to \|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$ □

Satz 3.16 *Sei $K \subset V$ abgeschlossen und konvex, dann gilt:*
$y = P_K(x)$ genau dann, wenn gilt:

$$y \in K:\ (y - x, \varphi - y) \geq 0 \qquad \forall\ \varphi \in K$$

Beweis:

"⇒" $x \in V$ und $y = P_K(x) \in K$

K ist konvex $\Rightarrow$ $(1-t)y + t\varphi = y + t(\varphi - y) \in K, \quad 0 \le t \le 1$

Betrachte

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \|x - y - t\,(\varphi - y)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 - 2t\,(x-y, \varphi - y) + t^2\,\|\varphi - y\|^2 \end{aligned}$$

$\Phi(t)$ nimmt bei $t = 0$ das Minimum an.

$$\begin{array}{lrcl} \Rightarrow & \Phi'(0) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & -2(x-y, \varphi - y) & \ge & 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y, \varphi - y) & \le & 0 \\ \Leftrightarrow & (y-x, \varphi - y) & \ge & 0 \end{array}$$

"⇐" Sei $\varphi \in K$ beliebig, aber fest.

$$\begin{array}{rrcll} & 0 & \le & (y-x, \varphi - y) & \\ & & = & (y-x, (\varphi - x) + (x-y)) & \\ & & = & (y-x, x-y) + (y-x, \varphi - x) & \\ & & = & -\|x-y\|^2 + (y-x, \varphi - x) & \\ \Leftrightarrow & \|x-y\|^2 & \le & (y-x, \varphi - x) & \\ & & \le & \|y-x\|\,\|\varphi - x\| & \\ \Leftrightarrow & \|x-y\| & \le & \|\varphi - x\| & \forall\ \varphi \in K \end{array}$$

□

Korollar 3.1 *Sei $K \subset V$ abgeschlossen und konvex. Dann ist P_K nicht-expansiv, d.h. es gilt:*

$$\|P_K(x) - P_K(x')\| \le \|x - x'\| \qquad \forall\ x, x' \in V$$

Beweis:
Gegeben seien $x, x' \in V$, $y = P_K(x)$, $y' = P_K(x')$.

$$\begin{array}{lrcll} y \in K: & (y, \varphi - y) & \ge & (x, \varphi - y) & \forall\ \varphi \in K \\ y' \in K: & (y', \varphi - y') & \ge & (x', \varphi - y') & \forall\ \varphi \in K \end{array}$$

1. Ungleichung: $\varphi = y'$
2. Ungleichung: $\varphi = y$
Addiere beide Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \|y - y'\|^2 &= (y - y', y - y') \\ &\le (x - x', y - y') \\ &\le \|x - x'\|\,\|y - y'\| \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \|y - y'\| \le \|x - x'\|$ □

Satz 3.17 *Das Problem* $u \in K$

$$a(u, \varphi - u) \geq L(\varphi - u) \qquad \forall\ \varphi \in K$$

hat eine eindeutige Lösung in V*.*

Beweis:

1. Eindeutigkeit:

$$\begin{aligned} a(u_1, \varphi - u_1) &\geq L(\varphi - u_1) \qquad \forall\ \varphi \in K,\ u_1 \in K \\ a(u_2, \varphi - u_2) &\geq L(\varphi - u_2) \qquad \forall\ \varphi \in K,\ u_2 \in K \end{aligned}$$

   Testen mit $\varphi = u_2$ bzw. $\varphi = u_1$ und Addition:

$$\alpha \|u_1 - u_2\|^2 \leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$$

   $\Rightarrow\ \|u_1 - u_2\| \leq 0$

2. Existenz:

   Benutze Rieszschen Darstellungssatz

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (Au, v) && \forall\ u, v \in V \\ L(v) &= (l, v) && \forall\ v \in V \\ (Au, \varphi - u) &\geq (l, \varphi - u) && \forall\ \varphi \in K \\ \Big(-(Au - l), \varphi - u \Big) &\leq 0 && \forall\ \varphi \in K \\ \Big(\big(u - \rho(Au - l)\big) - u, \varphi - u \Big) &\leq 0 && \forall\ \varphi \in K \end{aligned}$$

   Dies ist äquivalent zu

$$u = P_K\Big(u - \rho(Au - l)\Big)$$

   Betrachte $W_\rho : V \to V$

$$W_\rho(v) = P_K\Big(v - \rho(Av - l)\Big)$$

   Seien $v_1, v_2 \in V$:

   $\|W_\rho(v_1) - W_\rho(v_2)\|^2 \leq \|v_2 - v_1\|^2 + \rho^2\, \|A(v_2 - v_1)\|^2 - 2\rho\alpha\, a(v_2 - v_1, v_2 - v_1)$

   Schliesslich:

$$\|W_\rho(v_1) - W_\rho(v_2)\|^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|^2)\ \|v_2 - v_1\|^2$$

   Polynomdivision liefert:

   W_ρ ist eine Kontraktion, falls $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{\|A\|^2}$ gilt.

   Kontraktion $\to$ Fixpunkt $\to$ Fixpunkt ist Lösung. $\square$

3.7 Lineare Funktionale

Bezeichnung: X, Y normierte $\mathbb{R}-$Vektorräume.

Wir untersuchen "lineare Operatoren".
$T : X \to Y$, d.h. lineare, stetige Abbildungen von $X \to Y$

Lemma 3.2 *Ist $T : X \to Y$ linear, so sind äquivalent:*

1. *T ist stetig.*
2. *T ist stetig in x_0 für ein $x_0 \in X$.*
3. $\sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty$.
4. $\exists\ c > 0$ *mit* $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \qquad \forall\ x \in X.$

Definition 3.5 $L(X,Y) := \{T : X \to Y \mid T$ *ist stetig und linear*$\}$ *"stetige (oder beschränkte) Operatoren".*

Operatornorm von T:
$\|T\|_{L(X,Y)} := \sup\limits_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y$
$\|T\|_{L(X,Y)}$ ist die kleinste Zahl mit $\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{L(X,Y)}\ \|x\|_X$.

Definition 3.6

1. $X' := L(X, \mathbb{R})$ *ist der "Dualraum" von X. Elemente von X' heissen "Lineare Funktionale".*
2. *Für $T \in L(X,Y)$ ist $N(T) := \{x \in X \mid Tx = 0\}$ der Nullraum von T.*

Bemerkung 3.3 *$N(T)$ ist ein abgeschlossener Unterraum.*

1. *Abgeschlossen:*

   Betrachte $x_k \to x$ für $k \to \infty$, $x_k \in N(T),\ x \in X$.

   $$\lim_{k\to\infty} T(x_k) = 0 = T(x)$$

   $\to T(x) = 0 \to x \in N(T)$

2. *Unterraum:*

   $x_1, x_2 \in N(T)$

   $$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) = 0 + 0 = 0$$

□

Satz 3.18 *(Rieszscher Darstellungssatz)*
X ein Hilbertraum. Betrachte: $J : X \to X',\ x \mapsto (.,x)_X$
Aussage: J ist ein linearer Isomorphismus

Beweis:

1. J ist linear.

   $J(x_1) = (.,x_1)_X,\ J(x_2) = (.,x_2)_X$

   $$J(x_1) + J(x_2) = (.,x_1)_X + (.,x_2)_X = (.,x_1+x_2) = J(x_1+x_2)$$

2. $J(x) \in X'$.

   $$|J(x)(y)| = (y,x)_X \leq \|x\|\ \|y\|$$
   $$\sup_{\|y\|\leq 1} |J(x)(y)| \leq \|x\| < \infty$$

   Also $\|J(x)\|_{X'} \leq \|x\|_X$.

3. J ist injektiv.

   Betrachte $\left|J(x)\frac{x}{\|x\|}\right| = \frac{(x,x)}{\|x\|} = \|x\|$.

   Also
   $$\|J(x)\|_{X'} \geq \|x\|$$
   d.h.
   $$x \neq 0 \ \Rightarrow\ J(x) \neq 0.$$
   Also: "Nur die Null geht auf die Null".

   Randbemerkung: Die Abbildung J ist eine Isometrie. Aus 1. und 3. folgt: $\|J(x)\|_X = \|x\|_X$

4. J ist surjektiv:

   Beweisstruktur: Konstuiere zu gegebenem $0 \neq x_0' \in X'$ ein $w \in X$ mit $x_0'(x) = (x,w)_X \ \ \forall\ x \in X$.

   P bezeichne die Projektion auf den abgeschlossenen Unterraum $N(x_0')$.

   Wähle $e \in X$ mit $x_0'(e) = 1$.

   Setze $x_0 = e - Pe$.

   Es gilt:
   $$x_0'(x_0) = x_0'(e) - x_0'(Pe) = 1 - 0 = 1$$
   Also inbesondere $x_0 \neq 0$.

   Wiederholung: Projektion: $(Px - x, \varphi - Px) \geq 0 \qquad \forall\ \varphi \in K$

Hier: $(\tilde{y} - Pe, x_0)_X = (\tilde{y} - Pe, e - Pe) \leq 0 \qquad \forall\ \tilde{y} \in N(x_0')$
$y, Pe \in N(x_0') \Rightarrow \tilde{y} = y + Pe,\ \tilde{y} = -y + Pe\ \in N(x_0')$.
Also

$$(y, x_0)_X \leq 0 \text{ und } (-y, x_0)_X \leq 0$$
$$\Rightarrow (y, x_0) = 0 \qquad \forall\ y \in N(x_0')$$

$\forall\ x \in X$ ist $x = x - x_0'(x)\ x_0 + x_0'(x_0)\ x_0$ wegen

$$x_0'\Big(x - x_0'(x)\ x_0\Big) = x_0'(x) - x_0'(x)\ \underbrace{x_0'(x_0)}_{=1} = 0$$

$$\begin{aligned}(x, x_0)_X &= \Big(\underbrace{x - x_0'(x)\ x_0}_{\in N(x_0')} + x_0'(x)\ x_0, x_0\Big) \\ &= \Big(x_0'(x)\ x_0, x_0\Big) \\ &= x_0'(x)\ \|x_0\|^2\end{aligned}$$

D.h.

$$\begin{aligned}x_0'(x) &= \left(x, \frac{x_0}{\|x_0\|^2}\right)_X \\ &= J\left(\frac{x_0}{\|x_0\|^2}\right)(x)\end{aligned}$$

□

$L(v) = (l, v),\ a(u, v) = (Au, v)\ a(v, w) \leq c\|v\|\|w\|$
$a(x, .)\ \rightarrow$ ist lineares beschränktes Funktional
Riesz: $a(x, .) = (\tilde{x}, .) = (Ax, .)$

3.8 Interpolation

Wiederholung:

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_V &\leq \frac{c}{\alpha}\|u - \varphi\|_V \qquad \forall\ \varphi \in V_h \\ &\leq \frac{c}{\alpha}\|u - I_h u\|_V\end{aligned}$$

Interpolation in 2D für lineare Funktionen.

Bezeichnungen:

$h_T = diam(T)$ (längste Seite).
$\rho_T =$ Inkreisradius.
$h = \max\limits_{T \in \mathbb{T}} h_T$.

Wir betrachten Familien von Triangulierungen $\mathbb{T}_h$, für die unabhängig von h gilt:

$$\frac{\rho_T}{h_T} \geq \beta > 0 \qquad \forall\, T \in \mathbb{T}_h$$

("Die Dreiecke dürfen nicht zu dünn werden".)

Seien $v_i,\ i = 1, \ldots, N$ die Knoten von $\mathbb{T}_h$.
Für $u \in C^0(\bar{\Omega})$ definiere

$$I_h u(v_i) = u(v_i) \quad i = 1, \ldots, N$$

und $I_h u$ sei stückweise linear.

Satz 3.19 *Sei $T \in \mathbb{T}_h$ ein Dreieck mit den Knoten $a_i,\ i = 1, 2, 3$.*
Sei $v \in C^0(T)$. Die Interpolierende $I_h v \in P_1(T)$ sei definiert durch

$$I_h v(a_i) = v(a_i),\ i = 1, 2, 3.$$

Dann gilt:

1. $\|v - I_h v\|_{L_\infty(T)} \leq 2(h_T)^2 \max\limits_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(T)}$.

2. $\max\limits_{|\alpha|=1} \|D^\alpha (v - I_h v)\|_{L_\infty(T)} \leq 6\, \dfrac{h_T^2}{\rho_T} \max\limits_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L_\infty(T)}$
   wobei gilt: $\|v\|_{L_\infty}(T) = \max\limits_{x \in T} |v(x)|$.

Beweis: Verläuft analog zu 1D-Interpolation mit längeren Taylorentwicklungen wegen 2D. □

Satz 3.20 *Unter den Voraussetzungen des vorherigen Satzes kann man zeigen:*

1. $\|v - I_h v\|_{L_2(T)} \leq c h_T^2\ |v|_{H^2(T)}$

2. $|v - I_h v|_{H^1(T)} \leq c\, \dfrac{h_T^2}{\rho_T}\ |v|_{H^2(T)}$

Satz 3.21 *Unter obigen Voraussetzungen gilt:*

1. $\|v - I_h v\|_{L_2(\Omega)} \leq c h^2\ |v|_{H^2(\Omega)}$

2. $|v - I_h v|_{H^1(\Omega)} \leq c \, \frac{h}{\beta} \, |v|_{H^2(\Omega)}$

Satz 3.22 *(Höhere Polynomansätze)*
$I_h v \in P_r(T)$ *mit* $r \geq 1$. *Es gilt:*

1. $\|v - I_h v\|_{L_2(\Omega)} \leq c h^{r+1} \, |v|_{H^{r+1}(\Omega)}$
2. $|v - I_h v|_{H^1(\Omega)} \leq c h^r \, |v|_{H^{r+1}(\Omega)}$

Satz 3.23 *(Fehlende Regularität)*
$1 \leq s \leq r + 1$

1. $\|v - I_h v\|_{L_2(\Omega)} \leq c h^s \, |v|_{H^s(\Omega)}$
2. $|v - I_h v|_{H^1(\Omega)} \leq c h^{s-1} \, |v|_{H^s(\Omega)}$

4 Minimierungsalgorithmen, iterative Methoden

$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv definit $x, b \in \mathbb{R}^n$.

