

# Partielle Differentialgleichungen

Vorlesung von F.-T. Suttmeier  
Sommersemester 2008

6. August 2008

# Kapitel I

## Einleitung

Eine partielle Differentialgleichung (PDGL) ist eine Gleichung, die eine unbekannte (zu bestimmende) Funktion von zwei oder mehr Variablen und bestimmte partielle Ableitungen enthält.

**Notationen:**

- $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  ist eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

- Wir betrachten Abbildungen

$$u : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$  ( $x \in \mathcal{U}$ ).

- $e_i \in \mathbb{R}^n$  ist der Standard-Koordinatenvektor

$$e_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ Nullen}}, 1, 0, \dots, 0).$$

- Für partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}$$

werden auch die Schreibweisen

$$\partial_{x_i} u(x) \text{ und } u_{x_i}$$

verwendet.

- **(Multi-Index-Schreibweise)** Ein Vektor  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$  heißt Multiindex der Ordnung  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

Wir definieren

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x)$$

und weiter

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\}.$$

Spezialfälle:

$$D^1u = Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

$$D^2u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 u & \dots & \partial_{x_1} \partial_{x_n} u \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} \partial_{x_1} u & \dots & \partial_{x_n}^2 u \end{pmatrix}$$

**Definition I.1** Ein Ausdruck der Form

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad (x \in \mathcal{U}) \quad (\text{I.1})$$

heißt **partielle Differentialgleichung der Ordnung  $k$** , wobei

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben ist.

**Aufgabe:** Gesucht sind alle

$$u : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R},$$

die (I.1) erfüllen.

**Übung I.1** Diskutiere den Fall  $n = 1, k = 1$ .

**Übung I.2** Diskutiere den Fall  $k = 0$ .

**Definition I.2** i) Eine PDGL heißt **linear**, falls sie die Form

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x).$$

für gegebene Funktionen  $a_\alpha$  ( $|\alpha| \leq k$ ) und  $f$  besitzt.

ii) Eine PDGL heißt **semilinear**, falls sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

hat.

iii) Eine PDGL heißt **quasi-linear**, falls sie die Form

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u(x) + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

hat.

**Definition I.3** (heuristisch) Ein System partieller DGL ist eine Sammlung mehrerer PDGL für mehrere unbekannte Funktionen.

**Definition I.4** Ein Ausdruck der Form

$$\mathbf{F}(D^k \mathbf{u}(x), D^{k-1} \mathbf{u}(x), \dots, D\mathbf{u}(x), \mathbf{u}(x), x) = 0 \quad (x \in \mathcal{U})$$

heißt ein **System partieller Differentialgleichungen** der Ordnung  $k$ , wobei

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{mn^k} \times \mathbb{R}^{mn^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

gegeben ist.

**Aufgabe:** Gesucht sind alle

$$\mathbf{u} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m).$$

**Beispiele**

1.

$$\partial_{x_1} u(x_1, \dots, x_n) = 0$$

ist eine PDGL der Ordnung 1.

Lösungen hängen nur von  $x_2, \dots, x_n$  ab.

Nachrechnen!

2. Betrachte im Fall  $n = 2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Dies ist eine PDGL 2. Ordnung.

Lösungen haben die Form

$$u(x_1, x_2) = v(x_1) + w(x_2)$$

mit beliebigen differenzierbaren Funktionen  $v$  und  $w$ .

3. Sei  $f$  stetig in  $\mathbb{R}^2$ . Betrachte die PDGL 2. Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f(x_1, x_2).$$

Bestimme eine Lösung via Integration:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \int_0^{x_2} \frac{\partial^2 u(x_1, \eta_2)}{\partial x_1 \partial x_2} d\eta_2 + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, 0) \\ &= \int_0^{x_2} f(x_1, \eta_2) d\eta_2 + \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, 0) \\ \Rightarrow u(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \frac{\partial u(\eta_1, x_2)}{\partial x_1} d\eta_1 + u(0, x_2) \\ &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 + \int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\eta_1, 0) d\eta_1 + u(0, x_2) \\ \Rightarrow u(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 + u(x_1, 0) + u(0, x_2) - u(0, 0) \end{aligned}$$

Dies ist eine Lösung für jede Vorgabe von  $u(x_1, 0)$  und  $u(0, x_2)$ .

4. Seien  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Betrachte die Differentialgleichung

$$\alpha_1 \partial_{x_1} u + \alpha_2 \partial_{x_2} u = 0.$$

Sie besitzt die Lösung

$$u(x_1, x_2) = w(\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2)$$

für jede differenzierbare Funktion in einer Variablen.

Nachrechnen!

5. Die PDGL 2. Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

hat die Lösungen

$$u(x_1, x_2) = f(x_1 - x_2) + g(x_1 + x_2)$$

mit beliebigen zweimal differenzierbaren Funktionen  $f$  und  $g$  einer Variablen.

Nachrechnen!

Wir bemerken:

PDGL können sehr viele Lösungen haben.

Zur eindeutigen Festlegung benötigt man Zusatzbedingungen.

Eine Möglichkeit sind Anfangsbedingungen. Man schreibt für eine PDGL der Ordnung  $p$  in  $n$  Variablen die Werte von  $u$  und seiner Ableitungen der Ordnung  $< p$  auf einer Mannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$  vor.

**Übung I.3** Diskutiere den Fall  $n = 1$ .

**Bemerke:** Funktionswerte und Ableitungen können nicht unabhängig voneinander vorgegeben werden. Die „inneren“ Ableitungen der Mannigfaltigkeit sind ja schon durch die Funktionswerte entlang der Mannigfaltigkeit bestimmt.

## I.1 Cauchysche Anfangswertaufgabe

Man schreibt  $u$  und seine Ableitungen bis zur Ordnung  $p - 1$  in einer aus der Mannigfaltigkeit herausführenden Richtung, zum Beispiel der Normalen, vor.

Wir wollen uns dies an Hand des Beispiels  $n = 2$  klarmachen. Die  $(n - 1)$ -dimensionale Anfangsmannigfaltigkeit ist dann eine ebene Kurve

$$\Gamma : x = \varphi(s),$$

die nach der Bogenlänge parametrisiert ist, das heißt

$$\|\varphi'(s)\| = \sqrt{\varphi_1'(s)^2 + \varphi_2'(s)^2} = 1.$$

Tangential und Normaleneinheitsvektor sind dann

$$\begin{aligned}\tau &= \varphi', \\ \nu &= (-\varphi_2', \varphi_1').\end{aligned}$$

Das Anfangswertproblem für eine Differentialgleichung erster Ordnung besteht einfach in der Vorgabe von  $u$  entlang  $\Gamma$ , also

$$u(\varphi(s)) = f(s).$$

Bei einer Differentialgleichung zweiter Ordnung schreibt man darüber hinaus die Ableitungen erster Ordnung von  $u$  entlang  $\Gamma$  vor. Die Ableitung in Richtung  $\tau$  ist aber durch  $f$  bereits bestimmt, denn es gilt ja

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\varphi(s)) = \frac{d}{dt}u(\varphi(s) + t\tau)|_{t=0} = \tau \cdot \mathbf{grad} u(\varphi(s)) = \varphi'(s) \cdot \mathbf{grad} u(\varphi(s)) = f'(s).$$

Also genügt bereits die Vorgabe von

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\varphi(s)) = g(s).$$

**Beispiel:**

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$$

Auf der Anfangsmannigfaltigkeit  $x_1 = 0$  wird

$$u(0, x_2) = f(x_2)$$

vorgeschrieben.

Die Lösung dieser Anfangswertaufgabe ist offenbar

$$u(x_1, x_2) = f(x_2),$$

und diese Lösung ist eindeutig bestimmt.

Nun versuchen wir als Anfangsmannigfaltigkeit  $x_2 = 0$  und schreiben dort

$$u(x_1, 0) = f(x_1)$$

vor. Diese Anfangswertaufgabe ist offenbar nur lösbar, wenn  $f$  konstant ist, und in diesem Fall ist jede Funktion

$$u(x_1, x_2) = w(x_2)$$

mit  $w(0) = f(0)$  eine Lösung.

**Beispiele:**

1. Für die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

werden auf  $\Gamma = \{x|x_2 = 0\}$  die Anfangsdaten

$$\begin{aligned} u(x_1, 0) &= f(x_1) \\ \partial_n u(x_1, 0) &= \partial_{x_2} u(x_1, 0) = g(x_1) \end{aligned}$$

vorgegeben.

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung hat die Form

$$u(x_1, x_2) = v(x_1 + x_2) + w(x_1 - x_2)$$

mit beliebigen zweimal differenzierbaren Funktionen  $v$  und  $w$ . Damit lassen sich die Anfangsbedingungen schreiben als

$$\begin{aligned} v(x_1) + w(x_1) &= f(x_1); \quad v'(x_1) - w'(x_1) = g(x_1) \\ \Rightarrow \quad v + w &= f; \quad (v - w)(\xi) = \int_0^\xi g(\nu) d\nu + c \\ \Rightarrow \quad v(\xi) &= \frac{f(\xi) + \int_0^\xi g(\nu) d\nu + c}{2}; \quad w(\xi) = \frac{f(\xi) - \int_0^\xi g(\nu) d\nu - c}{2} \\ \Rightarrow \quad u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left( f(x_1 + x_2) + \int_0^{x_1+x_2} g(\nu) d\nu + f(x_1 - x_2) - \int_0^{x_1-x_2} g(\nu) d\nu \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) + \int_{x_1-x_2}^{x_1+x_2} g(\nu) d\nu \right) \end{aligned}$$

Dies ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

2. Es wird wieder die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

untersucht, jedoch werden nun Anfangsdaten auf der Winkelhalbierenden

$$\Gamma = \{x|x_1 = x_2\}$$

vorgegeben:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_1) &= f(x_1) \\ \partial_n u(x_1, x_1) &= \partial_{x_1} u(x_1, x_1) - \partial_{x_2} u(x_1, x_1) = g(x_1) \end{aligned}$$

Setzt man hier die allgemeine Lösungsformel ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} v(2x_1) + w(0) &= f(x_1); & v'(2x_1) + w'(0) - v'(2x_1) + 2'(0) &= g(x_1) \\ \Rightarrow v(2x_1) + w(0) &= f(x_1); & 2w'(0) &= g(x_1) \\ \Rightarrow g &\equiv 2w'(0) = \text{const}; & v(\xi) &= f(\xi/2) - w(0) \\ \Rightarrow u(x_1, x_2) &= f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - w(0) + w(x_1 - x_2) \quad \forall w : w'(0) = \frac{g}{2} \end{aligned}$$

Diese Anfangswertaufgabe ist also nur dann lösbar, wenn  $g \equiv \text{const}$  eine konstante Funktion ist und in diesem Fall ist die Lösung **nicht** eindeutig. (Die Funktion  $w$  wird nur durch die Vorgabe der ersten Ableitung in einem Punkt eingeschränkt.)

3. Für die Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

werden auf  $\Gamma = \{x|x_2 = 0\}$  die Anfangsdaten

$$\begin{aligned} u(x_1, 0) &= f(x_1) \\ \partial_n u(x_1, 0) &= \partial_{x_2} u(x_1, 0) = 0 \end{aligned}$$

vorgegeben.

Die allgemeine Lösung der Potentialgleichung ist

$$u(x_1, x_2) = v(x_1 + ix_2) + w(x_1 - ix_2).$$

Setzt man diese in die Anfangsbedingungen ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} v(x_1) + w(x_1) &= f(x_1); & v'(x_1) - w'(x_1) &= 0 \\ \Rightarrow v(\xi) + w(\xi) &= f(\xi) & v(\xi) - w(\xi) &= \int_0^\xi 0 d\nu - v(0) + w(0) \\ \Rightarrow v(\xi) &= \frac{1}{2}(f(\xi) - v(0) - w(0)) & w(\xi) &= \frac{1}{2}(f(\xi) + v(0) - w(0)) \\ \Rightarrow u(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(f(x_1 + ix_2) + f(x_1 - ix_2)) \end{aligned}$$

Diese Lösung ist eindeutig.

Konkret für  $f(s) = f_m(s) = e^{ims}$  ergibt sich die Lösungsfunktion

$$u_m(x_1, x_2) = \cosh(mx_2)e^{imx_1}.$$

Für die Anfangsdaten  $f_m$  gilt  $|f_m(s)| = 1$ , für die Lösungsfunktion  $u_m$  ergibt jedoch der Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$  für  $x_2 \neq 0$

$$|u_m(x_1, x_2)| = \cosh(mx_2) \rightarrow \infty.$$

Also ist der Lösungsoperator

$$f \rightarrow u,$$

der den Anfangsdaten  $f$  die Lösung des Anfangswertproblems  $u$  zuordnet, nicht stetig.



# Kapitel II

## Differentialgleichungen erster Ordnung

Wir betrachten Differentialgleichungen erster Ordnung in  $\mathbb{R}^2$ . Wir beginnen mit Gleichungen der Form

$$a_1(x, y)\partial_x u + a_2(x, y)\partial_y u = a_3(x, y, u)$$

oder speziell  $a_3(x, y, u) = b(x, y) \cdot u + c(x, y)$ .

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir:

$$a_1(x)u'(x) = a_3(x, u(x)) \quad (\text{Differentialgleichung})$$

$$u(x_0) = u_0 \quad (\text{Anfangswert})$$

ist lokal eindeutig lösbar.

Die analoge Aufgabenstellung („Cauchysche Anfangswertaufgabe“) lautet

$$a_1(x, y)\partial_x u + a_2(x, y)\partial_y u = a_3(x, y, u) \quad (\text{DGL})$$

$$u(\gamma_1(\sigma), \gamma_2(\sigma)) = \varphi(\sigma) \quad (\text{Anfangswert}),$$

wobei

$$\gamma : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

eine glatte Anfangskurve sei.

