Nichtlineare Optimierung — Übungsblatt 9

Dr. Klaus Schönefeld
Naomi Schneider, M. Sc.
Department Mathematik
Fakultät IV, Universität Siegen

Wintersemester 2016/17 **Zu bearbeiten bis zur Übung am 21.12.2016**

Aufgabe 33

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Für den Operator

$$\tilde{P}_1(x,u) = \begin{pmatrix} \nabla_1 L(x,u) \\ \min\{-g_1(x), u_1\} \\ \vdots \\ \min\{-g_m(x), u_m\} \end{pmatrix}$$

gilt $\tilde{P}_1(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ genau dann, wenn $(\bar{x}, \bar{u})$ ein KKT-Punkt der NLOA (3.7) ist.

Definition. Der Punkt (x^*, u^*, r^*) mit $u^* \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$, $r^* \geq 0$, $x^* \in \mathbb{R}^m$ heißt *Fritz-John-Punkt* der NLOA (12) mit m Nebenbedingungen, falls

$$r^* \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I_0(x^*)} u_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$$

für $r^* + (u^*)^T u^* > 0$.

Aufgabe 34

Es sei x^* eine lokale Minimumsstelle der NLOA (12) mit stetig differenzierbarer Zielfunktion f. Weiterhin sei die Regularitätsbedingung (MFCQ) in x^* erfüllt.

a) Man zeige: Ist (x^*, u^*, r^*) ein Fritz-John-Punkt, dann gilt $r^* > 0$.

   Bemerkung: Es ist also (unter diesen Voraussetzungen) jeder Fritz-John-Punkt auch ein KKT-Punkt.

b) Man finde ein Gegenbeispiel zur obigen Aussage, wenn MFCQ nicht erfüllt ist.

Aufgabe 35

Zeigen Sie folgende geometrische Interpretation der Fritz-John-Bedinung:

(x^*, u^*, r^*) ist Fritz-John-Punkt genau dann, wenn $T^0(x^*) \cap F(x^*) = \emptyset$.

Dabei ist $F(x) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \nabla f(x)^T d < 0 \right\}$ der Kegel der Abstiegsrichtungen von f.

Aufgabe 36

> **St. Niklas' Auszug** von Paula Dehmel (1862-1918)
>
> St. Niklas zieht den Schlafrock aus,
> klopft seine lange Pfeife aus [...]
> [und kommt] ins himmlische Werkstättenhaus.
> Da sitzen die Englein an langen Tischen,
> ab und zu Feen dazwischen,
> die den kleinsten zeigen, wie's zu machen,
> und weben und kleben die niedlichsten Sachen, [...]
> Was fertig ist wird eingesackt
> und auf das Eselchen gepackt.
> Und es fängt tüchtig an zu schnei'n,
> da muss er schon vorsichtig sein!
>
> So geht es durch die Wälder im Schritt,
> manch Tannenbäumchen nimmt er mit,
> und wo er wandert, bleibt im Schnee
> manch Futterkörnchen für Hase und Reh. [...]

Da es so tüchtig schneit, darf das Eselchen mit maximal 20 Päckchen oder 5 Tannenbäumchen oder 30 Einheiten Futterkörnchen beladen werden. St. Niklas macht unterwegs vier mal Rast, um Futterkörnchen ab- und Bäumchen aufzuladen. Dabei darf er jeweils höchstens 12 Futtereinheiten hinterlassen. Um jede zu bescherende Familie auch mit einem Baum zu bedenken, muss das Verhältnis von Päckchen zu Tannenbäumchen mindestens 3:1 betragen. Lösen Sie für den Nikolaus nun folgende Aufgabe:

a) Formulieren Sie das Optimierungsproblem für die Startladung (x_1 Päckchen und x_2 Futtereinheiten) sowie die vier Austausche von Futterkörnchen gegen Bäumchen (x_3, x_4, x_5 und x_6).

b) Ermitteln Sie auf numerischem Wege eine Lösung dieses Optimierungsproblems.

— Programmieraufgabe —

Aufgabe 37

Implementieren Sie das SQP-Verfahren aus Algorithmus 3.4, wobei Sie zur Lösung der quadratischen Aufgabe in jedem Schritt das Verfahren aus Aufgabe 32 benutzen können.

Testen Sie ihre Implementierung an den NLOA aus den Aufgaben 21 (für verschiedene t) und 26.