Betrachte

$$f(x) = \frac{1}{2}\, x^T Ax - b^T x.$$

Minimalstelle $\bar{x}$ von $f(x)$ erfüllt $A\bar{x} - b = 0$.

4.1 Positiv definite Matrizen

Bemerkung 4.1 *Sei $\|.\|$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$, $A \in M(n,n) := \mathbb{C}^{n\times n}$.*
A sei regulär, dann definiert

$$\|x\|_A = \|Ax\|,\ x \in \mathbb{C}^n$$

ebenfalls eine Norm.

Definition 4.1 *Sei $(.,.)$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$. Dann heisst $A \in M(n,n)$ positiv definit, wenn $A = A^H$ und $(Ax,x) > 0\ \ \forall x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq 0$.*

Bemerkung 4.2 *$A \in M(n,n)$ mit $(Ax,x) > 0\ \forall x \in \mathbb{C}^n,\ x \neq 0 \Leftrightarrow\ A = A^H$ und alle Eigenwerte sind positiv.*
Es gibt die Darstellung $A = TDT^H$ mit T unitär, D diagonal.

Definition 4.2 *Sei $A^{1/2} := TD^{1/2}T^H$, dann heisst $\|x\|_A := \|A^{1/2}x\|_2$,*
$\|.\|_2 = \sqrt{(.,.)}$ die Energienorm.

Bemerkung 4.3 *Für das Skalarprodukt $(x,y)_A := (Ax,y),\ x,y \in \mathbb{C}^n$ gilt:*

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax,x)}$$

Bemerkung 4.4 *A postiv definit $\Leftrightarrow\ A^{-1}$ positiv definit.*

Definition 4.3 *Die Kondition von $A \in M(n,n)$, A regulär, ist definiert durch:*

$$cond(A) = \|A\|\ \|A^{-1}\|$$

Bemerkung 4.5 *Die zugrundeliegende Vektornorm sei $\|.\|_2$. Für $A \in M(n,n)$, A positiv definit, werde $cond(A)$ bestimmt in der zugeordneten Matrixnorm. Dann:*

$$cond(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

λ_{max} : grösster Eigenwert von A, λ_{min} : kleinster Eigenwert von A.

Lemma 4.1 *Sei A eine positiv definite Matrix mit Spektralkondition κ. Dann gilt für jeden Vektor $x \neq 0$:*

$$\frac{(x^T Ax)(x^T A^{-1}x)}{(x^T x)^2} \leq \kappa \tag{4.1}$$

Beweis: Anordnung der Eigenwerte: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Betrachte die Situation nach unitärer Transformation im Raum der Eigenvektoren.
Dann schreibt sich die linke Seite von (4.1):

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} x_i^2\right)}{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^2} \tag{4.2}$$

Substitution:

$$z_i = \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = 1.$$

Einsetzen in (4.2) liefert:

$$(4.2) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i\right)}_{\leq \lambda_n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} z_i\right)}_{\leq \lambda_1^{-1}} \leq \frac{\lambda_n}{\lambda_1} = \kappa \tag{4.3}$$

wegen $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_n z_i = \lambda_n$. Analog $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1} z_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_1} z_i = \frac{1}{\lambda_1}$ □

4.2 Abstiegsverfahren

Aufgabe: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Gesucht: $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$f(\tilde{x}) \leq f(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

Lemma 4.2 *Unter den obigen Voraussetzungen sei $d = -\nabla f(x) \neq 0$. Dann gilt: $f(x + td) < f(x)$ für hinreichend kleines $t > 0$.*

Beweis: Betrachte die Richtungsableitung

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} = \nabla f(x)^T \cdot d < 0 \text{ wegen } d = -\nabla f(x).$$

Also gilt

$$\frac{f(x + td) - f(x)}{t} < 0$$

für hinreichend kleines t.
$\Rightarrow \; f(x + td) - f(x) < 0$ wegen $t > 0$. □

Algorithmus 4.1 *Für $k = 0, 1, \ldots$*

1. *Berechne $d_k = -\nabla f(x_k)$.*
2. *Liniensuche: Man sucht für f das Minimum auf der Linie $\{x + td_k\}$ für $t > 0$.*

4.3 Gradientenverfahren

Spezielle Aufgabe:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x$$

A positiv definit.

Minimum falls

$$Ax - b = 0 \Leftrightarrow \; Ax = b.$$

Benutze Algorithmus 4.1. Hier speziell:

1. $d_k = b - Ax_k$
2. $t = \dfrac{d_k^T d_k}{d_k^T A d_k}$

Rechnung:

1. $\nabla f(x) = Ax - b$
2. Minimumsuche für quadratisches f:

$$
\begin{aligned}
& f(x_k + td_k) &&= \min \\
\Rightarrow \quad & \partial_t f(x_k + td_k) &&= 0 \\
\Rightarrow \quad & \nabla f(x_k + td_k) \cdot d_k &&= 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \Big(A(x_k + td_k) - b\Big) \cdot d_k &&= 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \Big(\underbrace{(Ax_k - b)}_{=-d_k} + tAd_k\Big) \cdot d_k &&= 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (-d_k + tAd_k) \cdot d_k &&= 0 \\
\Leftrightarrow \quad & t(Ad_k)d_k &&= d_k^T d_k \\
\Leftrightarrow \quad & t &&= \frac{d_k^T d_k}{d_k^T A d_k}
\end{aligned}
$$

□

Lemma 4.3 *Mit* $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ *gilt:*

$$f(x) - f(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|_A^2$$

wobei gilt: $A\tilde{x} = b$

Beweis:

1. "Linke Seite"

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(\tilde{x}) &= \frac{1}{2}\, x^T Ax - b^T x - \left(\frac{1}{2}\, \tilde{x}\, \underbrace{A\tilde{x}}_{=b} - b^T x\right) \\
&= \frac{1}{2}\, x^T Ax - b^T x + \frac{1}{2}\, b^T \tilde{x}
\end{aligned}
$$

2. "Rechte Seite"

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\, \|x - \tilde{x}\|_A^2 &= \frac{1}{2}\, (x - \tilde{x})^T\, A(x - \tilde{x}) \\
&= \frac{1}{2}\, (x - \tilde{x})^T\, (Ax - b) \\
&= \frac{1}{2}\, x^T A\, x - \frac{1}{2}\, \underbrace{\tilde{x}^T A}_{=b^T}\, x - \frac{1}{2}\, x^T b + \frac{1}{2}\, \tilde{x}^T b
\end{aligned}
$$

Vergleiche 1. und 2. → "1.=2." □

Lemma 4.4 *Sei* $\tilde{x}$ *Lösung von* $Ax = b$*, dann gilt:*

$$\frac{\|x_k - \tilde{x}\|_A^2}{d_k^T A^{-1} d_k} = 1$$

Beweis: Es gilt:

$$d_k = b - Ax_k = A(\tilde{x} - x_k) \quad \Leftrightarrow \quad -A^{-1}d_k = x_k - \tilde{x}$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} \|x_k - \tilde{x}\|_A^2 &= (x_k - \tilde{x})^T \; A \; (x_k - \tilde{x}) \\ &= (d_k^T A^{-1}) \; A \; (A^{-1} d_k) \\ &= d_k^T A^{-1} d_k \end{aligned}$$

Nach Division folgt die Behauptung. □

Satz 4.1 *Sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, so dass $A\tilde{x} = b$.*
Für den Iterationsfehler nach $(k+1)$-Schritten des Gradientenverfahrens gilt:

$$\|x_{k+1} - \tilde{x}\|_A^2 \leq \|x_k - \tilde{x}\|_A^2 \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

mit $\kappa = cond(A)$

Beweis: Laut Algorithmus:

1. $d_k = b - Ax_k$
2. $t_k = \dfrac{d_k^T d_k}{d_k^T A d_k}$

Einsetzen in

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) &= f(x_k + t_k d_k) \\ &= \frac{1}{2} \; (x_k + t_k d_k)^T \; A \; (x_k + t_k d_k) - b^T (x_k + t_k d_k) \\ &= f(x_k) + t_k \; d_k^T \; \underbrace{(Ax_k - b)}_{=-d_k} + \frac{1}{2} \; t_k^2 \; d_k^T A d_k \\ &= f(x_k) - \frac{1}{2} \; \frac{(d_k^T d_k)^2}{d_k^T A d_k}. \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \; f(x_{k+1}) - f(\tilde{x}) = f(x_k) - f(\tilde{x}) - \dfrac{1}{2} \; \dfrac{(d_k^T d_k)^2}{d_k^T A d_k}$

Benutze Lemma 4.3:

$$\frac{1}{2} \; \|x_{k+1} - \tilde{x}\|_A^2 = \frac{1}{2} \; \|x_k - \tilde{x}\|_A^2 - \frac{1}{2} \; \frac{(d_k^T d_k)^2}{d_k^T A d_k} \cdot 1$$

Benutze Lemma 4.4:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - \tilde{x}\|_A^1 &= \|x_k - \tilde{x}\|_A^2 - \frac{(d_k^T d_k)^2 \; \|x_k - \tilde{x}\|_A^1}{(d_k^T A d_k) \; (d_k^T A^{-1} d_k)} \\ &\leq \|x_k - \tilde{x}\|_A^2 \left(1 - \frac{(d_k^T d_k)^2}{(d_k^T A d_k) \; (d_k^T A^{-1} d_k)}\right) \end{aligned}$$

Benutze Lemma 4.1:

$$\|x_{k+1} - \tilde{x}\|_A^2 \leq \|x_k - \tilde{x}\|_A^2 \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

□

4.4 Projiziertes Gradientenverfahren

Aufgabe: Finde $u \in K \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$\min = \frac{1}{2} u^T A u - f^T u =: J(u)$$

$A \in M(n,n)$ positiv definit, $f \in \mathbb{R}^n$, $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(i) \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$

Algorithmus 4.2 *P_K bezeichne die Projektion auf K.*

1. *Initialisierung: Wähle $u_0 \in K$.*
2. *Iteration: for $k = 0, 1, \ldots$*

$$u_{k+1} = P_K\Big(u_k - \alpha_k J'(u_k)\Big), \qquad \alpha_k > 0$$

mit $J'(x) = Ax - f$.

Schritt 2. zerfällt wie folgt:

$$\begin{aligned} u_{k+1/2} &= u_k + \alpha_k(f - Au_k) \quad \textit{(Gradientenschritt)} \\ u_{k+1} &= P_K(u_{k+1/2}) \\ u_{k+1}(i) &= \max\Big(0, u_{k+1/2}(i)\Big) \end{aligned}$$

Satz 4.2 *$\exists\ \alpha, \beta > 0$, so dass mit $\alpha \leq \alpha_k \leq \beta$ der Algorithmus 4.2 gegen die Lösung u konvergiert.*

Beweis:

1. Wir zeigen: $u = P_K\Big(u - \alpha_k J'(u)\Big)$

   Aus Abschnitt 2.5 folgt:

$$(J'(u), \varphi - u) \geq 0 \qquad \forall\ \varphi \in K$$

   Mit $\alpha_k > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} & \Big(\alpha_k J'(u), \varphi - u\Big) && \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \Big(u - u + \alpha_k J'(u), \varphi - u\Big) && \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \Big(u - \big(u - \alpha_k J'(u)\big), \varphi - u\Big) && \geq 0 \qquad \forall\ \varphi \in K \\ \Leftrightarrow \quad & u && = P_K\Big(u - \alpha_k J'(u)\Big) \end{aligned}$$

2. Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - u\| &= \Big\| P_K\Big(u_k - \alpha_k J'(u_k)\Big) - P_K\Big(u - \alpha_k J'(u)\Big) \Big\| \\ &\leq \Big\| u_k - u - \alpha_k \Big(J'(u_k) - J'(u) \Big) \Big\| \end{aligned}$$

Quadrieren liefert:

$$\|u_{k+1} - u\|^2 \leq \|u_k - u\|^2 - 2\alpha_k \Big(u_k - u, J'(u_k) - J'(u) \Big) + \alpha_k^2 \, \|J'(u_k) - J'(u)\|^2$$

Nun gilt:

$$J'(u_k) - J'(u) = (Au_k - f) - (Au - f) = A(u_k - u)$$

Weiterhin ist A positiv definit: $(u_k - u)^T A(u_k - u) \geq \lambda_{min} \|u_k - u\|^2$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} \|u_{k+1} - u\|^2 &\leq \|u_k - u\|^2 - 2\alpha_k \, \lambda_{min} \, \|u_k - u\|^2 + \alpha_k^2 \, \|A\|^2 \, \|u_k - u\|^2 \\ &= \|u_k - u\|^2 \, (1 - 2\alpha_k \, \lambda_{min} + \alpha_k^2 \, \|A\|^2) \end{aligned}$$

Faktordiskussion $\Rightarrow \alpha_k > 0$ und $\alpha_k < \dfrac{2\lambda_{min}}{\|A\|^2}$ □

4.5 Konjugiertes Gradientenverfahren (cg)

Idee bisher: $x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i$,

$$f(x_{i+1}) = \min_{z \in span[d_i]} f(x_i + z) \text{ “eindimensionale Minimierung”}$$

Verbesserung:

$$f(x_{i+1}) = \min_{z \in span[d_{i-1}, g_i]} f(x_i + z)$$

$d_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ “Richtung der letzten Korrektur”
$g_i = Ax_i - b$

Definition 4.4 *Sei $A \in M(n,n)$ positiv definit.*
Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heissen konjugiert oder A-orthogonal falls

$$x^T A y = 0$$

ist.

