Nichtlineare Optimierung — Übungsblatt 9

Dr. Klaus Schönefeld
Andrej Garanza, M. Sc.
Department Mathematik
Fakultät IV, Universität Siegen

Sommersemester 2018 **Zu bearbeiten bis zur Übung am 26.06.2018**

Aufgabe 33

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Für den Operator

$$\tilde{P}_1(x,u) = \begin{pmatrix} \nabla_1 L(x,u) \\ \min\{-g_1(x), u_1\} \\ \vdots \\ \min\{-g_m(x), u_m\} \end{pmatrix}$$

gilt $\tilde{P}_1(\bar{x},\bar{u}) = 0$ genau dann, wenn $(\bar{x},\bar{u})$ ein KKT-Punkt der NLOA (3.7) ist.

Aufgabe 34

St. Niklas Auszug

> St. Niklas zieht den Schlafrock aus,
> klopft seine lange Pfeife aus [...]
> und kommtins himmlische Werkstättenhaus.
> Da sitzen die Englein an langen Tischen,
> ab und zu Feen dazwischen,
> die den kleinsten zeigen, wie's zu machen,
> und weben und kleben die niedlichsten Sachen, [...]
> Was fertig ist wird eingesackt
> und auf das Eselchen gepackt.[...]
> Und es fängt tüchtig an zu schnein,
> da muss er schon vorsichtig sein!
> So geht es durch die Wälder im Schritt,
> manch Tannenbäumchen nimmt er mit,
> und wo er wandert, bleibt im Schnee
> manch Futterkörnchen für Hase und Reh.[...]

Da es so tüchtig schneit, darf das Eselchen mit maximal 20 Päckchen oder 5 Tannenbäumchen oder 30 Einheiten Futterkörnchen beladen werden. St. Niklas macht unterwegs vier mal Rast, um Futterkörnchen ab- und Bäumchen aufzuladen. Dabei darf er jeweils höchstens 12 Futtereinheiten hinterlassen. Um jede zu bescherende Familie auch mit einem Baum zu bedenken, muss das Verhältnis von Päckchen zu Tannenbäumchen mindestens 3:1 betragen. Lösen Sie für den Nikolaus nun folgende Aufgabe:

(a) Formulieren Sie das Optimierungsproblem für die Startladung (x_1 Päckchen und x_2 Futtereinheiten) sowie die vier Austausche von Futterkörnchen gegen Bäumchen (x_3 , x_4 , x_5 und x_6).

(b) Ermitteln Sie auf numerischem Wege eine Lösung dieses Optimierungsproblemes.

Aufgabe 35

Gegeben sei die gleichheitsrestringierte NLOA

$$\begin{aligned} & f(x) = -x_1 x_2^2 \to \min! \\ \text{bei} \quad & h(x) = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{aligned}$$

(a) Man zeige, dass $x_\pm^* = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, \pm\sqrt{2})^T$ Lösungen der NLOA mit dem zugehörigen Lagrange-Multiplikator $u_\pm^* = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ sind.

(b) Für welche $t \geq 0$ ist die Hesse-Matrix $\nabla_{11} L(x^*, u^*; t)$ bezüglich des ersten Arguments der erweiterten Lagrange-Funktion

$$L(x, u; t) := f(x) + u\, h(x) + \frac{t}{2}\, (h(x))^2$$

positiv definit?

— Programmieraufgabe —

Aufgabe 36

Das SQP-Verfahren 3.4 für nichtlineare Optimierungsaufgaben kann durch die Ausstattung mit einer *Strategie der aktiven Mengen* modifiziert werden:

Führe die Schritte des Algorithmus 3.4 aus, wobei der Schritt S2 wie folgt verändert wird:

S2': Setze $I_k := \left\{ i \in I \;\middle|\; u_i^k > |g_i(x^k)| \right\}$.
Setze $u_i^{k+1} := 0$ für $i \in I \setminus I_k$.

Führe dann die restlichen Schritte aus S2 durch, wobei im Teilproblem (3.11) anstelle der Ungleichheitsnebenbedingungen die linearen Gleichheitsrestriktionen

$$\bar{g}_i(x; q^k) = 0 \qquad \text{für } i \in I_k.$$

zu beachten sind.

a) Unter den Voraussetzungen von Satz 3.5, Teil 2, zeige man für einen KKT-Punkt (x^*, u^*):
$I_k = I_0(x^*)$ für $(x^k, u^k) \in B(x^*, u^*; \delta)$ mit einem $\delta > 0$.

b) (Programmieraufgabe) Führen Sie den obigen Algorithmus (H_k nach dem Wilson-Verfahren) für die NLOA aus der 7. Übung, Aufgabe 1, aus. Wählen Sie die Startwerte $x^0 = (1, 1)^T$, $u^0 = (2, 1, 1)^T$.