Um die Aufgabe zu lösen, möchte man mehr über  $u$  auf der Anfangs(wert)kurve  $\gamma$  wissen.

Also zum Beispiel:

„Wie sieht  $\nabla u(x, y)$  entlang  $\gamma$  aus?“

i) Anfangswert:

$$u(\gamma_1(\sigma), \gamma_2(\sigma)) = \varphi(\sigma)$$

$$\Rightarrow \partial_x u \cdot \partial_\sigma \gamma_1(\sigma) + \partial_y u \cdot \partial_\sigma \gamma_2(\sigma) = \partial_\sigma \varphi(\sigma)$$

ii) Differentialgleichung:

$$a_1(\gamma_1(\sigma), \gamma_2(\sigma))\partial_x u + a_2(\gamma_1(\sigma), \gamma_2(\sigma))\partial_y u = a_3(\gamma_1(\sigma), \gamma_2(\sigma), \varphi(\sigma))$$

i) und ii) lassen sich auch in kompakter Form als

$$\begin{pmatrix} \partial_\sigma \gamma_1 & \partial_\sigma \gamma_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\sigma \varphi \\ a_3 \end{pmatrix}$$

schreiben.

Dieses System ist bei beliebiger Vorgabe von  $\varphi$  nur dann lösbar, wenn

$$\partial_\sigma \gamma_1 \cdot a_2 - \partial_\sigma \gamma_2 a_1 \neq 0 \quad (\text{II.1})$$

erfüllt ist.

Wir müssen unsere Anfangswerte also auf einer Kurve vorgeben, die die Eigenschaft (II.1) besitzt.

**Definition II.1** (*Charakteristik*) Sei  $\kappa(\tau) := (x(\tau), y(\tau))$  mit  $\tau \in [a, b]$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^2$ .

Wir nennen  $\kappa$  eine **Charakteristik** (zu obiger Differentialgleichung), wenn

$$a_2 \partial_\tau x - a_1 \partial_\tau y = 0.$$

**Bemerkung II.2** Wir erhalten eine Charakteristik  $\kappa$  durch den Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  als Lösung der Anfangswertaufgabe der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_\tau x &= a_1(x(\tau), y(\tau)), & x(0) &= x_0 \\ \partial_\tau y &= a_2(x(\tau), y(\tau)), & y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

Wenn die Anfangskurve  $\gamma$  eine Charakteristik ist, dann lässt sich die Cauchysche Anfangswertaufgabe im Allgemeinen **nicht** lösen.

**Satz II.3** Sei  $\kappa(\tau) = (x(\tau), y(\tau))$  eine Charakteristik.

Weiterhin

$$x_0 = x(\tau_0), \quad y_0 = y(\tau_0), \quad u_0 \in \mathbb{R}$$

und  $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$  eine Lösung der Differentialgleichung mit  $u(x_0, y_0) = u_0$ .

Dann ist  $u$  entlang  $\kappa$  eindeutig bestimmt.

Beweis: Betrachte

$$\begin{aligned} \partial_\tau u(x(\tau), y(\tau)) &= \partial_x u \cdot \partial_\tau x + \partial_y u \cdot \partial_\tau y \\ &= \partial_x u a_1 + \partial_y u a_2 && (\text{Bemerkung II.2}) \\ &= a_3(x(\tau), y(\tau), u(x(\tau), y(\tau))) \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit Anfangswert  $u(x(\tau_0), y(\tau_0)) = u_0$ . Diese ist lokal eindeutig lösbar. ■

**Bemerkung II.4** Entlang von Charakteristiken ist die Lösung bereits durch die Vorgabe der Lösung an einem Punkt festgelegt.

**Frage:** Kann man das ausnutzen, um Lösungen zu bestimmen?

**Beispiel II.5** Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

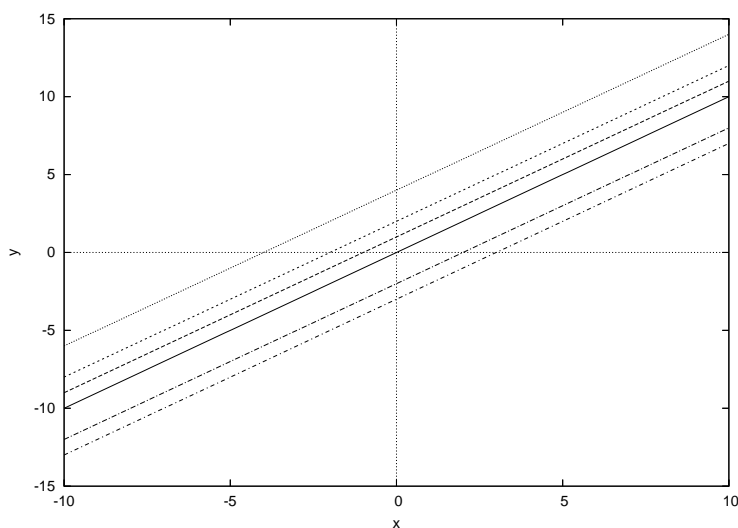
$$\begin{aligned}\partial_x u + \partial_y u &= u \\ u|_\gamma &= \varphi,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\gamma(\sigma) &= \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \end{pmatrix} && (x\text{-Achse}) \\ \varphi(\sigma) &= \sigma.\end{aligned}$$

Bestimme die Charakteristik durch den Punkt  $(\sigma, 0)$ :

$$\begin{aligned}\partial_\tau x &= a_1 = 1, & x(0) &= \sigma \\ \partial_\tau y &= a_2 = 1, & y(0) &= 0 \\ \Rightarrow & & x(\tau) &= \tau + \sigma \\ & & y(\tau) &= \tau \\ \Rightarrow & & x(\tau) - y(\tau) &= \sigma\end{aligned}$$



*Beobachtung: Die Charakteristiken schneiden die Anfangskurve.  
Entlang von Charakteristiken haben wir gezeigt:*

$$\partial_\tau u = a_3.$$

In diesem Beispiel also konkret:

$$\begin{aligned}\Rightarrow & \begin{aligned}\partial_\tau u &= u \\ u(\tau) &= \sigma e^\tau\end{aligned} && \text{mit } u(\sigma, 0) = u|_{\gamma(\sigma)} = \varphi(\sigma) = \sigma\end{aligned}$$

Bei der Bestimmung der Charakteristiken hatte sich ergeben:

$$\begin{aligned}\sigma &= x - y \\ \tau &= y.\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt:

$$u(x, y) = (x - y) \cdot e^y.$$

Prüfe nach: Das löst die ursprüngliche Aufgabe.

**Beispiel II.6** Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}x\partial_x u + y\partial_y u &= \alpha u \\ u|_{\gamma(\sigma)} &= \varphi(\sigma),\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^1 \\ \gamma : \mathbb{R}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Setze

$$z(\tau) := u(x(\tau), y(\tau))$$

und betrachte zunächst

$$\partial_\tau z(\tau) = \alpha z(\tau) \quad \text{mit } z(0) = \varphi(\gamma(\sigma)).$$

Dessen Lösung ist  $z(\tau) = \varphi(\gamma(\sigma))e^{\alpha\tau}$ .

Das Gleichungssystem für die Charakteristiken ist

$$\begin{aligned}\partial_\tau x(\tau) &= x(\tau), & x(0) &= \sigma \\ \partial_\tau y(\tau) &= y(\tau), & y(0) &= 1 \\ \Rightarrow & x(\tau) = \sigma e^\tau \\ & y(\tau) = e^\tau \\ \Rightarrow & \ln \frac{x}{\sigma} = \tau = \ln y \\ \Rightarrow & \tau = \ln y; \quad \sigma = \frac{x}{y}\end{aligned}$$

Einsetzen in die Lösung für  $z(\tau)$  ergibt:

$$u(x(\tau), y(\tau)) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) e^{\alpha \ln y} = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) y^\alpha$$

## II.1 Lösungsschema

Schritt 1:

Zum Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} a_1(x, y)\partial_x u + a_2(x, y)\partial_y u &= a_3(x, y, u) \\ u|_\gamma &= \varphi \end{aligned}$$

werden die Charakteristiken  $\kappa^\sigma = (x^\sigma, y^\sigma)$  als Lösungen von

$$\begin{aligned} \partial_\tau x^\sigma(\tau) &= a_1(x(\tau), y(\tau)), & x^\sigma(0) &= \gamma_1(\sigma) \\ \partial_\tau y^\sigma(\tau) &= a_2(x(\tau), y(\tau)), & y^\sigma(0) &= \gamma_2(\sigma). \end{aligned}$$

Bezeichne die Lösung mit

$$(x(\sigma, \tau), y(\sigma, \tau)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Diese lässt sich entlang von  $\gamma$  nach  $\sigma$  und  $\tau$  auflösen, falls die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \partial_\sigma x & \partial_\tau x \\ \partial_\sigma y & \partial_\tau y \end{pmatrix}$$

dort invertierbar ist, was genau dann der Fall ist, wenn

$$\partial_\sigma x \cdot \partial_\tau y - \partial_\tau x \partial_\sigma y \neq 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \partial_\sigma x \cdot a_2 - a_1 \cdot \partial_\sigma y \neq 0 && \text{(Charakteristik)} \\ \Leftrightarrow \quad & \partial_\sigma \gamma_1 \cdot a_2 - a_1 \partial_\sigma \gamma_2 \neq 0 && (x^\sigma = \gamma_1(\sigma), y^\sigma = \gamma_2(\sigma)). \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn  $\gamma$  **keine** Charakteristik ist.

Die Umkehrabbildung sei dann bezeichnet mit

$$\sigma = \sigma(x, y), \quad \tau = \tau(x, y).$$

Schritt 2:

Löse nun

$$\partial_\tau z^\sigma(\tau) = a_3$$

mit  $z^\sigma(0) = \varphi(\gamma(\sigma))$ . Wenn man  $(\sigma, \tau)$  nun in Abhängigkeit von den Koordinaten  $(x, y)$  annimmt, löst der Ansatz

$$u(x, y) := z(\sigma(x, y), \tau(x, y))$$

die Differentialgleichung.

Es ist nämlich

$$u|_{\gamma(\sigma)} = z(\sigma, 0) = \varphi(\gamma(\sigma))$$

und es gilt

$$\begin{aligned} a_1 \partial_x u + a_2 \partial_y u &= a_1 \nabla z \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \sigma \\ \partial_x \tau \end{pmatrix} + a_2 \nabla z \cdot \begin{pmatrix} \partial_y \sigma \\ \partial_y \tau \end{pmatrix} \\ &= a_1 (\partial_\sigma z \partial_x \sigma + \partial_\tau z \partial_x \tau) + a_2 (\partial_\sigma z \partial_y \sigma + \partial_\tau z \partial_y \tau) \\ &= \partial_\sigma z (\partial_\tau x \partial_x \sigma + \partial_\tau y \partial_y \sigma) + \partial_\tau z (\partial_\tau x \partial_x \tau + \partial_\tau y \partial_y \tau). \end{aligned}$$

Eine Nebenrechnung ergibt

$$\begin{aligned}\partial_\tau z &= (\partial_\sigma z, \partial_\tau z) \begin{pmatrix} \partial_\tau \sigma \\ \partial_\tau \tau \end{pmatrix} \\ &= \partial_\sigma z \partial_\tau \sigma + \partial_\tau z \partial_\tau \tau \\ &= \partial_\sigma z (\partial_\tau x \partial_x \sigma + \partial_\tau y \partial_y \sigma) + \partial_\tau z (\partial_\tau x \partial_x \tau + \partial_\tau y \partial_y \tau),\end{aligned}$$

also insgesamt

$$a_3 = \partial_\tau z = a_1 \partial_x u + a_2 \partial_y u.$$

## II.2 Existenzsatz

**Rohe Version:** Es gibt genau eine Lösung der PDGL

$$a_1(x, y, u) \partial_x u + a_2(x, y, u) \partial_y u = a_3(x, y, u)$$

mit  $u|_\gamma = \varphi$ .

Das oben angegebene Lösungsschema lässt sich verallgemeinern:

$$\begin{aligned}\partial_\tau x^\sigma(\tau) &= a_1(x(\tau), y(\tau), \boxed{\begin{matrix} u(x(\tau), y(\tau)) \\ u(x(\tau), y(\tau)) \\ z(\tau) \end{matrix}}), & x^\sigma(0) &= \gamma_1(\sigma) \\ \partial_\tau y^\sigma(\tau) &= a_2(x(\tau), y(\tau), \boxed{\begin{matrix} u(x(\tau), y(\tau)) \\ u(x(\tau), y(\tau)) \\ z(\tau) \end{matrix}}), & y^\sigma(0) &= \gamma_2(\sigma) \\ \partial_\tau z^\sigma(\tau) &= a_3(x(\tau), y(\tau), \boxed{\begin{matrix} u(x(\tau), y(\tau)) \\ u(x(\tau), y(\tau)) \\ z(\tau) \end{matrix}}), & z^\sigma(0) &= \varphi(0)\end{aligned}\tag{II.2}$$

$$u(x, y) = z^\sigma(\tau) \xrightarrow{\uparrow}$$

### Genauere Voraussetzungen

- $a_1, a_2, a_3 \in C^1(\mathbb{R}^3)$
- $I := [a, b]$
- $\gamma_1, \gamma_2, \varphi \in C^1(I)$

Mit diesen Voraussetzungen besitzt das System (II.2) für alle  $\sigma \in I$ , für  $0 \leq \tau \leq c(\sigma)$  (es gilt  $c(\sigma) \geq c_0 > 0$  und  $c(\sigma)$  ist stetig auf  $I$ ), eine eindeutige Lösung. (Satz von Picard-Lindelöf)

Dadurch sind die Charakteristiken  $\kappa^\sigma(\tau)$  festgelegt. Dafür gelte

- $\gamma$  und  $\kappa$  schneiden sich, das heißt, für alle  $\sigma \in I$  ist

$$\gamma'_1 \cdot a_2(x^\sigma(0), y^\sigma(0), \varphi(0)) - \gamma'_2 \cdot a_1(x^\sigma(0), y^\sigma(0), \varphi(\sigma)) \neq 0$$

**Satz II.7** *Obige Voraussetzungen seien erfüllt.*

*Dann existiert in einer Umgebung der Anfangskurve  $\gamma$  genau eine stetig differenzierbare Lösung  $u$  der Gleichung*

$$a_1(x, y, u) \partial_x u + a_2(x, y, u) \partial_y u = a_3(x, y, u)$$

mit  $u|_\gamma = \varphi$ .