Bemerkung 4.6 *$x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ paarweise konjugiert $\Rightarrow$ $x_1, \ldots, x_k$ sind linear unabhängig.*

Rechnung

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i &&= 0 \quad | \cdot (Ax_j)^T \; j = 1, \ldots, k \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_j^T A x_i &&= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_i \underbrace{x_j^T A x_j}_{>0} &&= 0 \;\Rightarrow\; \alpha_j = 0, \; j = 1, \ldots, k \end{aligned}$$

Also ist der Nullvektor nur trivial darstellbar. □

Lemma 4.5 *(Konjugierte Richtungen sind gut)*
Seien $d_0, \ldots, d_{n-1}$ konjugierte Richtungen. Weiterhin: $\tilde{x} = A^{-1}b$ (die Lösung). Dann gilt:

$$\tilde{x} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i d_i, \quad \alpha_i = \frac{d_i^T b}{d_i^T A d_i}$$

(Lösung ist direkt hinschreibbar.)

Beweis: Ansatz:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k d_k && | \cdot (Ad_i)^T, \; i = 0, \ldots, n-1 \\ \Leftrightarrow \quad d_i^T A \tilde{x} &= \sum_{k=0}^{n-1} d_i^T A \alpha_k d_k \\ &= \alpha_i d_i^T A d_i \\ \Leftrightarrow \quad \alpha_i &= \frac{d_i^T A \tilde{x}}{d_i^T A d_i} = \frac{d_i^T b}{d_i^T A d_i} \end{aligned}$$

□

Lemma 4.6 *(Hilfssatz über konjugierte Richtungen)*
Seien $d_0, \ldots d_{n-1}$ konjugierte Richtungen:
Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ liefert die durch

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i, \quad \alpha_i = \frac{-g_i^T d_i}{d_i^T A d_i}, \; g_i = Ax_i - b$$

für $i \geq 0$ erzeugte Folge nach (höchstens) n-Schritten die Lösung $x_n = A^{-1}b$.

Beweis: Betrachte $A(\tilde{x} - x_0) = (b - Ax_0)$ Benutze Lemma 4.5:

$$(\tilde{x} - x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i d_i, \quad \alpha_i = \frac{d_i^T \; (b - Ax_0)}{d_i^T A d_i}$$

Bleibt zu zeigen:

$$-\frac{g_i^T d_i}{d_i^T A d_i} = \frac{d_i^T \; (b - Ax_0)}{d_i^T A d_i}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{-d_i^T\ (Ax_0 - b)}{d_i^T A d_i} \\ &= \frac{-d_i^T\ (Ax_0 - Ax_i + Ax_i - b)}{d_i^T A d_i} \\ \Leftrightarrow\ \alpha_i &= \frac{-d_i^T\ (Ax_i - b)}{d_i^T A d_i} - \frac{d_i^T\ (Ax_0 - x_i)}{d_i^T A d_i} \end{aligned}$$

Laut Algorithmus:

$$x_i = x_0 + \sum_{j=0}^{j<i} \alpha_j d_j \quad | \cdot (Ad_i)^T$$

d_i ist konjugiert zu allen d_j:

$$(x_i - x_0) = \sum_{j=0}^{j<i} \alpha_j d_j$$

$$\Leftrightarrow d_i^T A(x_i - x_0) = \sum_{j=0}^{j<i} \alpha_j d_i^T A d_j = 0$$

Insgesamt also $\alpha_i = \dfrac{-d_i g_i}{d_i^T A d_i}$ □

Korollar 4.1 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.6 minimiert die k-te Iterierte x_k die Funktion f in $x_0 + V_k$ mit $V_k = span[d_0, \ldots, d_{k-1}]$. Insbesondere gilt: $d_i^T g_k = 0$ für $i < k$*

Beweis:

1. Es genügt $d_i^T g_k = 0,\ i < k$ zu zeigen

$$\begin{aligned} f(x_k) &= \min_{\alpha_i} f\Big(x_0 + \sum_{i=0}^{i<k} \alpha_i d_i\Big) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(x_k) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \nabla f(x_k)^T \cdot d_i &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad (Ax_k - b)^T \cdot d_i &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad g_k^T\ d_i &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} d_k^T g_{k+1} \\ &= d_k^T\ (Ax_k - b) \\ &= d_k^T \Big(A\Big(x_k - \frac{g_k^T d_k}{d_k^T A d_k}\ d_k \Big) - b \Big) \\ &= d_k^T\ (Ax_k - b) - \frac{d_k^T A d_k}{d_k^T A d_k}\ g_k^T\ d_k \\ &= d_k^T\ g_k - g_k^T\ d_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Induktion (zz $d_i^T\ g_k = 0,\ i < k$)

   IA: $k = 1$: $\quad d_0^T\ g_1 = 0$ erfüllt wegen 2.

   IV: $d_i^T\ g_{k-1} = 0,\ i < k-1$

   IS: Aufgrund des Algorithmus in Lemma 4.6:

$$\begin{aligned} x_k - x_{k-1} &= \alpha_{k-1}\ d_{k-1} && | \cdot A \\ A(x_k - x_{k-1}) &= \alpha_{k-1}\ A\ d_{k-1} \\ Ax_k - b - (Ax_{k-1} - b) &= \alpha_{k-1}\ A\ d_{k-1} \\ g_k - g_{k-1} &= \alpha_{k-1}\ A\ d_{k-1} && | \cdot d_i^T \end{aligned}$$

   Also gilt für $i < k-1$

$$d_i^T\ (g_k - g_{k-1}) = 0.$$

   Benutze Induktionsannahme $d_i^T\ g_{k-1} = 0$, $i < k-1$.

$$d_i\ g_k = 0 \quad \text{für } i < k-1$$

   Für $i = k-1$ benutze 2. und somit

$$d_i\ g_k = 0 \text{ für } i < k.$$

□

Algorithmus 4.3 *cg-Verfahren*

1. *Initialisierung:* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *als Startwert.*

   Setze $d_0 = -g_0 = b - Ax_0$.

2. *Iteration über* $k = 0, 1, \ldots$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{-g_k^T d_k}{d_k^T A d_k} \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k d_k \\ g_{k+1} &= g_k + \alpha_k A d_k \\ \beta_k &= \frac{g_{k+1}^T A d_k}{d_k^T A d_k} \\ d_{k+1} &= -g_{k+1} + \beta_k d_k \end{aligned}$$

Satz 4.3 *(Eigenschaften des cg-Verfahrens)*
Solange $g_{k+1} \neq 0$ gelten folgende Aussagen:

1. $d_{k-1} \neq 0$.
2. $V_k := span[g_0, Ag_0, A^2g_0, \ldots, A^{k-1}g_0]$ *"Krylov-Raum".*
3. $d_0, \ldots d_{k-1}$ *sind paarweise konjugiert.*
4. *Es ist* $f(x_k) = \min\limits_{z \in V_k} f(x_0 + z)$.

Beweis: Induktion:

IA: $k = 1 \surd$

IV: Satz 4.3 gelte für k.

IS: Zunächst $g_k = g_{k-1} + \alpha_{k-1} A d_{k-1}$.

Wegen $span[g_0, Ag_0, \ldots, A^{k-1}g_0] = span[d_0, \ldots, d_{k-1}]$ gibt es die Darstellung

$$d_{k-1} = \sum_{j=}^{k-1} \gamma_j A^j g_0.$$

Also

$$g_k = g_{k-1} + \alpha_{k-1} \sum_{j=1}^{k} \gamma_j A^j g_0$$

und damit $span[g_0, \ldots, g_k] \subset V_{k+1}$.

Nach Annahme: $d_0, \ldots, d_{k-1}$ konjugiert und wegen Optimalität von x_k:

$$d_i^T g_k = 0 \quad i < k \quad \text{(wegen Korollar 4.2)}$$

Falls $g_k \neq 0 \;\Rightarrow\; g_k$ linear unabhängig von $(d_0, \ldots, d_{k-1})$

$\Rightarrow g_k \notin V_k$.

Also ist $span[g_0, \ldots, g_k]$ ein $(k+1)$- dimensionaler Raum und kein echter Unterraum von V_{k+1}.

Zusammen mit $span[g_0, \ldots, g_k] \subset V_{k+1}$ folgt die Gleichheit

$$span[g_0, Ag_0, \ldots A^k g_0] = span[g_0, \ldots, g_k].$$

Zeige nun: $V_{k+1} = span[d_0, \ldots, d_k]$

Betrachte dazu:

$$\begin{aligned} g_k + d_k &= g_k - g_k + \beta_{k-1} d_{k-1} \\ \Leftrightarrow\; g_k + d_k &= \beta_{k-1} d_{k-1} \end{aligned}$$

Also $g_k + d_k \in V_k$.

$$\begin{aligned} span[g_0, \ldots, g_{k-1}, g_k] &= span[g_0, \ldots, g_{k-1}, d_k] \\ &= span[d_0, \ldots, d_{k-1}, d_k] \end{aligned}$$

Also $V_{k+1} = span[d_0, \ldots, d_k]$.

$d_k \neq 0$ wegen $g_k + d_k \in V_k$.

Zeige nun: $d_0, \ldots, d_k$ sind paarweie konjugiert.

Algorithmus: $d_k = -g_k + \beta_{k-1} d_{k-1} \quad | \cdot (Ad_i)^T$

$$\Rightarrow d_i^T A d_k = -d_i^T A g_k + \beta_{k-1} d_i^T A d_{k-1}$$

a) Fall $i < k-1$:
Nach Annahme: $\beta_{k-1} d_i^T A d_{k-1} = 0$.
Weiterhin ist $d_i \in V_{k-1} \Rightarrow Ad_i \in V_k$.
$\Rightarrow Ad_i = \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j d_j$
Und damit

$$\begin{aligned} d_i^T A g_k &= (Ad_i)^T g_k \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \underbrace{d_j^T g_k}_{=0} \end{aligned}$$

$d_i^T A g_k = 0$.

b) Fall $i = k-1$:
Wegen Wahl von $\beta_{k-1} = \frac{g_k^T A d_{k-1}}{d_{k-1}^T A d_{k-1}}$ (Algorithmus) gilt:

$$\begin{aligned} d_{k-1}^T A d_k &= -d_{k-1}^T A g_k + \frac{g_k^T A d_{k-1}}{d_{k-1}^T A d_{k-1}} \; d_{k-1}^T A d_{k-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Zu 4. Minimaleigenschaft: Anwendung von Korollar 4.2 □

Satz 4.4 *Unter all diesen Verfahren liefert das cg-Verfahren den kleinsten Fehler* $\|x_k - \tilde{x}\|_A$.

Vorbereitung: Sei $p \in P_k$ (Polynome mit maximalem Grad k), $z \in \mathbb{R}$, $p(z) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^i$. Dann definiert man für $A \in M(n,n)$:

$$p(A) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i A^i$$

Satz 4.5 *Es gebe ein Polynom $p \in P_k$ mit $p(0) = 1$ und $|p(z)| \leq r \ \forall z \in \sigma(A)$.*
$\sigma(A)$ = Menge aller Eigenwerte von A.
Dann gilt für das cg-Verfahren mit beliebigem $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x_k - \tilde{x}\|_A \leq r\|x_0 - \tilde{x}\|_A$$

Beweis:

1. Darstellung von $(y - \tilde{x}),\ y \in x_0 + V_k$.

   Setze $q(z) = \dfrac{p(z) - 1}{z} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \ z^{(i-1)}$.

   $\rightarrow q(A) = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \ A^{(i-1)}$

   $y = x_0 + \Big(\sum_{i=1}^{k} \gamma_i \ A^{(i-1)} \Big) \ g_0 \quad \in x_0 + V_k$

   $y = x_0 + q(A)g_0$

   Betrachte

   $$\begin{aligned} y - \tilde{x} &= x_0 - \tilde{x} + y - x_0 \\ &= x_0 - \tilde{x} + q(A) \ g_0 \\ &= (x_0 - \tilde{x}) + \Big(p(A) - 1\Big) A^{-1} A (x_0 - \tilde{x}) \end{aligned}$$

   $\Leftrightarrow \ y - \tilde{x} = p(A)(x_0 - \tilde{x})$

2. Darstellung von $\|y - \tilde{x}\|_A^2$ und $\|x_0 - \tilde{x}\|_A^2$.

   Sei $\{z_j\}_{j+1}^n$ ein ON-System aus Eigenvektoren zu A, d.h. $Az_j = \lambda_j z_j$.

