Nichtlineare Optimierung — Übungsblatt 7

Dr. Klaus Schönefeld — Department Mathematik
Naomi Schneider, M. Sc. — Fakultät IV, Universität Siegen
Wintersemester 2016/17 — **Zu bearbeiten bis zur Übung am 07.12.2016**

Aufgabe 27

Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für eine lokale Minimumsstelle x^* der NLOA (12):

i) Die Regularitätsbedingung (MFCQ) gilt in x^*,

ii) Die Menge der zu x^* gehörenden Lagrange-Multiplikatoren ist nichtleer und beschränkt.

Aufgabe 28

Im $\mathbb{R}^3$ sei die folgende Optimierungsaufgabe gegeben:

$$f(x) = \frac{1}{x_1} + \frac{4}{x_2} + \frac{9}{x_3}$$
$$\text{bei} \qquad x_1 + x_2 + x_3 \leq 12, \qquad x_1, x_2, x_3 > 0.$$

a) Bestimmen Sie eine Lösung dieser Aufgabe.

   Hinweise:

   – Ersetzen Sie die Nebenbedingungen $x_j > 0$ durch $x_j \geq \varepsilon$, $j = 1, 2, 3$.

   – Rechtfertigen Sie diese Änderung durch die Begründung, weshalb diese veränderten Nebenbedingungen (für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$) im Lösungspunkt nicht aktiv sein können.

b) Warum besitzt die Optimierungsaufgabe keine weiteren Lösungen?

— Programmieraufgabe —

(Wenn Sie Schwierigkeiten beim Programmieren haben,
melden Sie sich bitte frühzeitig persönlich oder per E-Mail bei Frau Schneider.)

Aufgabe 29

a) Implementieren Sie das *Newton-Verfahren für die Gleichungen in den KKT-Bedingungen* aus Algorithmus 2.31 aus der Vorlesung.

   Vorschlag: Schreiben Sie dazu (falls Sie MATLAB/Octave benutzen) eine Funktion, die folgende Eingabeparameter enthält:

   - Den Gradienten $\nabla_1 L$ und die Hesse-Matrix $\nabla_{11} L$ der Lagrange-Funktion als *function handles/anonyme Funktionen*, jeweils abhängig von den primalen und dualen Variablen,
   - die Nebenbedingungen g und ihre Gradienten ∇g als vektorwertige *function handles/anonyme Funktionen*,
   - die Dimension n und die Anzahl der Nebenbedingungen m, falls Sie diese benötigen,
   - je einen Startwert x_0 für die primale bzw. u_0 für die duale Variable.

   Lassen Sie in jedem Iterationsschritt n des Newton-Verfahrens die aktuelle Approximation (x_n, u_n) ausgeben.

b) Testen Sie Ihr Programm an der Optimierungsaufgabe

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \to \text{min!},$$
$$\text{bei } g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ -x_1 - x_2 - 2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i) Bestimmen Sie (analytisch) die lokalen Optimallösungen der Optimierungsaufgabe, die zugehörigen Lagrange-Parameter und aktiven Nebenbedingungen.

ii) Lassen Sie ihr Programm für verschiedene Startwerte (x_0, u_0) laufen.

iii) Konvergiert das Verfahren immer gegen eine der Optimallösungen? Entspricht die Konvergenzgeschwindigkeit Ihren Erwartungen? Finden Sie Startwerte, für die das Verfahren sehr langsam oder gar nicht konvergiert?