Beweis: Die Übertragung des Lösungsschemas zeigt:

Für alle  $\sigma \in I$  löst der Ansatz

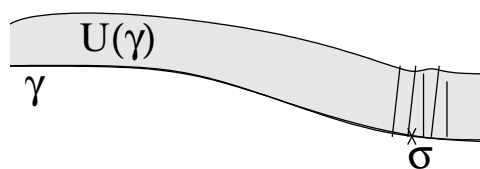
$$u(x, y) := z(\sigma(x, y), \tau(x, y))$$

die PDGL entlang der Charakteristik. Wegen stetiger Abhängigkeit der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen bezüglich der Daten folgt für alle  $\sigma \in I$  die Existenz einer Umgebung  $U(\sigma) \subset I$ , in der die PDGL gelöst werden kann.

Die Umgebungen überdecken das kompakte Intervall  $I$ .

$\Rightarrow$  Endlich viele  $U(\sigma)$  genügen zur Überdeckung.

$\Rightarrow$  Damit existiert eine Umgebung  $U(\gamma)$  von  $\gamma$ , in der es eine Lösung gibt. (siehe Skizze)

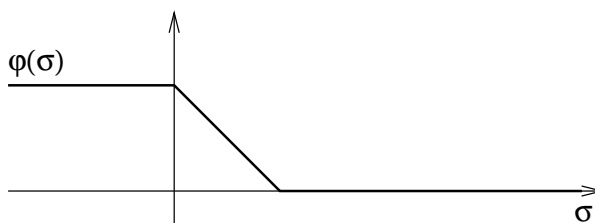


Zur Eindeutigkeit:

- Betrachte einen Punkt  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U(\gamma)$ . Per Konstruktion gibt es genau eine Charakteristik  $C$ , die  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  mit  $\gamma$  verbindet.
- $C$  schneide  $\gamma$  in  $(x_0, y_0)$ .
- Diesem Punkt zugeordnet ist  $\sigma_0$ .
- Dann ist  $u$  aber entlang  $C$  durch  $u(x_0, y_0) = \varphi(\sigma_0)$  eindeutig bestimmt. ■

**Aufgabe:**

$$\begin{aligned} \partial_y u(x, y) + u \cdot \partial_x u(x, y) &= 0 \\ u(\sigma, 0) &= \varphi(\sigma) \end{aligned}$$



**Rechnung:** Es ergibt sich das charakteristische System:

$$\partial_\tau x^\sigma(\tau) = z^\sigma(\tau) \qquad x^\sigma(0) = \sigma \qquad \text{(II.3)}$$

$$\partial_\tau y^\sigma(\tau) = 1 \qquad y^\sigma(0) = 0 \qquad \text{(II.4)}$$

$$\partial_\tau z^\sigma(\tau) = 0 \qquad z^\sigma(0) = \varphi(\sigma) \qquad \text{(II.5)}$$

Aus (II.5) folgt

$$z^\sigma(\tau) = \varphi(\sigma),$$

und aus (II.4)

$$y^\sigma(\tau) = \tau \tag{II.6}$$

Aus (II.5) und (II.3) folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \partial_\tau x^\sigma(\tau) &= \varphi(\sigma) & x^\sigma(0) &= \sigma \\ x^\sigma(\tau) &= \varphi(\sigma) \cdot \tau + \sigma, \end{aligned} \tag{II.7}$$

woraus sich zusammen mit (II.6)

$$x^\sigma = \varphi(\sigma)y^\sigma + \sigma$$

also

$$\boxed{\varphi(\sigma)y^\sigma = x^\sigma - \sigma}$$

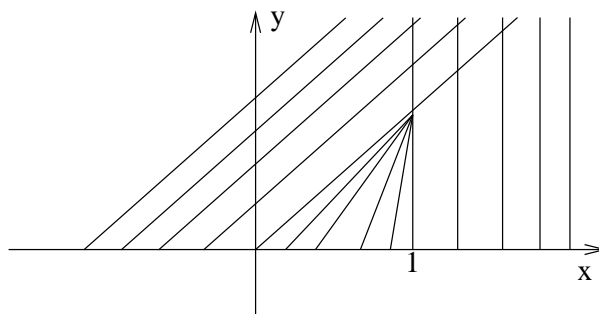
ergibt.

Hier ist

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \leq 0 \\ 1 - \sigma & 0 \leq \sigma \leq 1, \\ 0 & 1 \leq \sigma \end{cases}$$

damit folgt

$$\begin{aligned} (1 - \sigma)y &= x^\sigma - \sigma \\ \text{für } \sigma = 0,5: \quad 0,5y &= x - 0,5 \\ \Rightarrow \quad y &= 2x - 1. \end{aligned}$$



Man ermittle den maximalen „Existenzstreifen“  $\mathbb{R} \times [0; s)$  einer klassischen Lösung.



# Kapitel III

## Differentialgleichungen zweiter Ordnung

### III.1 Typeinteilung von Gleichungen zweiter Ordnung

Betrachte

$$a_{11}\partial_x^2 u + 2a_{12}\partial_x\partial_y u + a_{22}\partial_y^2 u + a_1\partial_x u + a_2\partial_y u + a_0 u = 0 \quad (\text{III.1})$$

mit der Lösungsfunktion  $u = u(x, y)$  und Koeffizienten  $a_{ij}, a_i \in \mathbb{R}$ .

**Satz III.1** Die Gleichung (III.1) kann durch lineare Transformation der unabhängigen Variablen auf eine der folgenden drei Formen gebracht werden:

i) *Elliptisch*: falls  $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$

$$\curvearrowright \partial_x^2 u + \partial_y^2 u + \dots = 0$$

ii) *Hyperbolisch*: falls  $a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$

$$\curvearrowright \partial_x^2 u - \partial_y^2 u + \dots = 0$$

iii) *Parabolisch*: falls  $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$

$$\curvearrowright \partial_x^2 + \dots = 0$$

Analogien zur analytischen Geometrie:

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 = 1 & \text{Kreis/Ellipse} \\ x^2 - y^2 = 1 & \text{Hyperbel} \\ y = x^2 & \text{Parabel} \end{array}$$

Beweis: (des Satzes)

Für den Fall  $a_{11} = 1, a_1 = a_2 = a_0 = 0$  kann die Aufgabe umgeschrieben werden zu:

$$(\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 u + (a_{22} - a_{12}^2)\partial_y^2 u = 0.$$

Hier wird nur der elliptische Fall  $a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$  untersucht.

Setze  $b := \sqrt{a_{22} - a_{12}^2} > 0$  und  $x = \xi$ ,  $y = a_{12}\xi + b\eta$ .

In beiden Koordinatensystemen soll gelten:

$$v(\xi, \eta) = u(x, y).$$

Berechne nun  $\nabla v(\xi, \eta)$  unter Beachtung von  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$ :

$$\begin{aligned} (\partial_\xi v, \partial_\eta v) &= (\partial_x u, \partial_y u) \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\eta x \\ \partial_\xi y & \partial_\eta y \end{pmatrix} && \text{(Kettenregel)} \\ &= (\partial_x u, \partial_y u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{12} & b \end{pmatrix} && (x = \xi, \quad y = a_{12}\xi + b\eta) \\ &= (\partial_x u + a_{12}\partial_y u, b\partial_y u) \\ \Rightarrow \quad \partial_\xi &= \partial_x + a_{12}\partial_y \\ \partial_\eta &= b\partial_y \\ \Rightarrow \quad \partial_\xi^2 &= (\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 \\ \partial_\eta^2 &= (a_{22} - a_{12}^2)\partial_y^2 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zeigt den Übergang zu

$$\partial_\xi^2 v + \partial_\eta^2 v = 0.$$

Analoge Rechnungen können für den parabolischen und den hyperbolischen Fall durchgeführt werden. ■

### III.1.1 Cauchysche Anfangswertaufgabe

Gegeben ist die partielle Differentialgleichung

$$A\partial_x^2 u + 2B\partial_{xy}u + C\partial_y^2 u + D\partial_x u + E\partial_y u + Fu = f$$

mit den Anfangswerten

$$u|_\gamma = u_0 \quad \text{und} \quad \partial_n u|_\gamma = u_1.$$

Man möchte nun wieder mehr über  $u$  entlang der Anfangswertkurve  $\gamma$  wissen. Konkreter:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u &=? \\ \partial_{xy} u &=? \\ \partial_y^2 u &=? \end{aligned}$$

Durch Vorgabe von  $u|_\gamma$  und  $\partial_n u|_\gamma$  erhält man  $\partial_x u$  und  $\partial_y u$  durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_x u \cdot \partial_\sigma \gamma_1 + \partial_y u \cdot \partial_\sigma \gamma_2 &= \partial_\sigma (u(\gamma(\sigma))) \\ \partial_x u \cdot \partial_\sigma \gamma_2 - \partial_y u \cdot \partial_\sigma \gamma_1 &= \partial_n u \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \partial_\sigma \gamma_1 & \partial_\sigma \gamma_2 \\ \partial_\sigma \gamma_2 & -\partial_\sigma \gamma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_\sigma u \\ \partial_n u \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

das heißt  $\partial_x u(\gamma(\sigma))$  und  $\partial_y u(\gamma(\sigma))$  sind entlang  $\gamma$  bekannt. Betrachte hierzu die Ableitungen entlang  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\partial_\sigma(\partial_x u(\gamma(\sigma))) &= (\partial_x(\partial_x u), \partial_y(\partial_x u)) \begin{pmatrix} \partial_\sigma \gamma_1 \\ \partial_\sigma \gamma_2 \end{pmatrix} \\ \partial_\sigma(\partial_y u(\gamma(\sigma))) &= (\partial_x(\partial_y u), \partial_y(\partial_y u)) \begin{pmatrix} \partial_\sigma \gamma_1 \\ \partial_\sigma \gamma_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Somit lassen sich die zweiten Ableitungen von  $u$  bestimmen durch

$$\begin{array}{l} \text{Ableitungswissen} \\ \text{entlang } \gamma \\ \text{PDGL} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \partial_\sigma \gamma_1 & \partial_\sigma \gamma_2 & 0 \\ 0 & \partial_\sigma \gamma_1 & \partial_\sigma \gamma_2 \\ A & 2B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x^2 u \\ \partial_{xy} u \\ \partial_y^2 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\sigma(\partial_x u(\gamma(\sigma))) \\ \partial_\sigma(\partial_y u(\gamma(\sigma))) \\ (f - D\partial_x u - E\partial_y u - Fu) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

**Definition III.2** (*Charakteristik*)

Sei  $\kappa(\tau) := (x(\tau), y(\tau))$  mit  $\tau \in [a, b]$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^2$ .

Wir nennen  $\kappa$  eine Charakteristik genau dann, wenn

$$\boxed{C(\partial_\tau x(\tau))^2 - 2B\partial_\sigma x \cdot \partial_\sigma y + A(\partial_\sigma y)^2 = 0}.$$

**Bemerkung III.3** Entlang einer Charakteristik können  $u$  und  $\partial_n u$  **nicht** unabhängig vorgegeben werden.

Schreibe die Bedingung für die Charakteristik in der Form

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0. \tag{III.2}$$

Dies lässt sich lösen für  $\frac{dy}{dx}$  in der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $\kappa(\tau)$ , falls  $A, B, C$  gegebene Funktionen von  $x$  und  $y$  sind.

Falls die Charakteristik in impliziter Form durch eine Gleichung

$$\Phi(x, y) = \text{const.},$$

zum Beispiel

- $x + y = 0$ , Gerade
- $x^2 + y^2 = r^2$ , Kreis

gegeben ist, so gilt entlang der Charakteristik

$$\partial_x \Phi \cdot \partial_\tau x + \partial_y \Phi \cdot \partial_\tau y = 0$$

oder formal

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x \Phi}{\partial_y \Phi}.$$

Einsetzen in (III.2) liefert

$$A(\partial_x \Phi)^2 + 2B(\partial_x \Phi \cdot \partial_y \Phi) + C(\partial_y \Phi)^2 = 0.$$

**Diskussion der drei Fälle** anhand  $\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$ :

- i) Elliptischer Fall:  
Wegen  $B^2 < AC \Rightarrow B^2 - AC < 0$  gibt es keine reellen Charakteristiken. Wir erwarten, daß die Cauchysche Anfangswertaufgabe stets lösbar ist.
- ii) Hyperbolischer Fall:  
Mit  $B^2 > AC \Rightarrow B^2 - AC > 0$  erhalten wir **zwei** reelle Scharen von Charakteristiken.
- iii) Parabolischer Fall:  
Wegen  $B^2 = AC$  erhalten wir lediglich **eine** reelle Schar von Charakteristiken.

## III.2 Die Potentialgleichung (auch Laplace-Gleichung)

### III.2.1

Aufgabe:

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

wobei  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ .

(Beispiele dafür sind das elektrische Potential und das Geschwindigkeitspotential.)

Die Existenz zweiter Ableitungen von  $u$  wird nur in  $\Omega$  gefordert (nicht auf dem Rand).