   Entwickle nun $x_0 - \tilde{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j z_j$. Dann gilt:

   $$\begin{aligned} y - \tilde{x} &= p(A)(x_0 - \tilde{x}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \ p(A) \ z_j \\ y - \tilde{x} &= \sum_{j=1}^{n} c_j \ p(\lambda_j) \ z_j \end{aligned}$$

   Berechne

   $$\begin{aligned} \|x_0 - \tilde{x}\|_A^2 &= (x_0 - \tilde{x})^T A \ (x_0 - \tilde{x}) \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{n} c_j z_j \Big)^T \Big(\sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{A z_j}_{\lambda_j z_j} \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |c_j|^2 \end{aligned}$$

Und entsprechend

$$\|y - \tilde{x}\|_A^2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ |c_j \ p(\lambda_j)|^2$$

Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|y - \tilde{x}\|_A^2 &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ |c_j \ p(\lambda_j)|^2 \\ &\leq r^2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |c_j|^2 \\ &= r^2 \|x_0 - \tilde{x}\|_A^2 \end{aligned}$$

3. Abschluss:

$$\|y - \tilde{x}\|_A \leq r\|x_0 - \tilde{x}\|_A, \qquad y \in x_0 + V_k$$
$$\|x_k - \tilde{x}\|_A \leq \|y - \tilde{x}\|_A \leq r\|x_0 - \tilde{x}\|_A$$

□

Bemerkung 4.7 *(Tschebyscheff-Polynome)*

Übliche Definition: $T_k(x) := \cos(k \arccos x)$

Äquivalent dazu: $T_k(x) = \frac{1}{2}\Big((x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k\Big)$

Eigenschaften: $T_k(1) = 1, \ |T_k(x)| \leq 1$ *für* $-1 \leq x \leq 1$

Für cg-Analyse mache speziellen Ansatz:

$$p(z) := \frac{T_k\left(\dfrac{(b+a) - 2z}{b-a}\right)}{T_k\left(\dfrac{b+1}{b-a}\right)} \quad \textit{mit } 0 < a < b$$

Bemerke:

1. Es gilt: $p(0) = 1$.
2. Für $z \in [a, b]$ gilt: $-1 \leq \dfrac{(b+a) - 2z}{b-a} \leq 1$

   $\Rightarrow \left|T_k\left(\dfrac{(b+a) - 2z}{b-a}\right)\right| \leq 1.$

Ab jetzt: $a = \lambda_{min}, \ b = \lambda_{max}, \ \kappa = \dfrac{b}{a}$.

Satz 4.6 *(Konvergenz des cg-Verfahrens)*
Für das cg-Verfahren gil mit beliebigem $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x_k - \tilde{x}\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k \|x_0 - \tilde{x}\|_A$$

Beweis: Benutze spezielles $p(z)$ und Satz 4.4. Damit:

$$\begin{aligned} \|x_k - \tilde{x}\|_A &\leq \max_{z \in [a,b]} p(z) \; \|x_0 - \tilde{x}\|_A \\ &\leq \max_{z \in [a,b]} \frac{T_k \left(\dfrac{b+a-2z}{b-a} \right)}{T_k \left(\dfrac{b+a}{b-a} \right)} \; \|x_0 - \tilde{x}\|_A \\ &\leq \max_{z \in [a,b]} \frac{1}{T_k \left(\dfrac{b+a}{b-a} \right)} \; \|x_0 - \tilde{x}\|_A \end{aligned}$$

Betrachte

$$T_k \left(\frac{(b+a)\frac{1}{a}}{(b-a)\frac{1}{a}} \right) = T_k \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \right).$$

Für $z \geq 1$ gilt aufgrund der äquivalenten Definition

$$T_k(z) \geq \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 - 1})^k.$$

$$\Rightarrow \; \|x_k - \tilde{x}\|_A \leq \frac{1}{\dfrac{1}{2} \left(\left(\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1} \right) + \sqrt{\left(\dfrac{\kappa+1}{\kappa-1} \right)^2 - 1} \right)^k} \; \|x_0 - \tilde{x}\|_A$$

Nun gilt $\kappa - 1 = (\sqrt{\kappa} + 1)(\sqrt{\kappa} - 1)$ und damit

$$\frac{\kappa+1}{\kappa-1} + \sqrt{\frac{(\kappa+1)^2 - (\kappa-1)^2}{(\kappa-1)^2}} = \frac{\kappa + 1 + \sqrt{4\kappa}}{\kappa - 1} = \frac{\sqrt{\kappa} + 1}{\sqrt{\kappa} - 1}.$$

Zusammen also:

$$\|x_k - \tilde{x}\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k \; \|x_0 - \tilde{x}\|_A$$

□

4.6 Vorkonditionierung

Grundidee

1. Transformiere $Ax = b \;\rightarrow\; \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ mit $cond(\tilde{A}) < cond(A)$.
2. Löse $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.
3. Rücktransformation $\tilde{x} \rightarrow x$.

1. Transformation

   Sei C (symmetrisch) positiv definit gewählt mit $C = HH^T$ (z.B. wegen Cholesky).

   Betrachte nun $Ax = b \;\Leftrightarrow\; H^{-1}AH^{-T}H^Tx = H^{-1}b$ wobei $H^{-T} = (H^T)^{-1}$.

   Schreibe $\tilde{A} = H^{-1}AH^{-T},\ \tilde{x} = H^Tx,\ \tilde{b} = H^{-1}b$ und damit $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.

2. Zur Wahl von C:

   Betrachte die Ähnlichkeitstransformation

   $$H^{-T}\tilde{A}H^T = H^{-T}(H^{-1}AH^{-T})H^T = C^{-1}A.$$

   Somit ist $\tilde{A}$ ähnlich zu $C^{-1}A$.

   Falls $C = A$, dann liegt Ähnlichkeit zu I vor, dass hiesse $cond(\tilde{A}) = 1$.

   Aber C sollte etwas mit A zu tun haben.

   Einfachstes praktikables Beispiel: $C = diag(A)$.

   Somit lautet der "ad-hoc"-Algorithmus:

   Wende das cg-Verfahren an auf $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.

   Besserer Algorithmus benutzt die Ähnlichkeit $\tilde{A} \sim C^{-1}A$.

Algorithmus 4.4 *Vorkonditioniertes cg-Verfahren*
Startwert sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Setze $g_0 = Ax_0 - b,\ d_0 = -h_0 = -C^{-1}g_0$.

Iteration $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{g_k^T h_k}{d_k^T A d_k} \\
x_{k+1} &= x_k + \alpha_k d_k \\
g_{k+1} &= g_k + \alpha_k A d_k \\
h_{k+1} &= C^{-1} g_{k+1} \quad \textit{Vorkonditionierung} \\
\beta_k &= \frac{g_{k+1}^T h_{k+1}}{g_k^T h_k} \\
d_{k+1} &= -h_{k+1} + \beta_k d_k
\end{aligned}$$

Satz 4.7 *Für das vorkonditionierte cg-Verfahren gilt:*

$$\|x_k - \tilde{x}\|_A \leq \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^k \|x_0 - \tilde{x}\|_A$$

mit $\kappa = cond(C^{-1}A)$.

Extremfall $C = A$: Nach Initialisierung schon fertig.

5 Adaptivität

5.1 Laplace-Problem

$V = H_0^1(\Omega)$, Triangulierung $\mathbb{T}_h$ aus Dreiecken, $V_h \subset V$, linearer Ansatz

$$\begin{array}{rl} u \in V & (\nabla u, \nabla\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall\varphi \in V \\ u_h \in V_h & (\nabla u_h, \nabla\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall\varphi \in V_h \end{array} \tag{5.1}$$

Satz 5.1 *(Energiefehlerschätzer)*
Für den Diskretisierungsfehler $e = u - u_h$ in (5.1) gilt die a-posteriori Abschätzung

$$\|\nabla e\|^2 \leq C \sum_T h_T^2 \ \rho_{1,T}^2 + h_T \ \rho_{2,T}^2$$

mit

$$\begin{aligned} \rho_{1,T} &= \|f + \Delta u_h\|_T \quad (\textit{Gebietsresiduum}) \\ \rho_{2,T} &= \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial T_j} \frac{1}{2} \ [\partial_n u_h]_{T_j} d\Gamma \end{aligned}$$

und $x \in \partial T_j$: $[\partial_n u_h](x) := \partial_n u_h(x - \varepsilon u) - \partial_n u_h(x + \varepsilon u)$ für $\varepsilon \to 0$.
("Sprungterme")

Beweis:

1. Rechnung

$$\begin{aligned} \|\nabla e\|^2 &= (\nabla u - \nabla u_h, \nabla e) \\ &= (\nabla u - \nabla u_h, \nabla e - \nabla I_h e) \ \text{ Galerkin-Orthogonalität} \\ &= (f, e - I_h e) - \sum_T \Big(\nabla u_h, \nabla(e - I_h e)\Big)_T \\ &= (f, e - I_h e) - \sum_T \Big((-\Delta u_h, e - I_h e)_T + \int_{\partial T} \partial_n u_h \ (e - I_h e) d\Gamma\Big) \\ &= \sum_T (f + \Delta u_h, e - I_h e)_T - \sum_T \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial T_j} \frac{1}{2} \ [\partial_n u_h] \ (e - I_h e) d\Gamma \end{aligned}$$

2. Wiederholung

   Interpolation: Satz 3.23 (linearer Ansatz)

$$\|v - I_h v\|_{L_2(T)} \leq c h_T \ |v|_{H^1(T)}$$

   Spursatz:

$$\int_{\Gamma_i} v^2 d\Gamma \leq \frac{2}{r} \ \|v\|_0^2 + r|v|_{H^1}^2$$

   Hier: $r \sim h_T$

3. Abschätzung

$$\|\nabla e\|^2 \leq \sum_T \|f + \Delta u_h\| \ c h_T \ \|\nabla e\|_T + \sum_T \left\| \frac{1}{2} \ [\partial_n u_h] \right\|_{\partial T} \ \|e - I_h e\|_{\partial T}$$

   Anwendung des Spursatzes auf $\|e - I_h e\|_{\partial T}^2$:

$$\begin{aligned} \|e - I_h e\|_{\partial T}^2 &\leq \frac{2}{h_T} \ \|e - I_h e\|_T^2 + h_T \ \|\nabla(e - I_h e)\|_T^2 \\ &\leq \frac{2}{h_T} \ c h_T^2 \ \|\nabla e\|_T^2 + h_T \ \|\nabla e\|_T^2 \\ &\leq c h_T \ \|\nabla e\|_T^2 \end{aligned}$$

   Somit also:

$$\begin{aligned} \|\nabla e\|^2 &\leq \sum_T \|f + \Delta u_h\|_T \ h_T \ \|\nabla e\|_T + \sum_T \left\| \frac{1}{2} \ [\partial_n u_h] \right\|_{\partial T} c\sqrt{h_T} \ \|\nabla e\|_T \\ &\leq c\Big(\sum_T h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_T^2 \Big)^{1/2} + \Big(\sum_T \|\nabla e\|_T^2 \Big)^{1/2} \\ &\quad + c\Big(\sum_T \left\| \frac{1}{2} \ [\partial_n u_h] \right\|_{\partial T}^2 h_T \Big)^{1/2} \Big(\sum_T \|\nabla e\|_T^2 \Big)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\nabla e\| &\leq c\Big(\sum_T h_T^2 \ \|f + \Delta u_h\|_T^2 \Big)^{1/2} + c\Big(\sum_T \left\| \frac{1}{2} \ [\partial_n u_h] \right\|_{\partial T}^2 h_T \Big)^{1/2} \\ \|\nabla e\|^2 &\leq c \sum_T h_T^2 \ \|f + \Delta u_h\|_T^2 + c \sum_T \left\| \frac{1}{2} \ [\partial_n u_h] \right\|_{\partial T}^2 h_T \end{aligned}$$

   Wobei benutzt wird: $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ □

5.2 Hindernisproblem

Voraussetzungen wie in 5.1

Zusätzlich: $K = \{\varphi \in V \mid \varphi \geq 0\}$

$$\begin{aligned} u \in K: &\quad (\nabla u, \nabla(\varphi - u)) \geq (f, \varphi - u) \quad \forall\ \varphi \in K \\ u_h \in K_h: &\quad (\nabla u_h, \nabla(\varphi - u_h)) \geq (f, \varphi - u_h) \quad \forall\ \varphi \in K_h := K \cap V_h \end{aligned} \tag{5.2}$$

Lemma 5.1 *Sei $a(v,w) := (\nabla v, \nabla w)$ und $e_i = I_h e = I_h(u - u_h)$. Dann gilt:*

$$a(u - u_h, e_i) \leq a(u, e_i - e) - f(e_i - e)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a(u - u_h, e_i) &= (f, e_i) - a(u_h, e_i) + a(u, e_i - e) - (f, e_i - e) + a(u, e) - (f, e) \\ &= (f, u_i - u_h) - a(u_h, u_i - u_h) \leq 0 \\ &= a(u, u - u_h) - (f, u - u_h) \\ &= -a(u, u_h - u) + (f, u_h - u) \leq 0 \end{aligned}$$

Also $a(u - u_h, e_i) \leq a(u, e_i - e) - (f, e_i - e)$. □

Satz 5.2 *Für den Diskretisierungsfehler $e = u - u_h$ in (5.2) gilt die a-posteriori-Abschätzung*

$$\|\nabla e\|^2 \leq c \sum_T (h_T^2 \rho_{1,T}^2 + h_T \rho_{2,T}^2)$$

mit Bezeichnungen wie in Satz 5.1.

Beweis:

$$\begin{aligned} (\nabla u - \nabla u_h, \nabla e) &= (\nabla u - \nabla u_h, \nabla(e - e_i)) + (\nabla u - \nabla u_h, \nabla e_i) \\ &\leq (\nabla u - \nabla u_h, \nabla(e - e_i)) + (\nabla u, \nabla(e_i - e)) - (f, e_i - e) \\ &= -(\nabla u_h, \nabla(e - e_i)) + (f, e - e_i) \\ &= (f, e - e_i) - (\nabla u_h, \nabla(e - e_i)) \end{aligned}$$

Jetzt geht's weiter wie im Beweis zu Satz 5.1. □

5.3 Hindernisproblem in Lagrange-Formulierung

Definiere zunächst das Lagrange-Funktional

$$\mathcal{L}(\varphi, w) = \frac{1}{2}\, a(\varphi, \varphi) - (f, \varphi) + \int_\Omega w(\psi - \varphi).$$

ψ bezeichne das Hindernis bei der Bedingung $u \geq \psi, \psi : \Omega \to \mathbb{R}$.
$\varphi \in V = H_0^1(\Omega),\ w \in \Lambda = \{q \in L^2 \mid q \geq 0\}$.

