Nichtlineare Optimierung — Übungsblatt 8

Dr. Klaus Schönefeld — Department Mathematik
Naomi Schneider, M. Sc. — Fakultät IV, Universität Siegen

Wintersemester 2016/17 — **Zu bearbeiten bis zur Übung am 14.12.2016**

Aufgabe 30

Eine quadratische Funktion f im $\mathbb{R}^n$ sei gegeben durch

$$f(x) := \frac{1}{2}x^T Cx + d^T x + e$$

mit einer symmetrischen Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $d \in \mathbb{R}^n$, $e \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie:

a) f ist genau dann konvex, wenn C positiv semi-definit ist,

b) f ist genau dann streng konvex, wenn C positiv definit ist,

c) f ist genau dann streng konvex, wenn f stark konvex ist.

Aufgabe 31

Gegeben sei die nichtlineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}x_1^2 + x_3 \to \min! \\ \text{bei} \quad & x_1^2 + x_2 + x_3 \geq 0, \qquad x_1^2 - x_2 + x_3 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Es sei $x^* = (0, 0, 0)^T$.

a) Gibt es Lagrange-Multiplikatoren u^* derart, dass (x^*, u^*) ein KKT-Punkt ist?

b) Welche der Regularitätsbedingungen (CQ), (MFCQ), (LICQ) sind in x^* erfüllt?

c) Kann mit Hilfe des Satzes über die hinreichenden KKT-Bedingungen gezeigt werden, dass x^* ein lokales Minimum ist?

d) Von welcher Art ist der Punkt tatsächlich?

Aufgabe 32

Gegeben sei die quadratische Optimierungsaufgabe

$$f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1 + x_2 \to \min!$$

$$\text{bei} \qquad g(x) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0.$$

Implementieren Sie das *Verfahren der aktiven Mengen* (Algorithmus 3.2), um numerisch eine Lösung dieser Aufgabe zu bestimmen.

Wählen Sie dazu die Startwerte $x^0 = (5,0)^T$, $u^0 = (0,0,0,0,0,0)^T$.

Geben Sie in jedem Iterationsschritt ($k = 0, 1, 2, \ldots$) I_k, x^k, u^k und s^k aus und lassen Sie den erlaubten Bereich sowie die einzelnen x^k graphisch ausgeben.