Damit die **Randwertvorgabe**

$$u = \varphi \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega$$

sinnvoll ist, muss gelten

$$u \in C(\bar{\Omega}).$$

(Dabei ist  $\bar{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ .)

**Definition III.4**  $u$  heißt **harmonisch** in  $\Omega$ , wenn

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \text{ und } \Delta u = 0.$$

Es gibt Beispiele, für die gilt:

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{auf } \partial\Omega \end{array}$$

aber  $u \notin C^2(\bar{\Omega})$ . (Übungsaufgabe)

### III.2.2

Als **Singularitätenfunktion** bezeichnet man die Funktion

$$s(x, y) := \begin{cases} -\frac{1}{\omega_2} \ln |x - y| & \text{falls } n = 2 \\ \frac{|x - y|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

mit  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $\omega_k$  der Oberfläche der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel.

**Lemma III.5** Für festes  $y \in \mathbb{R}^n$  löst  $s(x, y)$  die Potentialgleichung in  $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$

Beweis: Übung ■

**Fakten**

- Auf der Kugel  $K_R(y)$  um  $y$  mit Radius  $R$  gilt

$$\frac{\partial s}{\partial n} = -\frac{R^{(1-n)}}{\omega_k} \quad \text{in } x \in \partial K_R(y)$$

- (erste Greensche Formel)

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}), \quad v \in C^2(\overline{\Omega})$$

Gebiete, auf denen diese Formel gilt, heißen **Normalgebiete**.

- $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$  in einem Normalgebiet  $\Omega$  erfüllen die **zweite Greensche Formel**

$$\int_{\Omega} u \Delta v = \int_{\Omega} v \Delta u + \int_{\partial \Omega} \left[ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\Gamma.$$

**Satz III.6** •  $\Omega$  sei ein Normalgebiet.

- $u \in C^2(\overline{\Omega})$  sei dort harmonisch.

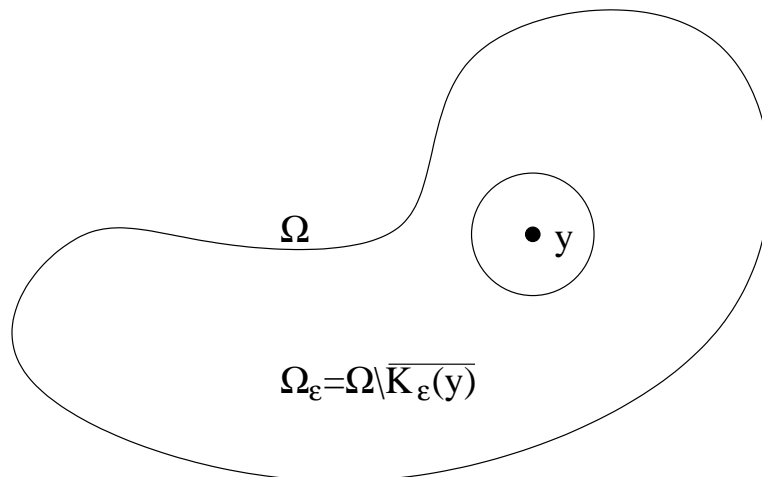
Dann gilt für alle  $y \in \Omega$

$$u(y) = \int_{\partial \Omega} [s(x, y) \partial_{n_x} u(x) - u(x) \partial_{n_x} s(x, y)] d\Gamma_x.$$

**Bemerkung III.7** Kenntnisse über  $u$  auf dem Rand  $\partial \Omega$  genügen, um Wissen über  $u$  in  $\Omega$  zu erlangen.

Beweis: (Satz III.6)

Da die Singularitätenfunktion in  $y$  nicht (bezüglich  $x$ ) differenzierbar ist, wird zunächst das Gebiet  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(y)}$  untersucht:



Die zweite Greensche Formel liefert

$$\int_{\Omega_\varepsilon} u \Delta s = \int_{\Omega_\varepsilon} s \Delta u + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} [u \partial_n s - s \partial_n u] d\Gamma$$

und damit wegen  $\Delta s = 0$  und  $\Delta u = 0$

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} [s(x, y) \partial_n u(x) - u(x) \partial_n s(x, y)] d\Gamma = \int_{\partial\Omega} [\dots] - \int_{\partial K_\varepsilon(y)} [\dots].$$

Zu zeigen ist also

$$\int_{\partial K_\varepsilon(y)} [s(x, y) \partial_n u(x) - u(x) \partial_n s(x, y)] d\Gamma \rightarrow u(y) \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (\text{III.3})$$

i)  $\int_{\partial K_\varepsilon(y)} s(x, y) \partial_n u(x) d\Gamma \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)$

$\partial_n u$  ist auf  $\partial K_\varepsilon(y)$  beschränkt, betrachte also

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_\varepsilon(y)} s(x, y) d\Gamma &= \begin{cases} - \int \frac{\ln|x-y|}{\omega_2} d\Gamma, & \text{falls } n = 2 \\ \int \frac{|x-y|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} d\Gamma, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\omega_2} \int_{\partial K_\varepsilon(0)} \ln r d\Gamma, & \text{für } n = 2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial K_\varepsilon(0)} r^{2-n} d\Gamma, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{\ln \varepsilon}{\omega_2} \int_0^{2\pi} \varepsilon d\varphi, & \text{für } n = 2 \\ \frac{\varepsilon^{2-n}}{(n-2)\omega_n} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \varepsilon^{n-1} d\phi, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{\varepsilon \ln \varepsilon}{\omega_2} \omega_2, & \text{für } n = 2 \\ \frac{\varepsilon^{2-n+n-1}}{(n-2)\omega_n} \omega_n, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} -\varepsilon \ln \varepsilon, & \text{für } n = 2 \\ \varepsilon / (n-2), & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

(Dabei steht  $\phi \in \mathbb{R}^{n-1}$  für den Winkelanteil der Kugelkoordinaten in  $\mathbb{R}^n$ .)

Es gilt also auf jeden Fall

$$\int_{\partial K_\varepsilon(y)} \partial_n u(x) s(x, y) d\Gamma \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

ii)  $\int_{\partial K_\varepsilon(y)} u(x) \cdot \partial_n s(x, y) d\Gamma = -u(y)$

Durch Addition von Null lässt sich das Integral in zwei Ausdrücke aufspalten:

$$\int_{\partial K_\varepsilon(y)} u(x) \cdot \partial_n s(x, y) d\Gamma = \int_{\partial K_\varepsilon(y)} (u(x) - u(y)) \partial_n s(x, y) d\Gamma + \int_{\partial K_\varepsilon(y)} u(y) \cdot \partial_n s(x, y) d\Gamma.$$

ii.a)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K_\varepsilon(y)} (u(x) - u(y)) \partial_n s(x, y) d\Gamma &= \int_{\phi_0}^{\phi_1} (u(x) - u(y)) \partial_r s(x(r, \phi), y) \varepsilon^{n-1} d\phi \\
&= \int_{\phi_0}^{\phi_1} (u(x) - u(y)) \left( -\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \right) \varepsilon^{n-1} d\phi \\
&\leq \max_{x \in K_\varepsilon(0)} (u(x) - u(y)) \int_{\phi_0}^{\phi_1} \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \varepsilon^{n-1} d\phi \\
&= \max_{|x|=\varepsilon} (u(x) - u(y)) \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0)
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang gilt dabei wegen der Stetigkeit von  $u$  in  $y$ .

ii.b)

$$\int_{\partial K_\varepsilon(y)} u(y) \partial_n s(x, y) d\Gamma = u(y) \int_{\phi_0}^{\phi_1} \left( -\frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \right) \varepsilon^{n-1} d\phi = -u(y)$$

Summiert man nun die Terme i), ii.a) und ii.b) auf, ergibt sich gerade (III.3) ■

### III.3 Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip

**Definition III.8** Die Funktion  $u \in C^0(\overline{\Omega})$  hat die **Mittelwerteigenschaft** in  $\Omega$ , falls für alle  $x \in \Omega$  und  $R > 0$  mit  $K_R(x) \subset \Omega$

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial K_R(x)} u(\xi) d\Gamma_\xi.$$

**Satz III.9 (Maximum-Prinzip)** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend und  $u \in C^0(\overline{\Omega})$  eine **nichtkonstante** Funktion, die die Mittelwerteigenschaft hat.

Dann nimmt  $u$  in  $\Omega$  kein Maximum an.

**Bemerkung III.10** Betrachte  $-u$  für die entsprechende Aussage zum Minimum.

Beweisstrategie:

- Indirekter Beweis
- Annahme: Es gibt ein Maximum bei  $y \in \Omega$ , d. h.  $\forall x \in \Omega : u(y) = M \geq u(x)$
- Es wird gezeigt, daß  $u(y') = M$  für beliebige  $y' \in \Omega$  gilt, also  $u \equiv M \equiv \text{const.}$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

Beweis:  $u(y') = u(y) = M$ : Wegen des Zusammenhangs von  $\Omega$  existiert zu beliebigem  $y' \in \Omega$  eine stetige Kurve  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \Omega$  mit  $\varphi(0) = y$  und  $\varphi(1) = y'$ .

Setze

$$I := \{s \in [0, 1] \mid \forall t \in [0, s] : u(\varphi(t)) = M\}.$$

Nun ist  $0 \in I$  und  $I$  ist abgeschlossen, da  $u$  und  $\varphi$  stetig sind. Also existiert ein maximales Element  $s^* = \max I$ .

Per Konstruktion ist damit  $I = [0, s^*]$ .

Wir zeigen nun  $s^* = 1$ :

Angenommen,  $s^* < 1$ , dann ist  $x^* := \varphi(s^*) \in \Omega$  und es gibt ein  $R > 0$ , mit  $K_R(x^*) \subset \Omega$ . Die Mittelwerteigenschaft lautet nun

$$M = u(x^*) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K_r(x^*)} u(\xi) d\Gamma$$

für  $0 \leq r \leq R$ .

Da  $M$  der Maximalwert von  $u$  auf  $\Omega$  ist, gilt  $u(\xi) \leq M$ . Nimmt man nun an, diese Ungleichung gilt für ein  $\eta \in \partial K_r(x^*)$  echt (also  $u(\eta) < M$ ), gilt diese auch in einer Umgebung um  $\eta$   $K_\varepsilon(\eta) \subset K_r(x^*)$  und man erhält die Abschätzung

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial K_r(x^*)} u(\xi) d\Gamma \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \left( \int_{\partial K_r(x^*) \setminus K_\varepsilon(\eta)} \underbrace{u(\xi)}_{\leq M} d\Gamma + \int_{\partial K_r(x^*) \cap K_\varepsilon(\eta)} \underbrace{u(\xi)}_{< M} d\Gamma \right) \\ &< \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \cdot M \omega_n r^{n-1} = M \end{aligned}$$

also einen Widerspruch. Folglich gilt für alle  $r \in [0, R]$   $u|_{\partial K_r(x^*)} \equiv M$ . Das heißt,  $u \equiv M$  gilt in einer Umgebung von  $x^* = \varphi(s^*)$  im Widerspruch zur Definition von  $s^*$ .

Insgesamt hat man damit gezeigt, daß für alle  $y' \in \Omega$

$$u(y') = M,$$

und damit  $u$  konstant ist. Dies steht aber im Widerspruch zur Annahme. ■

**Bemerkung III.11** Sei  $\Omega$  beschränkt. Dann nimmt eine Funktion mit Mittelwerteigenschaft ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand  $\partial\Omega$  an.

Beweis: Die Extrema werden auf dem Abschluss  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  angenommen.

Wegen des Maximumprinzips entfällt das Innere von  $\overline{\Omega}$  als Kandidat für ein Extremum. ■

**Bemerkung III.12** Sei  $\Omega$  beschränkt. Stimmen zwei Funktionen mit Mittelwerteigenschaft auf  $\partial\Omega$  überein, so sind sie identisch.



Beweis:  $w := u - v$  hat die Mittelwerteigenschaft und es gilt  $w = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Wegen des Maximumprinzips ist dann  $w \equiv 0$  auf  $\Omega$ . ■

**Lemma III.13** *Harmonische Funktionen besitzen die Mittelwerteigenschaft.*

Beweis: (durch den Hörer/Leser) ■

**Satz III.14 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen)**  *$u$  sei harmonisch im Gebiet  $\Omega$  und nicht konstant. Dann existiert kein Maximum und kein Minimum in  $\Omega$ .*

**Satz III.15 (Eindeutigkeit)**  *$\Omega$  sei beschränkt. Eine in  $\Omega$  harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum auf  $\partial\Omega$  an und ist durch die Werte auf  $\partial\Omega$  eindeutig bestimmt.*

**Satz III.16 (Poissonsche Integralformel)** *Sei  $\varphi \in C^0(\partial K_R(y))$  und  $n \geq 2$ . Die Lösung der Randwertaufgabe*

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } K_R(y) \\ u &= \varphi && \text{auf } \partial K_R(y) \end{aligned}$$

ist gegeben durch die Funktion

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - y|^2}{R\omega_n} \int_{\partial K_R(y)} \frac{\varphi(\xi)}{|x - \xi|^n} d\Gamma_\xi,$$

die in  $C^\infty(K_R(y)) \cap C^0(\overline{K_R(y)})$  liegt.

Die Mittelwerteigenschaft setzt nur  $u \in C^0(\overline{\Omega})$  voraus.  
Bereits gezeigt ist

$$\text{Funktion harmonisch} \Rightarrow \text{Funktion hat MWE.}$$

Erstaunlicherweise gilt auch die Umkehrung

**Satz III.17**

$$\text{Funktion hat MWE} \Rightarrow \text{Funktion harmonisch.}$$

Beweis: Gegeben ist die Funktion  $v$  mit der Mittelwerteigenschaft. Wähle nun  $x \in \Omega$  und  $R > 0$ , so daß  $K_R(x) \subset \Omega$ . Wegen der Poissonschen Integralformel gibt es eine harmonische Funktion  $u$  mit

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } K_R(x) \\ u &= v && \text{auf } \partial K_R(x). \end{aligned}$$

$u$  besitzt damit auch die Mittelwerteigenschaft. Nach Bemerkung III.12 ist dann  $u = v$  auf  $K_R(x)$  und damit  $v$  harmonisch auf  $K_R(x)$ .