Definition 5.1 $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ *heisst Sattelpunkt von* $\mathcal{L}$*, falls für* $(\varphi, w) \in V \times \Lambda$ *gilt:*

$$\mathcal{L}(u, w) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(\varphi, \lambda)$$

Minimum bzgl u*, Maximum bzgl* λ*.*

Lemma 5.2 *Sei* $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ *Sattelpunkt von* $\mathcal{L}$*, dann*

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) - (\lambda, \varphi) &= (f, \varphi) \qquad \forall\ \varphi \in V \\ (u, w - \lambda) &\geq (\psi, w - \lambda) \quad \forall\ w \in \Lambda. \end{aligned}$$

Beweis:

1. $$\frac{1}{2}\, a(u, u) - (f, u) + \int_\Omega \lambda(\psi - u) \leq \frac{1}{2}\, a(\varphi, \varphi) - (f, \varphi) + \int_\Omega \lambda(\psi - \varphi)$$

   $$\Rightarrow \frac{1}{2}\, a(u, u) - (g, u) \leq \frac{1}{2}\, a(\varphi, \varphi) - (g, \varphi) \quad \forall\ \varphi \in V.$$

   Über Variationsrechnung:

   $$\begin{aligned} a(u, \varphi) &= (g, \varphi) \qquad \forall\ \varphi \in V \\ &= (f + \lambda, \varphi) \end{aligned}$$

   $$\Leftrightarrow\ a(u, \varphi) - (\lambda, \varphi) = (f, \varphi) \qquad \forall\ \varphi \in V$$

2. $$\begin{aligned} \int w(\psi - u) &\leq \int \lambda(\psi - u) \\ \Leftrightarrow \int (w - \lambda) u &\geq \int (w - \lambda)\psi \end{aligned}$$

□

Lemma 5.3 *Sei* (u, λ) *Sattelpunkt von* $\mathcal{L}$*, dann ist* u *Lösung von (5.2).*

Beweis:

1. u fest, w variiert.

   $$\int_\Omega w(\psi - u) \leq \int_\Omega \lambda(\psi - u)$$

   Wähle $w := y + \lambda$ mit $y \geq 0$, d.h. $w \geq 0$.

   Einsetzen liefert:

   $$\int_\Omega y(\psi - u) \leq 0$$

   $\Rightarrow \psi - u \leq 0 \ \Leftrightarrow\ u \geq \psi \ \Leftrightarrow\ u \in K$

2. Testen mit $w = 0$ und $w = 2\lambda$.
   a) $0 \leq \int\limits_\Omega \lambda(\psi - u)$.
   b) $\int\limits_\Omega 2\lambda(\psi - u) \leq \int\limits_\Omega \lambda(\psi - u)$
   $\Rightarrow \int\limits_\Omega \lambda(\psi - u) \leq 0$
   $\Rightarrow \int\limits_\Omega \lambda(\psi - u) = 0$ (Komplementarität)

3. λ fest, φ variiert mit $\varphi \geq \psi$.

$$\frac{1}{2}\, a(u,u) - (f,u) + \int\limits_\Omega \lambda(\psi - u) \leq \frac{1}{2}\, a(\varphi,\varphi) - (f,\varphi) + \int\limits_\Omega \lambda(\psi - \varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\, a(u,u) - (f,u) \leq \frac{1}{2}\, a(\varphi,\varphi) - (f,\varphi) \qquad \forall \varphi \geq \psi$$

Letzteres ist äquivalent zu (5.2)

$$a(u, \varphi - u) \geq (f, \varphi - u)$$

□

Sattelpunkt (u, λ) ist charakterisiert durch:

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) - (\lambda,\varphi) &= (f,\varphi) \\ (u, w - \lambda) &\geq (\psi, w - \lambda) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Diskretisierung

Wähle $V_h \subset V,\ L_h \subset L_2,\ \Lambda_h = L_h \cap \Lambda$.

Beispiel 5.1 *V_h stückweise linear, stetig.*
Λ_h zellweise konstant.

Diskrete Version zu (5.3)

$$\begin{aligned} a(u_h,\varphi) - (\lambda_h,\varphi) &= (f,\varphi) && \forall\ \varphi \in V_h \\ (u_h, w - \lambda_h) &\geq (\psi, w - \lambda_h) && \forall\ w \in \Lambda_h \end{aligned} \tag{5.4}$$

Definiere: $\delta := \max\{0, \psi - u_h\}$

Lemma 5.4 *Es gilt:*

$$\Big(\lambda_h - \lambda, u - (u_h + \delta)\Big) - \Big(\lambda_h, \psi - (u_h + \delta)\Big) \geq 0.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\underbrace{(\lambda_h - \lambda, u - \psi)}_{\geq 0} \; &+ \; \Big(\lambda_h - \lambda, \psi - (u_h + \delta)\Big) - \Big(\lambda_h, \psi - (u_h + \delta)\Big) \\
&\geq \; \Big(- \lambda, \psi - (u_h + \delta)\Big) \\
&= \; \int_\Omega \underbrace{(-\lambda)}_{\leq 0} \Big(\psi - \underbrace{(u_h + \delta)}_{\leq 0}\Big) \\
&\geq \; 0
\end{aligned}$$

□

Orthogonalität
Teste mit $\varphi_h \in V_h$ in (5.3) und (5.4) und "(5.3)−(5.4)".

$$a(u - u_h, \varphi_h) - (\lambda - \lambda_h, \varphi_h) = 0$$

Rechnung

$$\begin{aligned}
a(u - u_h, u - u_h) \; &\leq \; a(u - u_h, e) - \Big(\lambda - \lambda_h, u - (u_h + \delta)\Big) + \\
&\quad -\Big(\lambda_h, \psi - (u_h + \delta)\Big) \\
&= \; a(u - u_h, e) - (\lambda - \lambda_h, e) - (\lambda - \lambda_h, -\delta) + \\
&\quad -\Big(\lambda_h, \psi - (u_h + \delta)\Big) \\
&= \; a(u - u_h, e - e_i) - (\lambda - \lambda_h, e - e_i) - (\lambda - \lambda_h, -\delta) + \\
&\quad -\Big(\lambda_h, \psi(u_h + \delta)\Big) \\
&= \; (f + \lambda_h, e - e_i) - a(u_h, e - e_i) - (\lambda - \lambda_h, -\delta) + \\
&\quad -\Big(\lambda_h, \psi - (u_h + \delta)\Big)
\end{aligned}$$

Es bleibt

$$-(\lambda, -\delta) - (\lambda_h, \psi - u_h).$$

Zusammen:

$$\|\nabla e\|^2 \leq (f + \lambda_h, e - e_i) - a(u_h, e - e_i) - (\lambda_h, \psi - u_h) + (\lambda, \delta)$$

□

5.4 Sattelpunktsuche

Aufgabe:

$$\min = \frac{1}{2} u^T A u - f^T u$$

unter den Nebenbedingungen

$$Bu \leq g.$$

$u, f \in \mathbb{R}^n,\ g \in \mathbb{R}^m, A \in M(n,n)$ positiv definit $B \in M(m,n)$.

Schreibweise:

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}u^T Au - f^T u \\ \Phi(\varphi) &= (B\varphi - g) \end{aligned}$$

Bemerkung 5.1 *Die dem Ausgangsproblem zugeordnete Lagrange-Funktion lautet*

$$\mathcal{L}(\varphi, w) := J(\varphi) + w^T \Phi(\varphi), \qquad \varphi \in \mathbb{R}^n,\ w \in \mathbb{R}^m_+.$$

Wiederholung: $(u, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ heisst Sattelpunkt, falls gilt:

$$\mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(\varphi, \lambda) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}^n,\ q \in \mathbb{R}^m_+$$

Wiederholung: (u, λ) Sattelpunkt von $\mathcal{L}$: Dann ist u Lösung der Ausgangsaufgabe.

Algorithmus 5.1 *Sattelpunktsuche*

1. *Start: Wähle* $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m_+$.
2. *Für* $k = 0, 1, 2$ *definiere* u_k *durch*

$$\mathcal{L}(u_k, \lambda_k) \leq \mathcal{L}(\varphi, \lambda_k) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}^n.$$

   D.h. $Au_k = f - B^T \lambda_k$.
3. $\lambda_{k+1} = P_{\mathbb{R}^m_+}(\lambda_k + \alpha_k \Phi(u_k)),\ \alpha_k \geq 0.$

Lemma 5.5 *Sei* $q \in \mathbb{R}^n_+$ *gegeben. Sei* $v \in \mathbb{R}^n$ *definiert durch*

$$\mathcal{L}(v, q) \leq \mathcal{L}(\varphi, q) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt:

$$J'(v)(\varphi - v) + q^T \Big(\Phi(\varphi) - \Phi(v) \Big) \geq 0 \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}^n$$

Beweis: Da q fest, betrachte $\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(v, q)$.

Also $\mathcal{L}(v) \leq \mathcal{L}(\varphi)\ \forall \varphi \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow\ \mathcal{L}'(v)(\varphi - v) \geq 0\ \ \forall \varphi \in \mathbb{R}^n$$

Nun gilt: $\mathcal{L}'(v) = J'(v) + q^T \Phi'(v)$ und $q^T \Phi(v) = q^T (Bv - g)$

$$\Rightarrow\ q^T \Phi'(v) = q^T B$$

Einsetzen liefert:

$$J'(v)(\varphi - v) + q^T B(\varphi - v) \geq 0 \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \; J'(v)(\varphi - v) + q^T \Big(\underbrace{(B\varphi - g)}_{\Phi(\varphi)} - \underbrace{(Bv - g)}_{\Phi(v)} \Big) \geq 0$$

□

Satz 5.3 *$\exists\ \alpha, \beta > 0$, so dass mit $\alpha \leq \alpha_k \leq \beta$ der Algorithmus gegen die Lösung u konvergiert.*

Beweis:

1. Algorithmus: $\mathcal{L}(u_k, \lambda_k) \leq \mathcal{L}(\varphi, \lambda_k) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}^n$
   Sattelpunkt: $\mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(\varphi, \lambda) \qquad \forall \varphi \in \mathbb{R}^n$
   Benutze Lemma 5.5:

$$\frac{1}{2}(Au_k, \varphi - u_k) - (f, \varphi - u_k) + \Big(\lambda_k, \Phi(\varphi) - \Phi(u_k)\Big) \geq 0 \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{2}(Au, \varphi - u) - (f, \varphi - u) + \Big(\lambda, \Phi(\varphi) - \Phi(u)\Big) \geq 0 \tag{5.6}$$

   Testen mit $\varphi = u$ in (5.5) und $\varphi = u_k$ in (5.6) und Addition:

$$\frac{1}{2}\Big(A(u_k - u), u_k - u\Big) + \Big(\lambda_k - \lambda, \Phi(u_k) - \Phi(u)\Big) \leq 0$$

2. Zeige: $\lambda = P_{\mathbb{R}^m_+}\Big(\lambda + \bar{\alpha}\Phi(u)\Big)$ für $\bar{\alpha} > 0$
   Sattelpunkt: $\mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \qquad \forall q \in \mathbb{R}^m_+$

$$\begin{array}{lrcll} \Leftrightarrow & J(u) + q^T\Phi(u) & \leq & J(u) + \lambda^T\Phi(u) & \\ \Rightarrow & \Big((q - \lambda), \Phi(u)\Big) & \leq & 0 & \\ & \Big((q - \lambda), -\bar{\alpha}\Phi(u)\Big) & \geq & 0 & \bar{\alpha} > 0 \\ \Leftrightarrow & \Big(\lambda - \big(\lambda + \bar{\alpha}\Phi(u)\big), q - \lambda\Big) & \geq & 0 & \end{array}$$

   Benutze Satz 3.16 (Charakterisierung der Projektion über Ungleichung).
   $\Rightarrow \; \lambda = P_{\mathbb{R}^m_+}\Big(\lambda + \bar{\alpha}\Phi(u)\Big)$

3. Algorithmus: $\lambda_{k+1} = P_{\mathbb{R}^m_+}\Big(\lambda_k + \alpha_k \Phi(u_k)\Big)$

   Aus 2.: $\lambda = P_{\mathbb{R}^m_+}\Big(\lambda + \alpha_k \Phi(u)\Big)$

   Zusammen:

$$\lambda_{k+1} - \lambda = P_{\mathbb{R}^m_+}\Big(\lambda_k + \alpha_k \Phi(u_k)\Big) - P_{\mathbb{R}^m_+}\Big(\lambda + \alpha_k \Phi(u)\Big)$$

   Betrachte die Norm und benutze das $P_{\mathbb{R}^m_+}$ nicht expansiv ist.

$$\begin{aligned} \|\lambda_{k+1} - \lambda\|^2 &\leq \Big\|(\lambda_k - \lambda) + \alpha_k\Big(\Phi(u_k) - \Phi(u)\Big)\Big\|^2 \\ &\leq \|\lambda_k - \lambda\|^2 + 2\alpha_k \Big(\lambda_k - \lambda, \Phi(u_k) - \Phi(u)\Big) + \\ &\quad + \alpha_k^2 \|\Phi(u_k) - \Phi(u)\|^2 \end{aligned}$$

   Benutze 2. und $L = \|B\|$.

$$\begin{aligned} \ldots &\leq \|\lambda_k - \lambda\|^2 - \alpha_k \Big(A(u_k - u), u_k - u\Big) + \alpha_k^2 L^2 \|u_k - u\|^2 \\ &\leq \|\lambda_k - \lambda\|^2 - \alpha_k \lambda_{min} (u_k - u, u_k - u) + \alpha_k^2 L^2 \|u_k - u\|^2 \\ &= \|\lambda_k - \lambda\|^2 - (\lambda_{min}\alpha_k - \alpha_k^2 L^2) \|u_k - u\|^2 \end{aligned}$$

   Wähle $\alpha_k > 0$, so dass $\alpha_k(\lambda_{min} - \alpha_k L^2) \geq \gamma > 0$.

