Nichtlineare Optimierung — Übungsblatt 10

Dr. Klaus Schönefeld — Department Mathematik
Max Kontak, M. Sc. — Fakultät IV, Universität Siegen

Wintersemester 2015/16 — **Zu bearbeiten bis zur Übung am 13.01.2016**

Aufgabe 37

Gegeben sei die gleichheitsrestringierte NLOA

$$\begin{aligned} f(x) &= -x_1 x_2^2 \to \min! \\ \text{bei} \qquad h(x) &= 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{aligned}$$

(a) Man zeige, dass $x^*_\pm = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, \pm\sqrt{2})^T$ Lösungen der NLOA mit dem zugehörigen Lagrange-Multiplikator $u^*_\pm = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ sind.

(b) Für welche $t \geq 0$ ist die Hesse-Matrix $\nabla_{11} L(x^*, u^*; t)$ bezüglich des ersten Arguments der erweiterten Lagrange-Funktion

$$L(x, u; t) := f(x) + u\, h(x) + \frac{t}{2}\,(h(x))^2$$

positiv definit?

Aufgabe 38

Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\forall d \in T(x^*) : \qquad d^T \nabla f(x^*) \geq 0$$

genau dann erfüllt ist, wenn für beliebige $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ und kompakte $S \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $I_0(x^*) \subseteq J$ und $0 \in S$ gilt:

$$\mu(x^*) := \min \left\{ s^T \nabla f(x^*) \;\middle|\; s \in S\colon g_i(x^*) + s^T \nabla g_i(x^*) \leq 0 \; \forall i \in J \right\} = 0.$$

Aufgabe 39

Man beweise Lemma 3.10 aus der Vorlesung!

— Programmieraufgabe —

Aufgabe 40

Das SQP-Verfahren 3.4 für nichtlineare Optimierungsaufgaben kann durch die Ausstattung mit einer *Strategie der aktiven Mengen* modifiziert werden:

Führe die Schritte des Algorithmus 3.4 aus, wobei der Schritt S2 wie folgt verändert wird:

S2': Setze $I_k := \left\{ i \in I \;\middle|\; u_i^k > |g_i(x^k)| \right\}$.
Setze $u_i^{k+1} := 0$ für $i \in I \setminus I_k$.

Führe dann die restlichen Schritte aus S2 durch, wobei im Teilproblem (3.11) anstelle der Ungleichheitsnebenbedingungen die linearen Gleichheitsrestriktionen

$$\bar{g}_i(x; q^k) = 0 \qquad \text{für } i \in I_k.$$

zu beachten sind.

a) Unter den Voraussetzungen von Satz 3.5, Teil 2, zeige man für einen KKT-Punkt (x^*, u^*):

   $I_k = I_0(x^*)$ für $(x^k, u^k) \in B(x^*, u^*; \delta)$ mit einem $\delta > 0$.

b) (Programmieraufgabe) Führen Sie den obigen Algorithmus (H_k nach dem Wilson-Verfahren) für die NLOA aus der 7. Übung, Aufgabe 1, aus. Wählen Sie die Startwerte $x^0 = (1,1)^T$, $u^0 = (2,1,1)^T$.