Wegen der Beliebigkeit von  $K_R(x)$  ist  $v$  schließlich harmonisch auf ganz  $\Omega$ . ■

**Satz III.18 (Harnack)** Sei  $u_1, u_2, \dots$  eine Folge in  $\Omega$  harmonischer Funktionen, die in  $\overline{\Omega}$  gleichmäßig konvergieren.

Dann ist  $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$  harmonisch in  $\Omega$ .

Beweis:

i) Es gilt  $u \in C^0(\overline{\Omega})$ .

ii) Aus der Harmonie der  $u_k$  folgt die Mittelwerteigenschaft:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial K_R(x)} \frac{u_k(\xi)}{\omega_k R^{n-1}} d\Gamma_\xi.$$

iii) Damit hat auch die Grenzfunktion die Mittelwerteigenschaft:

$$u = \int_{\partial K_R(x)} \frac{u(\xi)}{\omega_k R^{n-1}} d\Gamma_\xi$$

iv) Gemäß des vorhergehenden Satzes ist  $u$  damit auch harmonisch. ■

## III.4 Stetige Abhängigkeit von den Randdaten

Im Rahmen der Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } \Omega \\ u &= \varphi && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

benutzen wir die Normen:

- $\|u\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$
- $\|\varphi\|_\infty := \sup_{x \in \partial\Omega} |\varphi(x)|$

**Satz III.19**  $\Omega$  sei beschränkt und

$$\Delta u^I = \Delta u^{II} = 0 \text{ auf } \Omega,$$

sowie

$$u^I = \varphi^I \text{ und } u^{II} = \varphi^{II} \text{ auf } \partial\Omega.$$

Dann gilt

$$\|u^I - u^{II}\|_\infty \leq \|\varphi^I - \varphi^{II}\|_\infty.$$

Beweis:  $v := u^I - u^{II}$  ist Lösung von

$$\begin{aligned}\Delta v &= 0 && \text{auf } \Omega \\ v &= \varphi^I - \varphi^{II} && \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Das Maximumprinzip für  $v$  lautet

$$-\|\varphi^I - \varphi^{II}\|_\infty \leq v(x) \leq \|\varphi^I - \varphi^{II}\|_\infty \text{ für alle } x \in \overline{\Omega}.$$

Daraus folgt sofort  $\|v\|_\infty \leq \|\varphi^I - \varphi^{II}\|_\infty$  ■

### Satz III.20

- $\Omega$  sei beschränkt.
- $\varphi_k, \varphi \in C^0(\partial\Omega)$  seien Funktionen mit  $\|\varphi_k - \varphi\|_\infty \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ).
- $u_k$  ist bestimmt durch

$$\begin{aligned}\Delta u_k &= 0 && \text{auf } \Omega \\ u_k &= \varphi_k && \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Dann konvergiert  $u_k \rightarrow u$  ( $k \rightarrow \infty$ ) gleichmäßig auf  $\Omega$  und  $u$  löst

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 && \text{auf } \Omega \\ u &= \varphi && \text{auf } \partial\Omega.\end{aligned}$$

## III.5 Poisson-Gleichung

Auf dem beschränkten Gebiet sei die Differentialgleichung

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

mit  $f \in C^0(\Omega)$  gegeben.

Für die Eindeutigkeit der Lösung benötigen wir Randdaten, etwa

$$u = \varphi \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega.$$

**Definition III.21**  $u$  heißt klassische Lösung der Randwertaufgabe, wenn  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  die Gleichungen punktweise erfüllt.

Die Lösung des Randwertproblems wird im Allgemeinen nicht mehr die Mittelwerteigenschaft und das Maximumprinzip erfüllen.

Aber die Differenz zweier Lösungen  $u_1$  und  $u_2$  der Poisson-Gleichung

$$\Delta(u_1 - u_2) = f - f = 0$$

ist harmonisch und hat die beiden Eigenschaften. Damit folgt

**Satz III.22**  $\Omega$  sei beschränkt.

a) Die Lösung der Randwertaufgabe ist eindeutig bestimmt.

b) Sind  $u^I$  und  $u^{II}$  Lösungen der Poisson-Gleichung zu Randwerten  $\varphi^I$  und  $\varphi^{II}$ , so gilt:

$$\|u^I - u^{II}\|_{\infty} \leq \|\varphi^I - \varphi^{II}\|_{\infty}.$$

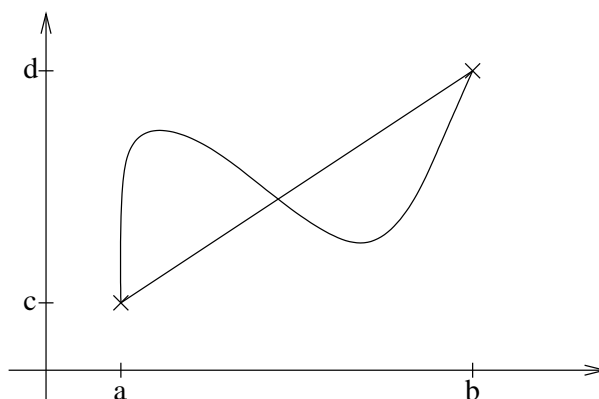
Beweis: Übung



# Kapitel IV

## Variationsformulierungen

Eine Grundaufgabe der Variationsrechnung ist es, die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  zu finden.



Bezeichnungen:

$$I = [a, b]$$

$$V = \{\phi \mid \phi \in C^1(I); \phi(a) = c, \phi(b) = d\}$$

$$V_0 = \{\phi \mid \phi \in C^1(I); \phi(a) = \phi(b) = 0\}$$

Die Bogenlänge zu  $\phi \in V$  ist gegeben durch

$$L(\phi) = \int_I \sqrt{1 + (\phi'(x))^2} dx.$$

**Aufgabe:**

Gesucht ist  $u \in V$ , so daß

(Variationsproblem)

$$\forall \phi \in V : L(u) \leq L(\phi).$$

Ⓜ

**Annahme:** Das Variationsproblem hat eine Lösung  $u \in V$ .

Mit beliebigem  $\phi \in V_0$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  gilt dann

$$L(u) \leq L(u + \varepsilon\phi)$$

und mit der so definierten Funktion

$$\mathcal{L}(\varepsilon) := L(u + \varepsilon\phi)$$

$$\forall \varepsilon : \mathcal{L}(0) \leq \mathcal{L}(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \int_I \sqrt{1 + (\partial_x(u + \varepsilon\phi))^2} dx \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \left[ \int_I \frac{1}{2\sqrt{1 + (\partial_x(u + \varepsilon\phi))^2}} \cdot 2(\partial_x u + \varepsilon \partial_x \phi) \partial_x \phi dx \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \int_I \frac{1}{\sqrt{\dots}} \partial_x u \cdot \partial_x \phi dx \end{aligned}$$

Eine notwendige Bedingung, die das Minimum  $u$  erfüllen muss, ist also

$$\forall \phi \in V_0 : \int_I \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x u)^2}} \partial_x u \cdot \partial_x \phi dx = 0. \quad \textcircled{V}$$

Man kann nachrechnen, daß diese Bedingung nur von linearen Funktionen erfüllt wird. (Übung)

Nach dieser Rechnung gilt

**Satz IV.1**

$$\textcircled{M} \Rightarrow \textcircled{V}$$

Umgekehrt gilt auch

**Satz IV.2**

$$\textcircled{V} \Rightarrow \textcircled{M}$$

Beweis: Durch eine geeignete Koordinatentransformation lässt sich das Minimierungsproblem auf den Fall

$$\begin{aligned} a &= 0, & b &= 1 \\ c &= 0, & d &= 0 \end{aligned}$$

zurückführen.

Aus der Voraussetzung  $\textcircled{V}$  folgt nun

$$u \equiv 0$$

(Übung).

Wir untersuchen die Differenz der Bogenlänge einer beliebigen Funktion  $v \in V$  mit

$$v(0) = v(1) = 0$$

und der Lösung von  $(V)$   $u$ :

$$\begin{aligned}
 L(v) - L(u) &= \int_0^1 \sqrt{1 + v'^2} dx - \int_0^1 \sqrt{1 + u'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + v'^2} dx - \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1 + 0} dx}_1 \\
 &\geq \int_0^1 \sqrt{1} dx - 1 = 0
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar  $L(v) \geq L(u)$  für beliebige  $v \in V$ , als  $(M)$ . ■  
 Falls die Lösung von  $(V)$  hinreichend glatt ist, gilt zusätzlich eine Differentialgleichung:

**Satz IV.3**  $u \in C^2(I)$  sei Lösung von  $(V)$ . Dann gilt auch

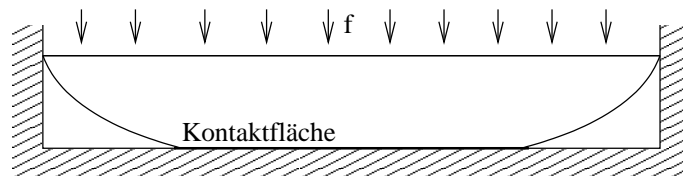
$$\partial_x^2 u = 0. \tag{D}$$

Ebenso gilt

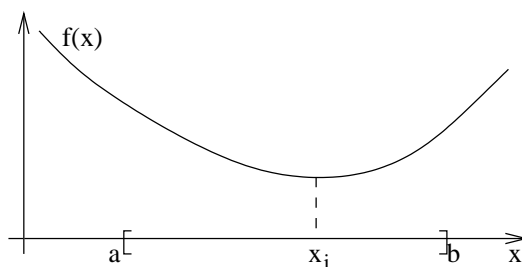
$$(D) \Rightarrow (V).$$

## IV.1 Variationsungleichungen

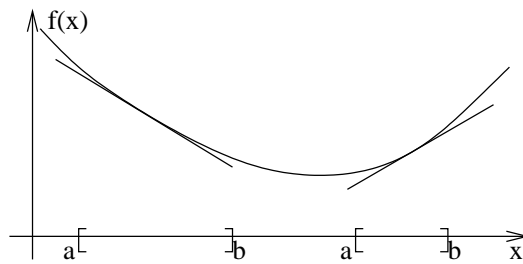
Es ist möglich, daß die Lösungsfunktion gewisse weitere Bedingungen erfüllen muss, daß sie zum Beispiel oberhalb eines gegebenen Hindernisses verlaufen muss:



### IV.1.1 Minimumsuche (eindimensional) unter Intervallrestriktion



$f$  sei stetig differenzierbar.



Fallunterscheidung (auch für Minima am Rand, siehe Skizze)

- $f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \curvearrowright \quad f'(a) \geq 0$
- $f(b) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \curvearrowright \quad f'(b) \leq 0$
- $f(x_i) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \curvearrowright \quad f'(x_i) = 0$

kompakte Schreibweise:  $f'(x_0) \cdot (x - x_0) \geq 0 \quad \forall x$

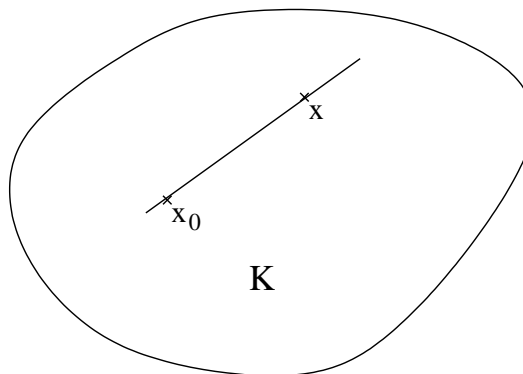
Das ist notwendige Bedingung für eine Minimalstelle  $x_0$  auf einem Intervall.

### IV.1.2 Minimierung auf konvexer Menge $K \subset \mathbb{R}^n$

für  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$

gesucht:  $x_0$  mit  $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in K$

Betrachte  $F(\varepsilon) = f(x_0 + \varepsilon(x - x_0))$  (Abbildung).

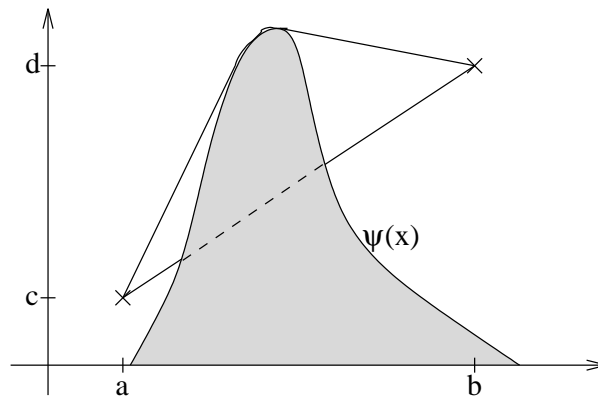


Aus dem eindimensionalen Fall ist bekannt:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\varepsilon} F(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon \geq 0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 \\ \Rightarrow & \nabla f(x_0)(x - x_0) \cdot \varepsilon \geq 0 \quad \forall \varepsilon \geq 0 \\ \Rightarrow & \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0 \end{aligned}$$

Das Beispielproblem vom Beginn des Kapitels lässt sich abwandeln: Nun wird die kürzeste Verbindungsline zwischen zwei Punkten gesucht, jedoch darf ein vorgegebener durch  $\psi(x)$  gegebener Bereich der Ebene nicht durchlaufen werden.