   Dann gilt:

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda\|^2 + \gamma\|u - u_k\|^2 \leq \|\lambda_k - \lambda\|^2$$

   D.h. $\|\lambda_{k+1} - \lambda\|$ ist monoton fallend und $\|\lambda_{k+1} - \lambda\| \geq 0$.

$$\lim_{k\to\infty} \|\lambda_{k+1} - \lambda\| = l$$

   Also

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} \|\lambda_{k+1} - \lambda\|^2}_{=l} + \lim_{k\to\infty} \gamma\|u - u_k\|^2 \leq \underbrace{\lim_{k\to\infty} \|\lambda_k - \lambda\|^2}_{=l}.$$

   $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \gamma\|u_k - u\|^2 = 0$ □

5.5 Dualitätsargument

Situation: Laplace-Problem auf Ω mit Nullrandwerten, FE mit linearen Ansätzen
Fehlerabschätzungen:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq ch \ |u|_{H^2(\Omega)}$$

und suboptimal

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \ |u|_{H^2(\Omega)}$$

Andererseits Interpolationsresultat:

$$\|u - I_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2 \ |u|_{H^2(\Omega)}$$

5.5.1 A Priori Abschätzung

Satz 5.4 *Sei Ω ein konvexes, polygonales Gebiet.*

$$\begin{array}{rrcll} u: & (\nabla u, \nabla\varphi) & = & (f,\varphi) & \forall\ \varphi \in V \\ u_h & (\nabla u_h, \nabla\varphi) & = & (f,\varphi) & \forall\ \varphi \in V_h \end{array}$$

Dann gibt es $c > 0$ unabhängig von u und h, so dass gilt:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2 \ |u|_{H^2(\Omega)}$$

Beweis: Betrachte das folgende Hilfsproblem ("Duales Problem")

$$\begin{array}{rcll} -\Delta z & = & e & \text{auf } \Omega \\ z & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{array}$$

Bemerkung 5.2 *(Stabilität des dualen Problems)*
Man kann zeigen, falls Ω konvex ist, dass gilt:

$$\|z\|_{H^2(\Omega)} \leq C_s \ \|e\|_{L^2(\Omega)}$$

und $C_s > 0$ ist unabhängig von e.

Schreibe das duale Problem in variationeller Formulierung:

$$\begin{array}{rrcll} & -(\varphi, \Delta z) & = & (\varphi, e) & \forall\ \varphi \in V \\ \Leftrightarrow & (\nabla\varphi, \nabla z) & = & (\varphi, e) & \forall\ \varphi \in V \end{array}$$

Wähle spezielle Funktion $\varphi = e$.

$$\begin{array}{rcl} (e,e) & = & (\nabla e, \nabla z) \\ & = & (\nabla e, \nabla z - \nabla I_h z) \\ & \leq & \|\nabla e\| \ \|\nabla z - \nabla I_h z\| \\ & \leq & ch \ |u|_{H^2(\Omega)} \ ch \ |z|_{H^2(\Omega)} \\ & \leq & ch \ |u|_{H^2(\Omega)} \ chC_s \ \|e\|_{L^2(\Omega)} \end{array}$$

$\Rightarrow \ \|e\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \ |u|_{H^2(\Omega)}$ □

5.5.2 A posteriori Abschätzung

DWR-Methode (Dual Weighted Residual)
Ausgangspunkt: Duales Probelm in der Form

$$z \in V: \ (\nabla\varphi, \nabla z) = J(\varphi).$$

J ein lineares Funktional.
Wähle $\varphi = e$:

$$\begin{aligned}
J(e) &= (\nabla e, \nabla z) \\
&= (\nabla e, \nabla z - \nabla I_h z) \\
&= (\nabla u - \nabla u_h, \nabla z - \nabla I_h z) \\
&= (f, z - I_h z) - (\nabla u_h, \nabla z - \nabla I_h z) \\
&= (f, z - I_h z) - \sum_T (\nabla u_h, \nabla z - \nabla I_h z)_T \\
&= (f, z - I_h z) - \sum_T \Big[(-\Delta u_h, z - I_h z)_T + \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \, [\partial_n u_h] \, (z - I_h z) d\Gamma \Big] \\
&\leq \sum_T \|f + \Delta u_h\|_T \, \|z - I_h z\|_T + \sum_T \left\| \frac{1}{2} \, [\partial_n u_h] \right\|_{\partial T} \|z - I_h z\|_{\partial T}
\end{aligned}$$

Wiederholung: Spursatz

$$\begin{aligned}
\|z - I_h z\|^2_{\partial T} &\leq \frac{2}{h_T} \, \|z - I_h z\|^2_T + h_T \, \|\nabla(z - I_h z)\|^2_T \\
&\leq \frac{2}{h_T} \, c h_T^4 \, \|z\|^2_{H^2(T)} + h_T \, h_T^2 \, \|z\|^2_{H^2(T)} \\
&\leq c h_T^3 \, \|z\|_{H^2(T)}
\end{aligned}$$

Also

$$J(e) \leq \sum_T \|f + \Delta u_h\| \, c h_T^2 \, \|z\|_{H^2(T)} + \sum_T \left\| \frac{1}{2} \, [\partial_n u_h] \right\|_{\partial T} c h_T^{3/2} \, \|z\|_{H^2(T)}$$

Wir haben gezeigt:

Satz 5.5 *DWR-Abschätzung*

$$J(e) \leq \sum_T c h_T^2 \, \left(\|f + \Delta u_h\|_T + \frac{\|\partial_n u_h\|_{\partial T}}{2\sqrt{h_T}} \right) \, \|z\|_{H^2(T)}$$

Beispiel 5.2 *Für das Fehlerfunktional J*

1. $J(\varphi) = \delta_{x_0}(\varphi)$ *"Dirac". Also*

$$J(e) = \delta_{x_0}(e) = e(x_0) = u(x_0) - u_h(x_0)$$

2. $J(\varphi) = \int_\Gamma \varphi \, d\Gamma$ *"Mittelwert. Also*

$$J(e) = \int_\Gamma e \, d\Gamma = \int_\Gamma u \, d\Gamma - \int_\Gamma u_h \, d\Gamma$$

$J(\varphi) = (\nabla\varphi, \nabla z) \leftarrow z = ?$

Satz 5.5 in der Praxis:

- z ist unbekannt.
- Löse $(\nabla\varphi, \nabla z) = J(\varphi)$ numerisch, z.B. mit FE $\rightarrow z \approx \tilde{z}$.
- $\|z\|_{H^2(T)} \approx \|\tilde{z}\|_{H^2(T)}$

Typischerweise berechnet man $\tilde{z}$ auf $\mathbb{T}$.

6 Parablische Probleme

Modellbeispiel

$$\partial_t u - \Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \times I$$

I ist das Zeitintervall $[0, T]$, $u = u(t, x)$.
Randbedingungen und Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} u(t,x) &= 0 \qquad t \in I,\ x \in \partial\Omega \\ u(0,x) &= u_0(x) \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

Numerische Behandlung

1. Zeitdiskretisierung

   Zerlegung von I durch Stützstellen $(t_0, t_1, \ldots, t_N = T)$.

   Schreibweise: $u^N = u(t_n, x),\ I_n = (t_{n-1}, t_n),\ K_n = t_n - t_{n-1}$,

   $a(v, w) = (\nabla v, \nabla w)$

   Schwache Formulierung:

$$\int_{I_n} (\partial_t u, \varphi)\ dt + \int_{I_n} a(u, \varphi)\ dt = \int_{I_n} (f, \varphi)\ dt \qquad \forall\ \varphi \in V$$

$$\int_{I_n} a(u, \varphi)\ dt \approx K_n((1-\alpha)\ a(u^{n-1}, \varphi) + \alpha\ a(u^n, \varphi) \qquad \alpha \in (0, 1]$$

   Analog für $\int_{I_n} (f, \varphi)\ dt$.

$$(u^n - u^{n-1}, \varphi) + K_n \alpha\ a(u^n, \varphi) = \int_{I_n} (f, \varphi)\ dt - K_n(1-\alpha)\ a(u^{n-1}, \varphi)$$

   Also insgesamt:

$$\begin{aligned} (u^n, \varphi) + K_n \alpha\ a(u^n, \varphi) &= \alpha K_n (f^n, \varphi) + (1-\alpha) K_n (f^{n-1}, \varphi) \\ &\quad + (u^{n-1}, \varphi) - K_n(1-\alpha)\ a(u^{n-1}, \varphi) \end{aligned}$$

2. Ortsdiskretisierung

   Benutze FE zur Aproximation von u^n.

Numerische Schemata:

1. Implizites Rückwärts-Euler-Verfahren

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{k_n}, \varphi\right) + a(u_h^n, \varphi) = (f^n, \varphi) \qquad \forall\ \varphi \in V_h \subset V$$

$u_h^0 = u_{0h}$

Genauigkeit in der Zeit: (Δt) mit $\Delta t = \max_n k_n$

2. Crank-Nicolson

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{k_n}, \varphi\right) + a\left(\frac{u_h^n + u_h^{n-1}}{2}, \varphi\right) = \left(\frac{f^n + f^{n-1}}{2}, \varphi\right) \qquad \forall\ \varphi \in V_h$$

$u_h^0 = u_{0h}$

Genauigkeit in der Zeit: $O(\Delta t^2)$

3. Implizites Zweischrittverfahren

$$\left(\frac{\frac{3}{2}u_h^n - \frac{3}{2}u_h^{n-1}}{k_n} - \frac{\frac{1}{2}u_h^{n-1} - \frac{1}{2}u_h^{n-2}}{k_{n-1}}, \varphi\right) + a(u_h^n, \varphi) = (f^n, \varphi) \qquad \forall\ \varphi \in V_h$$

$u_h^0 = u_{0h}$ und u_h^1 gegeben, z.B. durch einen Euler Schritt.

Genauigkeit in der Zeit: $O(\Delta t^2)$

Bemerkung 6.1 *Dieses Verfahren sollte dem Crank-Nicolson-Verfahren vorgezogen werden.*

6.1 Parabolische Variationsungleichungen

Sei $K \subset V$ abgeschlossen und konvex.

Aufgabe: Finde $u(t) \in K$ f.ü. auf I, so dass:

$$(\partial_t u, \varphi - u) + a(u, \varphi - u) \geq (f, \varphi - u) \qquad \forall\ \varphi \in K$$

mit $u(0) = u_0 \in K$.

Numerische Schemata:

1. Euler-Rückwärts-Verfahren

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{k_n}, \varphi - u_h^n\right) + a(u_h^n, \varphi - u_h^n) \geq (f^n, \varphi - u_h^n) \quad \forall\ \varphi \in K_h = V_h \cap K$$

$u_h^0 = u_{0h}$

2. Implizites Zweischrittverfahren

$$\left(\frac{\frac{3}{2}u_h^n - \frac{3}{2}u_h^{n-1}}{k_n} - \frac{\frac{1}{2}u_h^{n-1} - \frac{1}{2}u_h^{n-2}}{k_{n-1}}, \varphi - u_h^n\right) + a(u_h^n, \varphi - u_h^n) \geq (f^n, \varphi - u_h^n)$$

$\forall\ \varphi \in K_h,\ u_h^0 = u_{0h}$ und u_h^1 gegeben, z.B. durch einen Euler Schritt.

7 Sattelpunktprobleme

Aufgabe: Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

Bezeichnungen:

X, M Hilberträume
$a : X \times X \to \mathbb{R},\ b : X \times M \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen
X', M' Dualräume zu X und M.

Paarungen von X und X' und M und M' werden mit $< ., . >$ bezeichnet.
Weiterhin gegeben: $f \in X',\ g \in M'$

Problem (PM) Gesucht wird in X das Minimum von

$$J(u) = \frac{1}{2}\, a(u,u) - < f, u >$$

unter den Nebenbedingungen

$$b(u,q) = < g, q > \qquad \text{für } q \in M$$

Umformulierung:
Betrachte die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(u,\lambda) := J(u) - [b(u,\lambda) - < g, \lambda >]$$

Dies führt auf das Sattelpunktproblem:

Problem (PS) Gesucht wird $(u,\lambda) \in X \times M$ mit

$$\begin{array}{lcll} a(u,\varphi) + b(\varphi,\lambda) & = & < f, \varphi > & \forall\ \varphi \in X \\ b(u,q) & = & < g, q > & \forall\ q \in M \end{array}$$

Für jede Lösung (u,λ) von (PS) kann man die Sattelpunkteigenschaft

$$\mathcal{L}(u,q) \le \mathcal{L}(u,\lambda) \le \mathcal{L}(\varphi,\lambda)$$

nachrechnen.

