

Nichtlineare Optimierung — Übungsblatt 2

Dr. Klaus Schönefeld
Naomi Schneider, M. Sc.
Wintersemester 2016/17

Department Mathematik
Fakultät IV, Universität Siegen
Zu bearbeiten bis zur Übung am 02.11.2016

Aufgabe 6

Lösen Sie **grafisch** die Optimierungsaufgabe

$$f(x) \rightarrow \min!$$

unter den Bedingungen

$$x_1 + x_2 \leq 6, \quad x_1 - 2x_2 \geq -8, \quad x_1 - x_2 \leq 1, \quad x_1 \geq 1, \quad 2x_1 + x_2 \geq 6, \quad x_2 \geq 0.$$

für die Zielfunktionen

- a) $f(x) = 10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2$, c) $f(x) = -10(x_1 - 2)^2 - 20(x_2 - 3)^2$.
b) $f(x) = 10(x_1 - 2)^2 + 20(x_2 - 3)^2$,

Aufgabe 7

Zeigen Sie mit Hilfe geeigneter Umformungen, dass sich die lineare Optimierungsaufgabe

$$f(x, y) = c^T x + d^T y \rightarrow \min! \quad \text{bei} \quad Ax + By \leq a, \quad Cx + Dy = b, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

mit $x, c \in \mathbb{R}^n$, $y, d \in \mathbb{R}^p$, $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^s$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{s \times p}$ (also so, dass sämtliche Matrix-Vektor-Multiplikationen definiert sind...) äquivalent in eine Aufgabe der Form

$$\tilde{f}(z) = \tilde{c}^T z \rightarrow \min! \quad \text{bei} \quad \tilde{A}z \leq \tilde{b}, \quad z \geq 0, \quad (2)$$

überführen lässt (d. h., dass \tilde{A} , \tilde{c} und \tilde{b} so gewählt werden können, dass aus jeder Optimallösung (x^*, y^*) von (1) eine Lösung z^* von (2) konstruiert werden kann und umgekehrt).

Aufgabe 8

Es seien \hat{x} , \tilde{x} zwei Optimallösungen der Aufgabe

$$f(x) = c^T x + d \rightarrow \min! \quad \text{bei} \quad Ax \leq a, \quad Bx = b, \quad x \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass dann auch alle Punkte auf der Verbindungsstrecke $[\hat{x}, \tilde{x}] := \{ \lambda \hat{x} + (1 - \lambda) \tilde{x} \mid \lambda \in [0, 1] \}$ Optimallösungen sind, die Menge der Optimallösungen also konvex ist.

Aufgabe 9

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $a \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Man beweise, dass $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ genau dann Ecke der Menge

$$K = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq a, x \geq 0 \}$$

ist, wenn $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ a - A\bar{x} \end{pmatrix}$ Ecke der Menge

$$K^* = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n} \mid Ax + y = a, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

ist.

Aufgabe 10

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte und konvexe Menge. Man zeige:

- a) Die Menge K besitzt mindestens einen Eckpunkt, sofern sie nicht leer ist,
- b) Enthält K mehr als ein Element, so existieren mindestens zwei Eckpunkte in K .

Hinweis. Man untersuche solche Punkte aus K , welche von einem festen Punkt maximalen Abstand haben.