

Nichtlineare Optimierung — Übungsblatt 1

Dr. Klaus Schönefeld
Max Kontak, M. Sc.

Wintersemester 2015/16

Department Mathematik
Fakultät IV, Universität Siegen

Zu bearbeiten bis zur Übung am 28.10.2015

Definition (Vektorungleichungen). Für zwei Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^n schreiben wir $u \leq v$, falls $u_k \leq v_k$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Aufgabe 1

Welche Teilmengen des \mathbb{R}^2 werden durch die folgenden Vektorungleichungen beschrieben? (Skizze!)

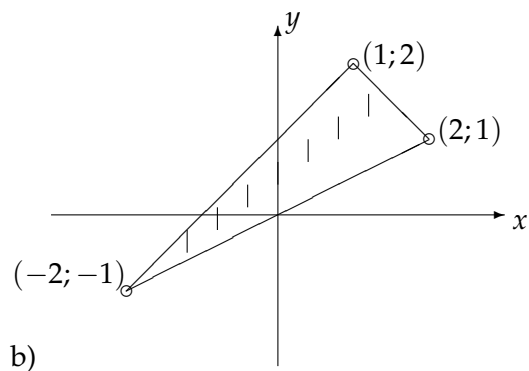
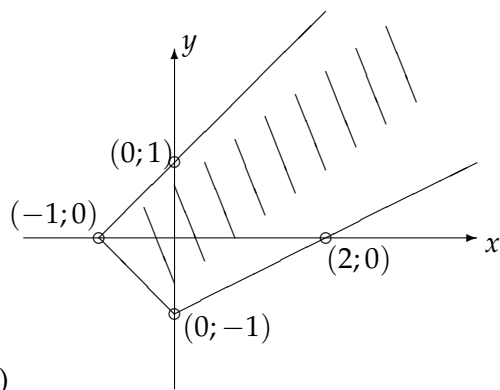
a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix},$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 2

Charakterisieren Sie die folgenden Bereiche des \mathbb{R}^2 durch Vektorungleichungen:



Aufgabe 3

Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem $z = \min!$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{lll} 5x_1 + x_2 \geq 10, & x_1 + 2x_2 \geq 6, & x_1 \geq 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 8, & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0. \end{array}$$

mit der Zielfunktion

- a) $z = 5x_1 + 4x_2 + 6,$ c) $z = -10x_1 - 12x_2,$
b) $z = 6x_1 + 12x_2 + 10,$ d) $z = 8x_1 - 15x_2 + 4x_3.$

Die vorliegende Aufgabe kann in ein lineares Optimierungsproblem mit zwei Veränderlichen überführt werden. Dieses Optimierungsproblem ist **grafisch** zu lösen.

— Zwei Modellierungsaufgaben —

Aufgabe 4

Zwei nicht teilbare Erzeugnisse E1 und E2 sind nacheinander auf den Maschinen M1 und M2 zu bearbeiten und anschließend auf den Montagestraßen S1 und S2 zu montieren. Es gelten folgende Kapazitätsbeschränkungen:

Auf M1 können 20 Stück von E1 oder 40 Stück von E2 oder eine entsprechende Kombination beider Erzeugnisse bearbeitet werden. Auf M2 können 30 Stück von E1 oder 30 Stück von E2 oder eine entsprechende Kombination beider Erzeugnisse bearbeitet werden. Auf S1 können 15 Stück von E1, auf S2 können 25 Stück von E2 montiert werden.

Für welches Produktionsprogramm erzielt der Betrieb maximalen Gewinn, wenn pro Stück E1 bzw. E2 der Gewinn 5 bzw. 10 Geldeinheiten beträgt? Man stelle ein mathematisches Modell auf und gebe **auf grafischem Wege** eine optimale Lösung an.

Aufgabe 5

Ein Busbetrieb habe den Einsatzplan für die Fahrer unter folgenden Zusatzbedingungen zu optimieren:

- Jeder Busfahrer arbeitet in zusammenhängenden Schichten von je acht Stunden,
- Als Schichtbeginn sind die Zeiten 0, 4, 6, 8, 12, 14, 16 und 20 Uhr möglich,
- Folgender Bedarf ist abzusichern:

Zeit (Uhr)	0–1	1–2	2–4	4–5	5–7	7–10	10–15	15–17	17–20	20–24
Anz. Busse	5	4	3	4	12	8	7	10	13	8

Stellen Sie ein mathematisches Modell zur Minimierung der Gesamtzahl der einzusetzenden Busfahrer auf.

Das Lösen der in Aufgabe 5 formulierten Optimierungsaufgabe ist nicht verlangt!