Beispiel 7.1 *Betrachte das Randwertproblem*

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & \text{auf } \Omega \\ u & = & g & \text{auf } \partial\Omega \end{array}$$

Mit $X = H^1(\Omega)$ und $M = L_2(\partial\Omega)$.
Definiere:

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) &= \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \; dx \\ < f, \varphi > &= \int_\Omega f\varphi \; dx = (f,\varphi) \\ b(\varphi, q) &= \int_{\partial\Omega} \varphi q \; d\Gamma \\ < g, q > &= \int_\Gamma gq \; d\Gamma \end{aligned}$$

Die Nebenbedingung lautet:

$$\int_\Gamma uq \; d\Gamma = \int_\Gamma gq \; d\Gamma \qquad \forall \; q \in M$$

Beispiel 7.2 *Erneut*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad auf \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u &= g \quad auf \quad \partial\Omega \end{aligned}$$

Substitution: $\sigma = \nabla u$ (Spannung σ).
Mit $\Delta u = div \nabla u$ führt das auf das System

$$\begin{aligned} \sigma &= \nabla u \\ div \; \sigma &= -f \end{aligned}$$

und $u = 0$ auf Γ

Herleitung einer variationellen Formulierung:
Ausgangspunkt: “Testen”

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) &= (\nabla u, \tau) \quad \forall \; \tau \in (L_2(\Omega))^2 \\ (div \; \sigma, \varphi) &= (-f, \varphi) \quad \forall \; \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) - (\nabla u, \tau) &= 0 \qquad \forall \; \tau \in (L_2(\Omega))^2 \\ -(\sigma, \nabla\varphi) &= (-f, \varphi) \quad \forall \; \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

In diesem Beispiel:

$X = (L_2(\Omega))^2, \; M = H_0^1(\Omega),$
$a(\sigma,\tau) = (\sigma,\tau) = \int_\Omega (\sigma_1\tau_1 + \sigma_2\tau_2) \; dx, \qquad b(\tau,\varphi) = -(\tau, \nabla\varphi)$

7.1 Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

7.1.1 Adjungierte Operatoren

Bezeichnungen:

X, Y Banachräume
X', Y' Dualräume
$< ., . >$ Paarungen zwischen X und X' bzw. Y und Y'
$L : X \to Y$ beschränkter linearer Operator

Konstruktion eines stetigen linearen Funktionals auf X

1. Vorgabe eines $y^* \in Y'$.
2. $x \in X$ wird abgebildet durch einsetzen in
   $< y^*, L. >: X \ni x \mapsto < y^*, Lx > \in \mathbb{R}$.

Wir haben also nach Vorgabe eines $y^* \in Y'$ durch $< y^*, L. >$ ein Element aus X' konstruiert. Dieses wird mit $L'y^* \in X'$ bezeichnet.

$$< L'y^*, x >:= < y^*, Lx >$$

$L' : Y' \to X'$

Definition 7.1 *L' heisst der zu L adjungierte Operator.*

Definition 7.2 *Sei V ein abgeschlossener Unterraum von X. Dann heisst*

$$V^0 := \{l \in X' \mid < l, v >= 0 \quad \textit{für } v \in V\}$$

die Polare von V.

Definition 7.3 *Sei X ein Hilbertraum. Dann heisst*

$$V^\perp := \{x \in X \mid (x, v) = 0 \quad \textit{für } v \in V\}$$

orthogonales Komplement.

Satz 7.1 *(closed range theorem)*
Mit obigen Voraussetzungen gilt:

1. *$L(X)$ abgeschlossen in Y.*
   $\Leftrightarrow$
2. *$L(X) = (KerL')^0$*

7.1.2 Abstrakter Existenzsatz

Bezeichnungen:

U, V Hilberträume.
U', V' Dualräume.
$a : U \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform.

Definiere einen Operator $L : U \to V'$:

$$U \ni u \mapsto < Lu, . >:= a(u, .) \in V'$$

Die betrachteten Variationsprobleme haben die Struktur:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= < f, v > \quad \forall\, v \in V \\ < Lu, v > &= < f, v > \quad \forall\, v \in V \end{aligned}$$

Wir können formal schreiben:

$$u = L^{-1} f$$

Definition 7.4 *Seien U, V normierte Räume. Eine bijektive, lineare Abbildung $L : U \to V'$ heisst Isomorphismus, wenn L und L^{-1} stetig sind.*

Satz 7.2 *Seien U, V Hilberträume. Eine lineare Abbildung $L : U \to V'$ ist ein Isomorphismus, wenn die zugehörige Form $a : U \times V \to \mathbb{R}$ folgende Bedingungen erfüllt.*

1. *Stetigkeit:* $\exists\ c \geq 0$ *mit* $|a(u, v)| \leq c\|u\|_U \|v\|_V$
2. *Inf-sup-Bedingung:* $\exists\ \alpha > 0$ *mit* $\sup\limits_{v \in V, v \neq 0} \dfrac{a(u, v)}{\|v\|} \geq \alpha \|u\|_U \qquad \forall\ u \in U$

   (bzw. $\inf\limits_{u \in U} \sup\limits_{v \in V} \dfrac{a(u, v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \geq \alpha > 0$*)*
3. $\forall\ v \in V\ \exists\ u \in U$ *mit* $a(u, v) \neq 0$.

Beweis:

a) Aus 2. folgt L ist injektiv

$Lu_1 = Lu_2 \to a(u_1, v) = a(u_2, v) \qquad \forall\ v \in V$

Also ist $\sup\limits_{v \in V} \dfrac{a(u_1 - u_2, v)}{\|v\|_V} = 0 \geq \alpha \|u_1 - u_2\|$

$\Rightarrow\ u_1 = u_2$

b) L^{-1} ist stetig auf dem Bild von L.

Zu $f \in L(U)$ gibt es wegen a) ein eindeutiges $u = L^{-1}f$.

$$\begin{aligned} \alpha\|L^{-1}f\|_U &= \alpha\|u\|_U \\ &\leq \sup_{v\in V} \frac{a(u,v)}{\|v\|_V} \\ &= \sup_{v\in V} \frac{< Lu, v >}{\|v\|_V} \\ &= \sup_{v\in V} \frac{< f, v >}{\|v\|_V} \\ &= \|f\|_{V'} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\|L^{-1}f\|_U}{\|f\|_{V'}} \leq \frac{1}{\alpha}$$

$f \in L(U)$ war beliebig, d.h. $\|L^1\| = \sup_{f\in V'} \frac{\|L^{-1}f\|_U}{\|f\|_{V'}} \leq \frac{1}{\alpha}$.

c) $L(U)$ ist abgeschlossen.

L^{-1} ist stetig nach b).

L ist stetig.

$\Rightarrow L(U)$ abgeschlossen.

d) L ist surjektiv.

$L' : V \to U'$

$V \ni v \mapsto < L., v >= a(., v)$

wegen 3. liegt nur $v = 0 \in V$ im Kern(L'). Es ist Kern$(L') \subset V$

Satz 7.1 sagt:

$$\begin{aligned} L(U) &= (Kern\ L')^0 \\ &= \{l \in V' \mid\ < l, v >= 0,\ v \in Kern\ L'\} \\ &= V' \end{aligned}$$

□

7.1.3 Abstrakter Konvergenzsatz

Seien $U_h \subset U$ und $V_h \subset V$ endlich-dimensionale Räume. Die diskrete Aufgabe lautet:

$$a(u_h, v) =< f, v > \qquad \forall\ v \in V_h \tag{7.1}$$

Satz 7.3 *Es gelten die Bezeichnungen und Bedingungen aus Satz 7.2. Weiterhin seien $u_h \subset U,\ V_h \subset V$ so gewählt, dass gilt:*

2.$_h$ $\inf\limits_{u_h \in U_h} \sup\limits_{v_h \in V_h} \dfrac{a(u_h, v_h)}{\|u_h\| \|v_h\|} \geq \alpha$

und

3.$_h$ $\forall\ v_h \in V_h\ \exists\ u_h \in U_h$ *mit* $a(u_h, v_h) \neq 0$.

Dann gilt die Fehlerabschätzung:

$$\|u - u_h\| \leq \left(1 - \frac{C}{\alpha}\right) \inf_{w_h \in U_h} \|u - w_h\|$$

Beweis: Es gilt die Galerkin-Bedingung:

$$a(u - u_h, v) = 0 \qquad \forall\ v \in V_h$$

Damit gilt für ein beliebiges $w_h \in U_h$:

$$a(u - w_h, v) = a(u_h - w_h, v) \qquad \forall\ v \in V_h \tag{7.2}$$

Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} \alpha \|u_h - w_h\| &\leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u_h - w_h, v_h)}{\|v_h\|} \\ &\leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{a(u - w_h, v_h)}{\|v_h\|} \\ &\leq \sup_{v \in V} \frac{a(u - w_h, v)}{\|v\|} \\ &\leq C\ \frac{\|u - w_h\|\ \|v\|}{\|v\|} = C\ \|u - w_h\| \end{aligned}$$

Zusammen also:

$$\|u_h - w_h\| \leq \frac{C}{\alpha}\ \|u - w_h\|$$

Benutze nun die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|u - w_h + w_h - u_h\| &\leq \|u - w_h\| + \|w_h - u_h\| \\ &\leq \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|u - w_h\| \end{aligned}$$

□

7.2 Die Inf-sup-Bedingung

Aufgabe PS:
Gesucht wird $(u, \lambda) \in X \times M$ mit

$$\begin{aligned} a(u,\varphi) + b(\varphi,\lambda) &= <f,\varphi> \quad \forall\, \varphi \in X \\ b(u,q) &= <g,q> \quad \forall\, q \in M \end{aligned}$$

Abstrakte Situation PA:

$$L : X \times M \to X' \times M',\ (u,\lambda) \mapsto (f,g)$$

Satz 7.4 *Durch das Sattelpunktproblem PS wird mit PA genau dann ein Isomorphismus $L : X \times M \to X' \times M'$ erklärt, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Die Bilinearform a ist V-elliptisch, d.h. $\exists\ \alpha > 0$ und $V := \{v \in X \mid b(v,q) = 0$ für $q \in M\}$, so dass gilt:*

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \qquad \text{für } v \in V \subset X$$

2. $\exists\ \beta > 0$ *mit* $\inf\limits_{q \in M} \sup\limits_{v \in X} \dfrac{b(v,q)}{\|v\|\|q\|} \geq \beta$

Beweisbemerkung: Die abstrakte inf-sup-Bedingung aus Satz 7.2 kann hier durch Eigenschaften der Formen a und b ausgedrückt werden.

7.3 Gemischte Finite-Element-Methoden

Wähle $X_h \subset X, M_h \subset M$. Man löst:

PS_h: Gesucht wird $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ mit

$$\begin{aligned} a(u_h,\varphi) + b(\varphi,\lambda_h) &= <f,\varphi> \quad \forall\, \varphi \in X_h \\ b(u_h,q) &= <g,q> \quad \forall\, q \in M_h \end{aligned}$$

Definition 7.5 *Eine Familie von FE-Räumen X_h, M_h erfüllt die Babuska-Brezzi-Bedingung, wenn es von h unabhängige Zahlen $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

1.$_h$ *a ist V_h-elliptisch, d.h. mit $\alpha > 0$ und $V_h := \{v_h \in X_h \mid b(v_h, q_h) = 0$ für $q_h \in M_h\}$ gilt:*

$$a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|^2 \qquad \forall\ v_h \in V_h$$

2.$_h$ *Mit $\beta > 0$ gilt:*

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|\ \|q_h\|} \geq \beta$$

Satz 7.5 *Die Voraussetzungen von Satz 7.4 seien erfüllt und X_h, M_h mögen die Babuska-Brezzi-Bedingung erfüllen. Dann gilt die Fehlerabschätzung:*

$$\|u - u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\| \leq c \left(\inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\| + \inf_{q_h \in M_h} \|\lambda - q_h\| \right)$$

Beweis 1 *Anwendung des abstrakten Konvergenzsatzes 7.3* □

7.4 Diskrete Sattelpunktprobleme

Die Diskretisierung von PS durch PS_h führt auf das folgende System

$$\begin{array}{lcll} Au + B^T\lambda & = & f & A \in M(n,n) \quad f, u \in \mathbb{R}^n \\ Bu & = & g & B \in M(m,n) \quad g, \lambda \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

wobei A positiv definit ist.
Bemerke: A positiv definit $\Rightarrow$ A^{-1} existiert.
Somit lässt sich u schreiben als

$$u = A^{-1}(f - B^T\lambda)$$

Einsetzen in $Bu = g$ liefert:

$$\begin{array}{rcl} B(A^{-1}f - A^{-1}B^T\lambda) & = & g \\ \Leftrightarrow BA^{-1}B^T\lambda & = & BA^{-1}f - g \end{array}$$

Die implizit gegebene Matrix $S = BA^{-1}B^T$ heisst Schurkomplement.

Bemerke: A^{-1} heisst positiv definit $\Rightarrow$ $A^{-1} = LL^T$.

Wegen $S = BA^{-1}B^T = BLL^TB^T$ ist S symmetrisch und es gilt:

$$(S\lambda, \lambda) = (BLL^TB^T\lambda, \lambda) = (L^TB^T\lambda, L^TB^T\lambda) \geq 0 \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}^m$$

$\Rightarrow$ S positiv definit.

