Nichtlineare Optimierung — Übungsblatt 5

Dr. Klaus Schönefeld — Department Mathematik
Naomi Schneider, M. Sc. — Fakultät IV, Universität Siegen

Wintersemester 2016/17 — **Zu bearbeiten bis zur Übung am 23.11.2016**

Aufgabe 19

Beweisen Sie folgende alternative Formulierung des Lemma von Farkas:

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann hat das System

$$Ax \leq b \tag{1}$$

genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$, wenn

$$\text{Für alle } y \in \mathbb{R}^m \text{ mit } y \geq 0 \text{ und } A^T y = 0 \text{ gilt: } b^T y \geq 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass (1) genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ hat, wenn das System

$$A'x' = b$$

mit $A' = \begin{pmatrix} I_m, & A, & -A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(m+2n)}$ eine Lösung $x' \in \mathbb{R}^{m\times(m+2n)}$ mit $x' \geq 0$ hat. I_m bezeichnet hierbei die $m \times m$-Einheitsmatrix.

Aufgabe 20

Beweisen Sie Lemma 2.15:

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $d \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung mit $\nabla\varphi(x)^T d < 0$. Dann gibt es eine Zahl $\tau > 0$, so dass $\varphi(x) > \varphi(x + td)$ für alle $t \in (0, \tau]$.

Aufgabe 21

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 4(y-t)^4 \to \min!$$

$$\text{u. d. B.} \qquad \begin{pmatrix} 1-x-y \\ 1-x+y \\ 1+x-y \\ 1+x+y \end{pmatrix} \geq 0.$$

a) Für welche Werte des Parameters t erfüllt der Punkt $x^* = (1, 0)$ die KKT-Bedingungen?

b) Finden Sie anhand einer Skizze für $t = 1$ die Optimallösung und zeigen Sie, dass dieser Punkt ein KKT-Punkt ist.

Aufgabe 22

Stellen Sie die KKT-Bedingungen für das folgende Optimierungsproblem auf:

$$f(x,y) = \frac{-x+3y-3}{2x+y+6} \to \min!$$

$$\text{u. d. B.} \qquad 2x + y \leq 12, \qquad 3y - x \leq 3, \qquad x, y \geq 0$$

und zeigen Sie, dass alle Punkte auf der Verbindungsstrecke von $(0,0)$ nach $(6,0)$ Lösungen des Problems sind.