Nun muss also das Funktional

$$L(\phi) = \int_I \sqrt{1 + (\partial_x \phi)^2} dx$$

auf der Menge

$$K = \{\phi \in V | \phi \geq \psi\}$$

minimiert werden.

**Bemerkung IV.4** *K ist eine konvexe Menge:*

Mit  $v_1, v_2 \in K$  und  $0 \leq \alpha \leq 1$  gilt

$$\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 \geq \alpha \psi + (1 - \alpha)\psi = \psi,$$

also  $\alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 \in K$ .

Betrachte

$$\mathcal{L}(\varepsilon) := L(u + \varepsilon(\phi - u)).$$

Die notwendige Bedingung für ein Minimum im eindimensionalen Fall ist

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon \geq 0.$$

Ausrechnen liefert:

$$\int_I \frac{1}{2\sqrt{1 + (\partial_x u)^2}} (2\partial_x u) \cdot \partial_x(\phi - u) dx \cdot \varepsilon \geq 0 \quad \forall \phi \in K$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_I \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x u)^2}} \partial_x u \cdot \partial_x(\phi - u) dx \geq 0 \quad \forall \phi \in K}$$

Schreibweisen:

(für  $v, w \in V$ )

$$(v, w) = \int_I v(x) \cdot w(x) dx$$

$$a(v, w) = \int_I \frac{1}{\sqrt{1 + (v')^2}} \partial_x v \partial_x w dx$$

Damit schreibt man die Distanz-Aufgaben variationell als

$$u \in V : \quad \forall \phi \in V_0 \quad a(u, \phi) = 0$$

bzw.

$$u \in K : \quad \forall \phi \in K \quad a(u, \phi - u) = 0.$$

Die natürliche Erweiterung von

$$-\partial_x \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x u)^2}} \partial_x u$$

unter der Vereinfachung

$$-\partial_x \cdot 1 \cdot \partial_x u$$

in zwei Dimensionen lautet

$$-\Delta u.$$

So gelangt man zur variationellen Formulierung des **Poisson-Problems**.

## IV.2 Poisson-Problem

Rechengebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , beschränkt (meistens  $(0, 1)^2$ )

Betrachte Aufgabe:  $\min \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx - \int_{\Omega} f \cdot u dx \right)$

Ⓜ

mit  $u = u(x)$ ,  $f = f(x)$ ,  $x = (x_1, x_2) \in \Omega$

$f, u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \nabla u = (\partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u)$

Suche die Lösung von Ⓜ in

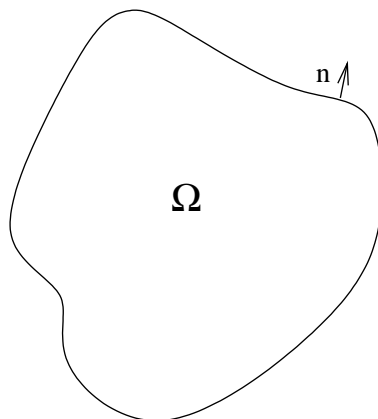
$V = \{ \varphi \mid \varphi \text{ ist stetig auf } \Omega, \partial_{x_1} \varphi, \partial_{x_2} \varphi \text{ sind stückweise stetig und beschränkt, } \varphi = 0 \text{ auf } \partial\Omega \}$

**Satz IV.5 (Greensche Formel)** Für hinreichend glatte Funktionen  $v, w$  gilt

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx = - \int_{\Omega} v \Delta w dx + \int_{\partial\Omega} v \partial_n w d\Gamma$$

mit  $\Delta = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2)$  und  $\partial_n w = \nabla w \cdot n$  (Mit dem Normalenvektor  $n$ , siehe Abbildung).

[Analogon zur partiellen Integration]



Beweis: Benutze Divergenzsatz in 2D für vektorwertige Funktionen. (Übungsaufgabe)

Klassisches Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ auf } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad \textcircled{D}$$

**Satz IV.6** Analog zum eindimensionalen Fall gilt

$$\textcircled{D} \Rightarrow \textcircled{M}$$

Beweis: Benutze die Greensche Formel. ■

Betrachte die variationelle Formulierung:

$$a(u, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in V \quad \textcircled{V}$$

mit  $a(v, w) := (\nabla v, \nabla w)$ ,  $v, w \in V$  und  $(v, w) := \int_{\Omega} v \cdot w dx$ ,  $v, w \in V$

**Satz IV.7**  $\textcircled{V} \Leftrightarrow \textcircled{M}$

Beweis: Variationsrechnung ■

## IV.3 Sobolev-Räume

### IV.3.0 Fahrplan/Übersicht

- Wir haben gezeigt:  
Eine Lösung  $u \in C^2(\Omega)$  von  $-\Delta u = f$  erfüllt die variationelle Formulierung

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

- Die Bilinearform

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx$$

ist ein Skalarprodukt auf  $C_0^1(\Omega)$ .

- $a(\cdot, \cdot)$  induziert eine Metrik durch „ $\sqrt{a(v, v)}$ “.
- Die Vervollständigung von  $C_0^1(\Omega)$  unter dieser Metrik ist somit per Konstruktion ein Hilbertraum, der später mit  $W_0^{1,2}(\Omega)$  bezeichnet wird.  
**Vervollständigung** meint dabei die Hinzunahme der Grenzwerte aller Cauchy-Folgen in  $C_0^1(\Omega)$  bezüglich der Metrik „ $\sqrt{a(v, v)}$ “.

Für (geeignetes) gegebenes  $f$  legt man durch

$$F(\varphi) := \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx$$

ein beschränktes lineares Funktional auf  $W_0^{1,2}(\Omega)$  fest.

Der Riesz'sche Darstellungssatz („Funktionale können auch mit Hilfe des Skalarproduktes dargestellt werden.“) garantiert dann die Existenz eines  $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ , so daß

$$a(u, \cdot) = F(\cdot).$$

$u$  ist also Lösung von

$$a(u, \varphi) = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx.$$

Im Folgenden sollen nun die Sobolev-Räume

$$W^{k,p}(\Omega) \quad \text{und} \quad W_0^{k,p}(\Omega)$$

eingeführt werden.

### IV.3.1 $L^p$ -Räume

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sei dabei ein beschränktes Gebiet.

Mit  $p \geq 1$  ist festgelegt:

$$L^p(\Omega) := \{\varphi | \varphi \text{ ist messbar und } |\varphi|^p \text{ ist Lebesgue-integrierbar}\}$$

$L^p$  ist ein Banach-Raum mit Norm

$$\|u\|_{p;\Omega} = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Für  $p = \infty$  definiert man

$$\|u\|_{\infty;\Omega} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega} |u|.$$

Unter anderem gilt für  $1/p + 1/q = 1$  und  $u \in L^p(\Omega)$ ,  $v \in L^q(\Omega)$  die Hölder-Ungleichung

$$\int_{\Omega} u \cdot v dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Weiterhin ist  $L^2(\Omega)$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v dx.$$

### IV.3.2 Approximation durch glatte Funktionen

**Definition IV.8** *Definiere*

$$L_{loc}^p(\Omega) = \{\varphi | \varphi \in L^p(\Omega') \forall \Omega' \subset\subset \Omega\}$$

[ $\Omega' \subset\subset \Omega$  bedeutet, daß  $\Omega'$  kompakt in  $\Omega$  enthalten ist.]

Sei weiterhin  $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\rho \geq 0$  mit  $\rho = 0$  außerhalb der Einheitskugel  $B_1(0)$  mit

$$\int \rho dx = 1.$$

$\rho$  wird häufig als **Glättungsfunktion** (engl. mollifier) bezeichnet.

**Beispiel:**

$$\rho(x) = \begin{cases} c \cdot \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right); & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

mit  $c$  so gewählt, daß  $\int \rho = 1$  erfüllt ist.

Für  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  und  $h > 0$  bezeichnet man die **Regularisierung** von  $u$  mit  $u_h$ , definiert durch die **Faltung**

$$u_h(x) = h^{-n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy,$$

falls  $h < \text{dist}(x, \partial\Omega)$ .

**Bemerkung IV.9**

$$u_h \in C^\infty(\Omega') \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega$$

und  $h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ .

Special feature:

$u_h$  approximiert  $u$  für  $h \rightarrow 0$  und zwar in der Topologie des Raumes, in dem  $u$  liegt:

**Lemma IV.10** Sei  $u \in C^0(\Omega)$ . Dann konvergiert  $u_h$  gleichmäßig gegen  $u$  für alle  $\Omega' \subset\subset \Omega$ .

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} u_h(x) &= h^{-n} \int_{|x-y| \leq h} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy \\ &= \int_{|z| \leq 1} \rho(z) u(x-hz) dz \end{aligned}$$

und weiter mit  $\Omega' \subset\subset \Omega$  und  $2h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega'} |u - u_h| &\leq \sup_{x \in \Omega'} \int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x) - u(x-hz)| dz \\ &\leq \sup_{x \in \Omega'} \sup_{|z| \leq 1} |u(x) - u(x-hz)|. \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $u$  auf der Menge

$$B_h(\Omega') = \{x | \text{dist}(x, \Omega') < h\}$$

konvergiert  $u_h$  auf  $\Omega'$  gleichmäßig gegen  $u$ . ■

**Lemma IV.11** Sei  $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ ,  $p < \infty$ . Dann konvergiert  $u_h$  gegen  $u$  im Sinne von  $L^p_{loc}(\Omega)$  (und auch  $L^p(\Omega)$ ).

Beweis: Die Hölder-Ungleichung liefert

$$|u_h(x)|^p \leq \int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x - hz)|^p dz,$$

so daß wegen  $\Omega' \subset\subset \Omega$  und mit  $2h < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |u_h|^p dx &\leq \int_{\Omega'} \int_{|z| \leq 1} \rho(z) |u(x - hz)|^p dz dx \\ &= \int_{|z| \leq 1} \rho(z) \int_{\Omega'} |u(x - hz)|^p dx dz \\ &\leq \int_{|z| \leq 1} \rho(z) \int_{B_h^c(\Omega')} |u|^p dx dz \\ &\leq \int_{B_h(\Omega')} |u|^p dx. \end{aligned}$$

Dabei ist wie oben  $B_h(\Omega') = \{x | \text{dist}(x, \Omega') < h\}$ . Diese Ungleichung lässt sich mit  $\Omega'' = B_h(\Omega')$  schreiben als

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \|u\|_{L^p(\Omega'')} . \quad (\text{IV.1})$$

Nun wird Lemma IV.10 angewendet, dazu seien  $\varepsilon > 0$  und  $w \in C^0(\Omega)$  mit

$$\|u - w\|_{L^p(\Omega'')} \leq \varepsilon, \quad (\text{IV.2})$$

wobei  $\Omega'' = B_{h'}(\Omega')$  und  $2h' < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ . Lemma IV.10 sagt nun aus, daß für hinreichend kleines  $h$

$$\|w - w_h\|_{L^p(\Omega')} \leq \varepsilon \quad (\text{IV.3})$$

ist. Nun kann man den Ausdruck  $\|u - u_h\|_{L^p(\Omega')}$  durch Einfügen geeigneter Nullen abschätzen:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^p(\Omega')} &\leq \|u - w\|_{L^p(\Omega')} + \|w - w_h\|_{L^p(\Omega')} + \|u_h - w_h\|_{L^p(\Omega')} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Dabei wurde der erste Term durch Ungleichung (IV.2) abgeschätzt, der zweite durch Ungleichung (IV.3) und der dritte durch (IV.1) angewandt auf  $u - w$ . Also konvergiert  $u_h$  gegen  $u$  in  $L^p_{loc}(\Omega)$ .

Die Konvergenz in bezüglich  $L^p(\Omega)$  erhält man, wenn man  $u$  außerhalb von  $\Omega$  auf null setzt und das Bewiesene auf  $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$  anwendet. ■

### IV.3.3 Schwache Ableitungen

**Definition IV.12** Sei  $u$  lokal integrierbar auf  $\Omega$  und  $\alpha$  ein beliebiger Multiindex. Dann heißt eine lokal integrierbare Funktion  $v$  die  $\alpha$ -te **schwache Ableitung**, von  $u$ , falls für alle  $\varphi \in C_0^{|\alpha|(\Omega)}$  gilt

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx.$$

Wir schreiben

$$v = D^{\alpha} u.$$

**Definition IV.13** Der lineare Raum der  $K$  mal schwach differenzierbaren Funktionen erhält die Bezeichnung

$$W^K(\Omega).$$

Bemerkung:  $C^K(\Omega) \subset W^K(\Omega)$

**Lemma IV.14** Es sei  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$  und der Multiindex  $\alpha$  gegeben und es existiere  $D^{\alpha} u$ . Für  $h < \text{dist}(x, \partial\Omega)$  gilt dann

$$D^{\alpha} u_h(x) = (D^{\alpha} u)_h(x),$$

das heißt die Ableitung der Regularisierung ist gleich der Regularisierung der Ableitung.

Beweis: Differentiation unter dem Integral ergibt

$$\begin{aligned} D^{\alpha} u_h(x) &= h^{-n} \int_{\Omega} D_x^{\alpha} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy \\ &= (-1)^{|\alpha|} h^{-n} \int_{\Omega} D_y^{\alpha} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) u(y) dy \\ &= h^{-n} \int_{\Omega} \rho\left(\frac{x-y}{h}\right) D^{\alpha} u(y) dy \\ &= (D^{\alpha} u)_h(x). \end{aligned}$$

■

**Satz IV.15** Seien  $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$   $v$  ist genau dann die  $\alpha$ -te schwache Ableitung von  $u$

$$v = D^{\alpha} u \quad (\text{schwach}),$$

wenn eine Folge  $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^{\infty}(\Omega)$  mit  $u_m \rightarrow u$  in  $L_{loc}^1(\Omega)$  und  $D^{\alpha} u_m \rightarrow v$  in  $L_{loc}^1(\Omega)$ .