Zur Lösung von $BA^{-1}B^T\lambda = BA^{-1}f - g$ können also Gradientenverfahren und cg-Verfahren verwendet werden. Das Resultat ist $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$.
Berechne die Lösung u durch

$$u = A^{-1}f - A^{-1}B^T\bar{\lambda}.$$

Simultane cg-Variante

Algorithmus 7.1 *Uzawa-Algorithmus mit konjugierten Richtungen*

1. *Initialisierung:* $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$.
   $Au_1 = f - B^T\lambda_0, \quad d_1 = -q_1 = Bu_1 - g$

2. *Für* $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} p_k &= B^T d_k \\ h_k &= A^{-1} p_k \\ \alpha_k &= \frac{q_k^T q_k}{p_k^T h_k} \\ \lambda_k &= \lambda_{k-1} + \alpha_k d_k \\ u_{k+1} &= u_k - \alpha_k h_k \\ q_{k+1} &= g - B u_{k+1} \\ \beta_k &= \frac{q_{k+1}^T q_{k+1}}{q_k^T q_k} \\ d_{k+1} &= -q_{k+1} + \beta_k d_k \end{aligned}$$

Alternativen:
Algemeiner Ansatz:
$Gx = b,\ G \in M(N, N),\ x, b \in \mathbb{R}^N$

$$x_{k+1} = x_k + T^{-1}(b - Gx_k).$$

z.B. $T = diag(G)$ Jacobi-Verfahren
oder $T = (0 \backslash G)$ Gauss-Seidel-Verfahren.

Übertragung auf S:

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f - Au_k - B^T \lambda_k \\ g - Bu_k \end{pmatrix}$$

z.B. $C = diag(A)$.

Allgemein sollte C eine symmetrische, positiv definite Matrix sein, die

1. A approximiert.
2. Leicht invertierbar ist.

Algorithmus 7.2 *Über Defektkorrekturen*
Für $k = 1, 2, \ldots$

1. *Bestimme das Residuum* $\begin{pmatrix} r_k^u \\ r_k^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f - Au_k - B^T \lambda_k \\ g - Bu_k \end{pmatrix}$
2. *Berechne* $\begin{pmatrix} d_k^u \\ d_k^\lambda \end{pmatrix}$ *durch* $\begin{pmatrix} C & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k^u \\ d_k^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_k^u \\ r_k^\lambda \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k \\ \lambda_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_k^u \\ d_k^\lambda \end{pmatrix}$

7.5 Laplace-Gleichung als gemischtes Problem

Problem: Ergänzung zu Beispiel 7.2:
$\Delta u = -f$ kann man formal als System schreiben (o.B.d.A. auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$).

$$\begin{aligned} \nabla u &= \sigma \quad && u : \Omega \to \mathbb{R} \\ \partial_x \sigma_1 + \partial_y \sigma_2 = div\ \sigma &= -f && \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix},\ \sigma_i : \Omega \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

7.5.1 Primal-gemischte variationelle Formulierung

Gesucht ist $(\sigma, u) \in L_2(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)$ so, dass gilt:

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) - (\nabla u, \tau) &= 0 && \forall\ \tau \in L_2(\Omega)^2 \\ -(\sigma, \nabla \varphi) &= -(f, \varphi) && \forall\ \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

In den abstrakten Rahmen fällt dies mit

$X = L_2(\Omega)^2, M = H_0^1(\Omega)$
$a(\sigma, \tau) = (\sigma, \tau) := (\sigma_1, \tau_1) + (\sigma_2, \tau_2)$, $b(\tau, \varphi) = -(\tau, \nabla \varphi)$.

Nachweis:

1. (Bedingung 1. aus Satz 7.4)
   Wegen $\|\sigma\|^2 = a(\sigma, \sigma)$ ist a sogar elliptisch auf ganz X.

2. (Bedingung 2. aus Satz 7.4)
   Sei $v \in H_0^1(\Omega)$ gegeben. Wähle $\tau = -\nabla v \in L_2(\Omega)^2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|} &= \frac{-(\tau, \nabla v)}{\|\tau\|} \\ &= \frac{(\nabla v, \nabla v)}{\|v\|} \\ &= \|\nabla v\| \\ &\geq \frac{1}{2} \|v\|_1 \end{aligned}$$

   Also $\sup\limits_{\tau \in L_2(\Omega)^2} \dfrac{b(\tau, v)}{\|\tau\|} \geq \dfrac{1}{C} \|v\|_1$

Passende Finite Elemente

Triangulierung $\mathbb{T}_h$ mit Dreiecken. Wähle $k \geq 1$ und
$X_h = \{\sigma_h \in L_2(\Omega)^2 \mid \sigma_h|_T \in P_{k-1}\}$, $M_h = \{\varphi_h \in H_0^1(\Omega) \mid \varphi_h|_T \in P_k\}$.
Man beachte: X_h unstetiger, M_h stetiger Ansatz.

7.5.2 Dual-gemischte Formulierung

Vorbereitung: $H_{div} := \{\tau \in (L_2(\Omega))^2 \mid div\ \tau \in L_2(\Omega)\}$.
Zugehörige Norm: $\|\tau\|_{div}^2 = \|\tau\|^2 + \|div\ \tau\|^2$.

Für $v \in H_0^1(\Omega)$ und $\sigma \in H_{div}$ gilt:

$$(\sigma, \nabla v) = -(div\ \sigma, v)$$

Somit lautet die dual-gemischte Formulierung:

Gesucht ist $(\sigma, u) \in H_{div} \times L_2(\Omega)$, so dass gilt:

$$\begin{array}{lcll} (\sigma,\tau) + (u, div\ \tau) & = & 0 & \forall\ \tau \in H_{div} \\ (div\ \sigma, \varphi) & = & -(f,\varphi) & \forall\ \varphi \in L_2(\Omega) \end{array}$$

Dies fällt in den abstrakten Rahmen mit
$X := H_{div},\ M := L_2(\Omega),\ a(\sigma,\tau) = (\sigma,\tau),\ b(\tau, v) = (div\ \tau, v)$.

Bemerkung 7.1 $V = \{\tau \in H_{div} \mid (div\ \tau, v) = 0$ *für* $v \in L_2(\Omega)\}$.

Nachweis:

1. 1. aus Satz 7.4:

$$\begin{array}{rcll} a(\tau,\tau) = (\tau,\tau) & = & (\tau,\tau) + (div\ \tau, div\ \tau) \\ & = & \|\tau\|^2 + \|div\ \tau\|^2 \\ & = & \|\tau\|_{div}^2 \qquad \forall\ \tau \in V \end{array}$$

2. 2. aus Satz 7.4:
   zz: $\sup\limits_{\tau \in H_{div}} \dfrac{(div\ \tau, v)}{\|\tau\|_{div}} \geq \beta\ \|v\|$
   a) Sei $v \in L_2(\Omega)$ beliebig. Wähle dazu $w \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\|v - w\| \leq \frac{1}{2}\ \|v\|. \tag{7.3}$$

   (Wahl von w möglich: Dichtheitsargument)
   b) Man setze $\xi := \inf\{x_1 \mid x \in \Omega\}$ und $\tau_1(x) = \int\limits_\xi^{x_1} w(t, x_2)\ dt,\ \tau_2(x) = 0$.
   Damit ist offenbar $div\ \tau = \partial_{x_1}\tau_1 = w$.
   Nun folgt Argumentation ähnlich wie im Beweis zur Poincaré-Ungleichung:

$$|\tau(x)|^2 = |\tau_1(x)|^2 \leq \int\limits_\xi^{x_1} |w(t,x_2)|^2\ dt \leq \int\limits_\xi^{s} |w(t,x_2)|^2\ dt$$

mit $s = \max\{x_1 \mid x \in \Omega\}$.
Integration über x_1:

$$\int_\xi^s |\tau_1(x)|^2 \, dx_1 \le c \int_\xi^s |w(t, x_2)|^2 \, dt = c \int_\xi^s |w(x_1, x_2)|^2 \, dx$$

Intergration über x_2:

$$\|\tau\|^2 \le c \, \|w\|^2 \tag{7.4}$$

c) Ausgansgpunkt ist (7.3).

$$\begin{aligned} (v - w, v - w) &\le \frac{1}{4}\|v\|^2 \\ \Leftrightarrow \qquad 2(v, w) &\ge \frac{3}{4}\|v\|^2 + \|w\|^2 \\ \Rightarrow \qquad (v, w) &\ge \frac{3}{8}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|w\|^2 \ge c\|v\|^2 \end{aligned}$$

d) Auswertung von $\dfrac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_{div}}$.

$$\begin{aligned} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_{div}} &= \frac{(div\ \tau, v)}{\left(\|\tau\|^2 + \|div\ \tau\|^2\right)^{1/2}} \\ &\ge \frac{(div\ \tau, v)}{c\ \|w\|} \\ &= \frac{(w, v)}{c\ \|w\|} \\ &\ge \frac{c\|v\|^2}{d\ \|v\|} \\ &= c\ \|v\| \end{aligned}$$

Passende Finite Elemente

Das Raviart-Thomas-Element.

Zur Dual-gemischten Formulierung:
$X_h = \{\tau \in L_2(\Omega)^2 \mid \tau|_T = \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} + c_T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ für $T \in \mathbb{T}_h,\ a_T, b_T, c_T \in \mathbb{R}$,
$\tau \cdot n$ stetig an den Elementgrenzen$\}$
$M_h = \{v \in L_2(\Omega) \mid v|_T = d_T$ für $T \in \mathbb{T}_h,\ d_T \in \mathbb{R}\}$.

Bemerkung 7.2 *$div\ \tau|_T = \partial_{x_1}\tau_1 + \partial_{x_2}\tau_2 = c_T + c_T = const$ für $\tau \in X_h$.*

8 Themengebiete

Finanzmathematik

Gletscher

Mechanik

1. Simulation, Diskretisierung, Lösung, Analyse
2. Parameteridentifizierung, Inverse Probleme

Beispiel 8.1 $-\mu\Delta u = f$
Man kennt, z.B. durch Messung, u an verschiedenen Punkten.
Fragestellung μ?

Optionshandel

Eine Option ist z.B. das Recht, nicht die Verpflichtung, zu einem Zeitpunkt T eine Aktie zu kaufen, zum vorher festgelegten Preis K.

Bezeichnungen: S ist der Preis der Aktie, V ist der Wert der Option.

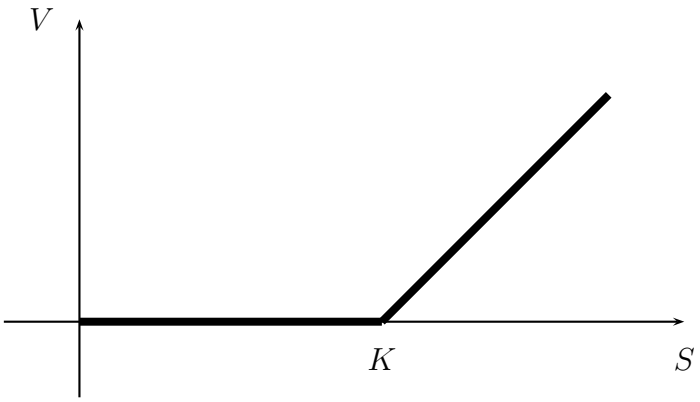


Abbildung 8.1: Pay-Off-Diagramm für $t = T$.

Modellierung des Optionshandels

Black-Scholes-Gleichung:

$$\partial_t V + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 V + rS\partial_S V - rV = 0$$

Durch Substitution:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} - \partial_x^2 y = 0$$

+ Randbedingungen, Anfangsbedingungen

Europäische Optionen: Handlung nur bei T.
Amerikanische Optionen: Handlung für $t \leq T$.

$$V_{Am} \geq V_{Euro}$$

Bei Amerikanischen Optionen gilt in schwacher Form:

$$(\partial_t y, \varphi - y) + (\partial_x y, \partial_x(\varphi - y)) \geq 0$$

+ Randbedingungen, Anfangsbedingungen

Gletscher

"Verbale" Modellierung:
Eis ist ein langsam fliessendes, temperaturabhängiges, inkompressibles Fluid.

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= -f \\ div\ u &= 0 \end{aligned}$$

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \Delta u = \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{pmatrix}$, u ist Vektor der Verschiebungen, p ist der skalare Druck.
Ω ist a-priori nicht bekannt.

Über Vereinfachung der Modellierung wird die Höhenfunktion h gesucht, für die gilt:

$$(\partial_t h, \varphi) + (c(h)\nabla h, \nabla\varphi) = (a, \varphi) \quad \text{auf } I$$

a ist die Akkumulationsfunktion, I ist unbekannt.
Wähle $\Omega \supset I$ gross genug:

$$\partial_t h, \varphi - h) + (c(h)\nabla h, \nabla(\varphi - h)) \geq (a, \varphi - h) \quad \text{auf } \Omega$$

Ω fest gewählt. Nebenbedingung: $h, \varphi \geq 0$

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + (u\nabla)u + \nabla p &= f \\ div\ u &= 0 \end{aligned}$$

Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben inkompressible Flüssigkeiten.
Nichtlineare Iteration:
Wähle u_0 als Startlösung
Iteriere $i = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u_i + (u_{i-1}\nabla u_i) + \nabla p_i &= f \\ div\ u_i &= 0 \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] D. Braess. *Finite Elemente.* Springer, 1997.

[2] R. Glowinski. *Numerical methods for nonlinear variational problems.* Springer Series in Comp. Physics. Springer, 1983.

[3] C. Grossmann and H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen.* Teubner Studienbücher, 1992.

[4] C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method.* Studentlitteratur, 1987.

[5] D. Kinderlehrer and Stampacchia G. *An introduction to variational inequalities and their applications.* Academic Press, 1980.

[6] H.R. Schwarz. *Methode der finiten Elemente.* Teubner, 1984.

[7] R. Seydel. *Tools for Computational Finance.* Springer, 2002.