Nichtlineare Optimierung — Übungsblatt 2

Dr. Klaus Schönefeld — Department Mathematik
Max Kontak, M. Sc. — Fakultät IV, Universität Siegen

Wintersemester 2015/16 — **Zu bearbeiten bis zur Übung am 04.11.2015**

Aufgabe 6

Lösen Sie **grafisch** die Optimierungsaufgabe

$$f(x) \to \min!$$

unter den Bedingungen

$$x_1 + x_2 \leq 6, \qquad x_1 - 2x_2 \geq -8, \qquad x_1 - x_2 \leq 1, \qquad x_1 \geq 1, \qquad 2x_1 + x_2 \geq 6, \qquad x_2 \geq 0.$$

für die Zielfunktionen

a) $f(x) = 10\,(x_1 - 3.5)^2 + 20\,(x_2 - 4)^2$,

b) $f(x) = 10\,(x_1 - 2)^2 + 20\,(x_2 - 3)^2$,

c) $f(x) = -10\,(x_1 - 2)^2 - 20\,(x_2 - 3)^2$.

Aufgabe 7

Zeigen Sie mit Hilfe geeigneter Umformungen, dass sich die lineare Optimierungsaufgabe

$$f(x,y) = c^{\mathrm{T}} x + d^{\mathrm{T}} y \to \min! \qquad \text{bei} \qquad Ax + By \leq a, \qquad Cx + Dy = b, \qquad x \geq 0 \tag{1}$$

mit $x, c \in \mathbb{R}^n$, $y, d \in \mathbb{R}^p$, $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^s$ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{s\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{s\times p}$ *(also so, dass sämtliche Matrix-Vektor-Multiplikationen definiert sind...)* äquivalent in eine Aufgabe der Form

$$\tilde{f}(z) = \tilde{c}^{\mathrm{T}} z \to \min! \qquad \text{bei} \qquad \tilde{A} z \leq \tilde{b}, \qquad z \geq 0, \tag{2}$$

überführen lässt (d. h., dass $\tilde{A}$, $\tilde{c}$ und $\tilde{b}$ so gewählt werden können, dass aus jeder Optimallösung (x^*, y^*) von (1) eine Lösung z^* von (2) konstruiert werden kann und umgekehrt).

Aufgabe 8

Es seien $\hat{x}, \tilde{x}$ zwei Optimallösungen der Aufgabe

$$f(x) = c^{\mathrm{T}} x + d \to \min! \qquad \text{bei} \qquad Ax \leq a, \qquad Bx = b, \qquad x \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass dann auch alle Punkte auf der Verbindungsstrecke $[\hat{x}, \tilde{x}] := \{\, \lambda \hat{x} + (1-\lambda)\tilde{x} \mid \lambda \in [0,1] \,\}$ Optimallösungen sind, die Menge der Optimallösungen also konvex ist.

Aufgabe 9

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $a \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Man beweise, dass $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ genau dann Ecke der Menge

$$K = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq a, x \geq 0 \,\}$$

ist, wenn $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ a - A\bar{x} \end{pmatrix}$ Ecke der Menge

$$K^* = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n} \;\middle|\; Ax + y = a, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

ist.

Aufgabe 10

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte und konvexe Menge. Man zeige:

a) Die Menge K besitzt mindestens einen Eckpunkt, sofern sie nicht leer ist,

b) Enthält K mehr als ein Element, so existieren mindestens zwei Eckpunkte in K.

Hinweis. Man untersuche solche Punkte aus K, welche von einem festen Punkt maximalen Abstand haben.