Beweis: Via Lemma Lemma IV.11, Lemma IV.14 und Definition der schwachen Ableitung. Richtig aufschreiben als Übung. ■

Dieser Satz liefert eine äquivalente Charakterisierung von schwacher Ableitung: Schwache Ableitung als Grenzwert einer Folge von klassisch differenzierbaren Funktionen.

### IV.3.4 Die $W^{k,p}$ -Räume

Für  $p \geq 1$  und  $k \geq 0$  erklärt man

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in W^k(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

sowie

$$\|u\|_{k,p} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}$$

bzw.

$$\|u\|_{k,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p.$$

**Bemerkung IV.16**  $W^{k,p}$  ist vollständig.

$W_0^{k,p}(\Omega)$  bezeichnet den Abschluss von  $C_0^k(\Omega)$  in  $W^{k,p}(\Omega)$ .

Spezialfall:  $p = 2$

$W^{k,2}(\Omega)$  und  $W_0^{k,2}(\Omega)$  sind Hilberträume mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_k = \int_{\Omega} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u D^\alpha v \right) dx.$$

Bezeichnungen:  $H^k(\Omega)$  bzw.  $H_0^k(\Omega)$ .

**Satz IV.17**  $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$  liegt dicht in  $W^{k,p}(\Omega)$ .

Beweis: Globalisierung von Lemma IV.11 und Lemma IV.14. ■

Die geeignete Formulierung des Poisson-Problems lautet:

$$u \in H_0^1(\Omega) : \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx$$

oder abstrakter

$$u \in V : \quad \forall \varphi \in V \quad a(u, \varphi) = (f, \varphi)$$

mit

$$a(u, \varphi) = (\nabla u, \nabla \varphi) \\ \text{und } V = H_0^1(\Omega)$$

## IV.4 Abstrakte Formulierung

Abstrakter Rahmen:

- $V$  ein Hilbertraum



- $(\cdot, \cdot)_V$  zugehöriges Skalarprodukt
- $\|\cdot\|_V = \sqrt{(\cdot, \cdot)_V}$  zugehörige Norm
- $a(\cdot, \cdot)$  eine Bilinearform auf  $V \times V$
- $L(\cdot)$  eine Linearform auf  $V$  (bisher immer „ $L(\cdot) = (f, \cdot)$ “)

Variationelle Formulierung:

$$u \in V : \quad a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \quad \varphi \in V \quad \textcircled{V}$$

Voraussetzungen:

- V i)  $a(\cdot, \cdot)$  ist symmetrisch
- V ii)  $a(\cdot, \cdot)$  ist stetig:  $|a(v, w)| < c \|v\|_V \cdot \|w\|_V \quad \forall \quad v, w \in V, \quad c > 0$
- V iii)  $a(\cdot, \cdot)$  ist  $V$ -elliptisch:  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall \quad v \in V, \quad \alpha > 0$
- V iv)  $L(\cdot)$  ist stetig:  $|L(v)| \leq \Lambda \|v\|_V \quad \forall \quad v \in V, \quad \Lambda > 0$

**Satz IV.18 (Existenzsatz)** *Angenommen, es gelten die Bedingungen V i) bis V iv), dann existiert genau eine Lösung  $u \in V$  von  $\textcircled{V}$  mit der Stabilitätsabschätzung*

$$\|u\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$$

Beweis:

i) **Eindeutigkeit**

Annahme:  $\exists \quad u_1, u_2 \in V, u_1, u_2$  lösen  $\textcircled{V}$

$$\begin{aligned} a(u_1, \varphi) &= L(\varphi) \\ a(u_2, \varphi) &= L(\varphi) \\ \Rightarrow \quad a(u_1 - u_2, \varphi) &= 0 \end{aligned}$$

Wähle  $\varphi = u_1 - u_2 : \quad a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$   
 Benutze V iii):  $\alpha \|u_1 - u_2\|_V^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$   
 $\Rightarrow \quad u_1 - u_2 = 0$

ii) **Existenz**

*Idee:* Reduziere  $\textcircled{V}$  auf ein Fixpunktproblem

Rieszscher Darstellungssatz:

$\exists \quad A \in \mathcal{L}(V, V) :=$ Lineare Abbildungen, stetig von  $V$  nach  $V$  und ein  $l \in V$ , so daß

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (Au, v)_V \quad \forall u, v \in V \\ L(v) &= (l, v)_V \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Betrachte  $\textcircled{V}$ :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in V : a(u, \varphi) - L(\varphi) &= 0 \\ \Leftrightarrow (Au - l, \varphi)_V &= 0 \\ \Leftrightarrow (-\rho(Au - l), \varphi)_V &= 0 \quad \forall \rho > 0 \\ \Leftrightarrow \langle u - \rho(Au - l) - u, \varphi \rangle_V &= 0 \\ \Leftrightarrow u &= u - \rho(Au - l) \quad \forall \rho > 0 \end{aligned}$$

Betrachte  $w_\rho : V \rightarrow V$  mit  $w_\rho(v) = v - \rho(Av - l)$

Abschätzung von

$$\begin{aligned} \|w_\rho(v_1) - w_\rho(v_2)\|_V^2 &= \|v_1 - \rho(Av_1 - l) - v_2 + \rho(Av_2 - l)\|_V^2 \\ &= \langle v_1 - \rho Av_1 - (v_2 - \rho Av_2), v_1 - v_2 - \rho(Av_1 - Av_2) \rangle_V \\ &= (v_1 - v_2, v_1 - v_2)_V - 2\rho \langle A(v_1 - v_2), v_1 - v_2 \rangle_V + \\ &\quad + \rho^2 \langle A(v_1 - v_2), A(v_1 - v_2) \rangle_V \\ &= \|v_1 - v_2\|_V^2 - 2\rho \underbrace{a(v_1 - v_2, v_1 - v_2)}_{\geq \alpha \|v_1 - v_2\|_V^2, \text{ V iii)}} + \rho^2 \|A(v_1 - v_2)\|_V^2 \\ &\leq \|v_1 - v_2\|_V^2 - 2\rho\alpha \|v_1 - v_2\|_V^2 + \rho^2 \|A\|_V^2 \|v_1 - v_2\|_V^2 \\ &= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|_V^2) \|v_1 - v_2\|_V^2 \end{aligned}$$

Jetzt „Kurvendiskussion“ für  $(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|_V^2)$

Bedingung dafür, daß  $w_\rho$  eine Kontraktionsabbildung ist:

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha\rho + \rho^2 \|A\|_V^2 &< 1 \\ \text{d. h. } p(\rho) = -\rho(2\alpha - \|A\|_V^2 \rho) &< 0 \\ \Rightarrow \rho > 0 \quad \wedge \quad \rho < \frac{2\alpha}{\|A\|_V^2} \\ \Rightarrow w_\rho \text{ ist für solche } \rho &\text{ eine Kontraktionsabbildung} \end{aligned}$$

$$w_\rho(v) = v - \rho(Av - l)$$

$\curvearrowright \exists$  ein Fixpunkt

$\curvearrowright$  es gibt eine Lösung von  $\textcircled{V}$

### iii) Stabilitätsabschätzung

Wähle  $\varphi = u$  in  $\textcircled{V}$  und benutze „ $V$ -elliptisch“ (V iii)) und die Stetigkeit von  $L$  (V iv))

$$\begin{aligned} \alpha \|u\|_V^2 &\stackrel{\text{V iii)}}{\leq} a(u, u) \stackrel{\textcircled{V}}{=} L(u) \stackrel{\text{V iv)}}{\leq} \Lambda \|u\|_V \\ \Leftrightarrow \|u\|_V &\leq \frac{\Lambda}{\alpha} \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Beweis gilt auch für eine unsymmetrische Form  $a(\cdot, \cdot)$ . ■

Abstraktes Minimierungsproblem

Finde  $u \in V$ , so daß

$$F(u) \leq F(\varphi) \quad \forall \varphi \in V \quad \textcircled{M}$$

gilt, mit

$$F(\varphi) = \frac{1}{2}a(\varphi, \varphi) - L(\varphi)$$

**Satz IV.19**  $\textcircled{M} \Leftrightarrow \textcircled{V}$

Beweis: Übung ■

## IV.5 Diskretisierung

$$u \in V : a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in V$$

$$u_h \in V_h : a(u_h, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in V_h \subset V$$

$$V_h = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_N \rangle$$

$$\varphi \in V_h : \varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$u_h \in V_h : u_h = \sum_{j=1}^N x_j \varphi_j, \quad x_j \in \mathbb{R}$$

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\leadsto \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) x_j = L(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\leadsto \text{Matrixform } Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{N \times N}; \quad x, b \in \mathbb{R}^N$$

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad b_i = L(\varphi_i) \quad (\text{Reihenfolge der Indizes!})$$

**Satz IV.20** *Es gelte V i) - V iv), dann ist A symmetrisch und positiv definit.*

Beweis: Übung ■

**Satz IV.21** *Es gelte V i) - V iv), dann gilt*

$$\|u_h\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$$

*(kein Stabilitätsverlust)*

Beweis: Übung ■

**Satz IV.22**

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{c}{\alpha} \|u - \varphi\|_V \quad \forall \varphi \in V_h \subset V$$

## IV.6 Variationsungleichungen

Problem:

$$a(u, \varphi - u) \geq L(\varphi - u) \quad \forall \varphi \in K \subset V$$

$K$  ist abgeschlossen und konvex.

(Variationsungleichung 1. Art)

**Lemma IV.23**  $K \subset V$  sei abgeschlossen und konvex. Dann gilt

$$\forall x \in V \quad \exists! y \in K, \text{ so da\ss } \|x - y\| = \inf_{\varphi \in K} \|x - \varphi\|$$

Der Punkt  $y$  hei\ss t Projektion von  $x$  auf die Menge  $K$ :  $y = P_K(x)$

Beweis:

i) „Es gibt ein  $y$ “

Sei  $\varphi_k$  eine „Minimalfolge“, d. h.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k - x\| = d = \inf_{\varphi \in K} \|\varphi - x\|$

Durch Ausmultiplizieren verifiziert man

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|^2 = 2\|x - \varphi_k\|^2 + 2\|x - \varphi_l\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_l)\right\|^2$$

Da  $K$  konvex:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_l) \in K & \quad \curvearrowright \quad d^2 \leq \left\|x - \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_l)\right\|^2 \\ \Rightarrow \|\varphi_k - \varphi_l\|^2 & \leq 2\underbrace{\|x - \varphi_k\|^2}_{\rightarrow d^2} + 2\underbrace{\|x - \varphi_l\|^2}_{\rightarrow d^2} - 4d^2 \end{aligned}$$

Somit ist  $\|\varphi_k - \varphi_l\| \xrightarrow[k, l \rightarrow \infty]{} 0$ .

Da  $V$  vollständig ist und  $K$  abgeschlossen

$$\exists y \in K \quad \text{mit} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = y$$

Wegen der Stetigkeit der Norm  $\|x - y\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - \varphi_k\| = d$

ii) „Eindeutigkeit von  $y$ “

Seien  $y_1, y_2 \in K$  mit  $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \inf_{\varphi \in K} \|x - \varphi\|$ . Analog zu i):

$$\|y_1 - y_2\|^2 \leq 2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_2\|^2 - 4d^2 \leq 0$$

■

**Satz IV.24** Sei  $K \subset V$  abgeschlossen und konvex. Dann gilt  $y = P_K(x)$  genau dann, wenn gilt:

$$y \in K : (y - x, \varphi - y) \geq 0 \quad \forall \varphi \in K$$

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “ :  $x \in V$  und  $y = P_K(x) \in K$

$K$  ist konvex:  $(1 - t)y + t\varphi = y + t(\varphi - y) \in K, 0 \leq t \leq 1$

Betrachte

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \|x - y - t(\varphi - y)\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - 2t(x - y, \varphi - y) + t^2 \|\varphi - y\|^2 \end{aligned}$$

$\phi(t)$  nimmt bei  $t = 0$  das Minimum an

$$\begin{aligned} \Rightarrow \phi'(0) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2(x - y, \varphi - y) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - y, \varphi - y) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (y - x, \varphi - y) &\geq 0 \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “ : Wähle  $\varphi \in K$  beliebig aber fest:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y - x, \varphi - y) \\ &= (y - x, (\varphi - x) + (x - y)) \\ &= (y - x, x - y) + (y - x, \varphi - x) \\ &= -\|y - x\|^2 + (y - x, \varphi - x) \\ \Rightarrow \|y - x\|^2 &\leq \|y - x\| \|\varphi - x\| \\ \Rightarrow \|y - x\| &\leq \|\varphi - x\| \quad \forall \varphi \in K \end{aligned}$$

■

**Korollar IV.25** Sei  $K \subset V$  abgeschlossen und konvex. Dann ist  $P_K$  nicht-expansiv:

$$\|P_K(x) - P_K(x')\| \leq \|x - x'\| \quad \forall x, x' \in V$$

Beweis: Gegeben seien  $x, x' \in V$ .  $y = P_K(x)$ ,  $y' = P_K(x')$

$y \in K : (y, \varphi - y) \geq (x, \varphi - y) \quad \forall \varphi \in K$

$y' \in K : (y', \varphi - y') \geq (x', \varphi - y') \quad \forall \varphi \in K$

1. Ungleichung:  $\varphi = y'$ ; 2. Ungleichung:  $\varphi = y$

„Addition“ :

$$\begin{aligned} \|y - y'\|^2 &= (y - y', y - y') \leq (x - x', y - y') \\ &\leq \|x - x'\| \|y - y'\| \\ \Leftrightarrow \|y - y'\| &\leq \|x - x'\| \end{aligned}$$

■

**Satz IV.26** *Das Problem*

$$a(u, \varphi - u) \geq L(\varphi - u) \quad \forall \varphi \in K$$

hat eine eindeutige Lösung.

Beweis:

i) **Eindeutigkeit**

$$a(u_1, \varphi - u_1) \geq L(\varphi - u_1) \quad \forall \varphi \in K$$

$$a(u_2, \varphi - u_2) \geq L(\varphi - u_2) \quad \forall \varphi \in K$$

Testen mit  $\varphi = u_2$  bzw.  $\varphi = u_1$  und Addition:

$$\begin{aligned} \alpha \|u_1 - u_2\|^2 &\stackrel{\text{v iii)}}{\leq} a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \\ &\Rightarrow \|u_1 - u_2\| \leq 0 \end{aligned}$$

ii) **Existenz**

Mit dem Rieszschen Darstellungssatz

$$a(u, v) = (Au, v) \quad \forall u, v \in V$$

$$L(v) = (l, v) \quad \forall v \in V$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} (Au, \varphi - u) &\geq (l, \varphi - u) \quad \forall \varphi \in K \\ \Leftrightarrow & \quad (-(Au - l), \varphi - u) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \quad ((u - \rho(Au - l)) - u, \varphi - u) \leq 0 \quad \forall \rho > 0 \end{aligned}$$

Dies ist nach Satz IV.24 äquivalent zu  $u = P_K(u - \rho(Au - l))$ .

Betrachte  $w_\rho(v) = P_K(v - \rho(Av - l))$

Seien  $v_1, v_2 \in V$

$$\begin{aligned} \|w_\rho(v_1) - w_\rho(v_2)\|^2 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 + \rho^2 \|A(v_1 - v_2)\|^2 - 2\rho a(v_1 - v_2, v_1 - v_2) \\ &\quad (P_K \text{ nicht expansiv}) \\ &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|A\|^2) \|v_1 - v_2\|^2 \end{aligned}$$

$\curvearrowright w_\rho$  ist eine Kontraktion, falls  $0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|A\|^2}$  gilt.

Kontraktion  $\curvearrowright$  Fixpunkt  $\curvearrowright$  Fixpunkt ist Lösung. ■

## IV.7 Lineare Funktionale

Bezeichnung:  $X$  und  $Y$  seien normierte  $\mathbb{R}$ -Vektorräume.

Wir untersuchen lineare Operatoren

$$T : X \rightarrow Y,$$

das heißt lineare, stetige Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ .

**Lemma IV.27** *Ist  $T : X \rightarrow Y$  linear, so sind äquivalent:*

- i)  $T$  ist stetig.
- ii)  $T$  ist stetig in  $x_0$  für ein  $x_0 \in X$ .
- iii)  $\sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y < \infty$
- iv)  $\exists c > 0$  mit  $\|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X \quad \forall x \in X$

[ohne Beweis]

**Definition IV.28 (Stetige (oder beschränkte) Operatoren)**

$$L(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ ist stetig und linear}\}$$

Die Operatornorm von  $T$  ist die kleinste Zahl mit  $\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{L(X, Y)} \|x\|_X$ :

$$\|T\|_{L(X, Y)} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y.$$

**Definition IV.29**

- i)  $X' := L(X, \mathbb{R})$  ist der **Dualraum** von  $X$ . Elemente von  $X'$  heißen lineare Funktionale.
- ii) Für  $T \in L(X, Y)$  ist

$$N(T) := \{x \in X \mid Tx = 0 \in Y\}$$

der **Nullraum** von  $T$ .

**Bemerkung IV.30**  $N(T)$  ist ein abgeschlossener Unterraum

Rechnung:

- i) (Abgeschlossenheit)  
Betrachte  $x_k \rightarrow x$  für  $k \rightarrow \infty$ ,  $x_k \in N(T)$ ,  $x \in X$ . Wegen der Stetigkeit von  $T$  folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T(x_k) = 0 = T(x).$$

Dies aber bedeutet,  $x \in N(T)$ .

ii) (Unterraum)

Seien  $x_1, x_2 \in N(T)$ , dann gilt

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) = 0 + 0 = 0.$$

■

**Satz IV.31 (Rieszscher Darstellungssatz)**  $X$  sei ein Hilbertraum.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} J : X &\rightarrow X' \\ x &\rightarrow (\cdot, x)_X \end{aligned}$$

ist ein linearer Isomorphismus.

Beweis:

i)  $J$  ist linear:

$$J(x_1) + J(x_2) = (\cdot, x_1)_X + (\cdot, x_2)_X = (\cdot, x_1 + x_2)_X = J(x_1 + x_2)$$

ii)  $J(x) \in X'$ :

$$\begin{aligned} &|J(x)(y)| = (y, x)_X \leq \|x\| \|y\| \\ \Rightarrow &\sup_{\|y\| \leq 1} |J(x)(y)| \leq \|x\|_X < \infty \\ \Rightarrow &\|J(x)\|_{X'} \leq \|x\|_X \end{aligned}$$

iii)  $J$  ist injektiv: Betrachte dazu  $\left| J(x) \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right| = \frac{(x, x)}{\|x\|} = \|x\|$ ,  
also ist  $\|J(x)\|_{X'} \geq \|x\|$ , das heißt

$$x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad J(x) \neq 0,$$

der Nullraum enthält also nur die Null.

Randbemerkung: Aus ii) und iii) folgt: Die Abbildung  $J$  ist eine Isometrie:

$$\|J(x)\|_{X'} = \|x\|_X.$$

iv)  $J$  ist surjektiv:

Beweisstruktur: Konstruiere zu gegebenem  $0 \neq x'_0 \in X'$  ein  $w \in X$  mit

$$\forall x \in X : \quad x'_0(x) = (x, w)_X.$$

[Vorschau:  $\frac{x_0}{\|x_0\|^2}$  tut's.]

$P$  bezeichne die Projektion auf den abgeschlossenen Unterraum  $N(x'_0)$ .



Wähle  $e \in X$  mit  $x'_0(e) = 1$ .

Setze  $x_0 = e - Pe$ . Es gilt

$$x'_0(x_0) = x'_0(e) - x'_0(Pe) = 1 - 0 = 1,$$

also insbesondere  $x_0 \neq 0$ . Wendet man Satz IV.24, also

$$\forall \varphi \in K : \quad (Px - x, \varphi - Px) \geq 0,$$

an, ergibt sich

$$\forall \tilde{y} \in N(x'_0) \quad (\tilde{y} - Pe, x_0)_X = (\tilde{y} - Pe, e - Pe)_X \leq 0$$

Mit  $y, Pe \in N(x'_0)$  enthält der Nullraum auch Summe und Differenz der beiden:

$$\tilde{y} = y + Pe \in N(x'_0) \quad \text{und} \quad \tilde{y} = y - Pe \in N(x'_0).$$

Die obigen Ungleichungen lauten dann

$$(y, x_0)_X \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad (-y, x_0)_X \leq 0,$$

woraus sich ergibt

$$\forall y \in N(x'_0) : \quad (y, x_0) = 0. \tag{*}$$

Für beliebige  $x \in X$  ist  $x = x - x'_0(x)x_0 + x'_0(x)x_0$  wegen

$$x'_0(x - x'_0(x)x_0) = x'_0(x) - x'_0(x) \underbrace{x'_0(x_0)}_{=1} = 0$$

$$\begin{aligned} (x, x_0)_X &= \underbrace{(x - x'_0(x)x_0 + x'_0(x)x_0, x_0)_X}_{\in N(x'_0)} \\ &= (x'_0(x)x_0, x_0)_X, && \text{wegen (*)} \\ &= x'_0(x) \|x_0\|^2 \\ \Rightarrow \quad x'_0(x) &= \left( x, \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \right)_X \\ &= J \left( \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \right) (x) \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} L(v) &= (l, v) \\ a(u, v) &= (Au, v), && a(v, w) \leq c \|v\| \|w\| \end{aligned}$$

$a(x, \cdot)$  ist lineares beschränktes Funktional.

Riesz:  $a(x, \cdot) = (\tilde{x}, \cdot) = (Ax, \cdot)$

## IV.8 Diskretisierung

$$u \in V : a(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in V$$

$$u_h \in V_h : a(u_h, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in V_h \subset V$$

$$V_h = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_N \rangle$$

$$\varphi \in V_h : \varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

$$u_h \in V_h : u_h = \sum_{j=1}^N x_j \varphi_j, \quad x_j \in \mathbb{R}$$

$$a(u_h, \varphi_i) = L(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\leadsto \sum_{j=1}^N a(\varphi_j, \varphi_i) x_j = L(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

$$\leadsto \text{Matrixform } Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{N \times N}; \quad x, b \in \mathbb{R}^N$$

$$A_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad b_i = L(\varphi_i) \quad (\text{Reihenfolge der Indizes!})$$

**Satz IV.32** *Es gelte V i) - V iv), dann ist A symmetrisch und positiv definit.*

Beweis: Übung ■

**Satz IV.33** *Es gelte V i) - V iv), dann gilt*

$$\|u_h\|_V \leq \frac{\Lambda}{\alpha}$$

*(kein Stabilitätsverlust)*

Beweis: Übung ■

**Satz IV.34**

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{c}{\alpha} \|u - \varphi\|_V \quad \forall \varphi \in V_h \subset V$$

# Kapitel V

## Differentialgleichungssysteme

### V.1 Wie fließt Honig?

Beschreibung einer **inkompressiblen** (keine Dichteänderung), zähen Flüssigkeit durch **Stokes-Gleichungen** in einem  $n$ -dimensionalen Körper  $\Omega$  ( $n = 2$ ).

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u_1(x_1, x_2) + \partial_{x_1} p(x_1, x_2) &= f_1(x_1, x_2) \\ -\Delta u_2(x_1, x_2) + \partial_{x_2} p(x_1, x_2) &= f_2(x_1, x_2) \\ \partial_{x_1} u_1(x_1, x_2) + \partial_{x_2} u_2(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \Omega$$

Dabei ist  $u_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die **Geschwindigkeitskomponente** in Richtung  $x_i$ .

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =: u : \quad \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

bezeichnet das **Geschwindigkeitsfeld**.

$p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist der gesuchte **Druck**.

Als Randbedingungen betrachten wir

$$u = u_0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Kompakt geschrieben lautet die Aufgabe (mit  $f = (f_1, f_2)^T$ )

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f && \text{auf } \Omega \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{auf } \Omega \\ u &= u_0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Bemerkung V.1 (Verträglichkeitsbedingung an  $u_0$ )**  $u_0$  kann nicht beliebig vorgegeben werden.

Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt:

$$\int_{\partial\Omega} u_0 \cdot nd\Gamma = \int_{\partial\Omega} u \cdot nd\Gamma = \int_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div} u}_{=0} dx = 0.$$

Im folgenden betrachten wir zunächst den Fall

$$u_0 = 0.$$

**Bemerkung V.2 (Drucknormierung)** *Der Druck  $p$  ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Er wird in der Regel eindeutig festgelegt durch*

$$\int_{\Omega} p dx = 0.$$

(Druckmittelwert ist Null.)

### V.1.1 Variationelle Formulierung

Wir setzen

$$V = (H_0^1(\Omega))^2$$

$$Q = \left\{ q \in L_2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q dx = 0 \right\}$$

Durch Testen von  $-\Delta u + \nabla p = f$  mit  $\varphi \in V$ :

$$(-\Delta u, \varphi) + (\nabla p, \varphi) = (f, \varphi)$$

und anschließender partieller Integration gelangt man zu der Aufgabe: Finde  $(u, p) \in V \times Q$ , so daß

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla \varphi) - (p, \operatorname{div} \varphi) &= (f, \varphi) & \forall \varphi \in V \\ (\operatorname{div} u, q) &= 0 & \forall q \in Q \end{aligned} \quad (\text{V.1})$$

#### Stabilität

**Satz V.3 (Babuška-Brezzi-Bedingung, BBB)** *Falls  $\Omega$  beschränkt ist und  $\Omega \in C^{0,1}$ , das heißt der Rand von  $\Omega$  lässt sich lokal durch eine Lipschitz-stetige Parametrisierung darstellen, dann existiert eine Konstante  $c > 0$ , so daß für beliebige  $q \in Q$  gilt*

$$\sup_{\varphi \in V} \frac{(\operatorname{div} \varphi, q)}{\|\varphi\|_1} \geq c \|q\|_0$$

Beweis: Via viel Literatur. ■

**Satz V.4** *Es gilt die natürliche Stabilitätsabschätzung*

$$\|u\|_1 + \|p\|_0 \leq C_{\Omega} \cdot \|f\|_{-1}$$

mit

$$\|f\|_{-1} := \sup_{\varphi \in V} \frac{|(f, \varphi)|}{\|\varphi\|_1}$$

(Geschwindigkeitskontrolle)

Beweis:

i) Mit der Wahl  $\varphi = u$  und  $q = p$  und Addition der beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla u) - (p, \operatorname{div} u) &= (f, u) \\ +(\operatorname{div} u, p) &= +0 \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \|u\|_1^2 &= \frac{(f, u)}{\|u\|_1} \cdot \|u\|_1 \\ &\leq \sup_{\varphi \in V} \frac{|(f, \varphi)|}{\|\varphi\|_1} \cdot \|u\|_1 \\ \Rightarrow \|u\|_1 &\leq \|f\|_{-1} \end{aligned}$$

ii) Kontrolle des Drucks:  
Benutze die Babuska-Brezzi-Bedingung:

$$\begin{aligned} c \|p\|_0 &\leq \sup_{\varphi \in V} \frac{(p, \operatorname{div} \varphi)}{\|\varphi\|_1} \\ &= \sup_{\varphi \in V} \frac{(\nabla u, \nabla \varphi) - (f, \varphi)}{\|\varphi\|_1} && \text{(Stokes-Gleichung)} \\ &\leq \sup_{\varphi \in V} \frac{\|\nabla u\|_0 \|\nabla \varphi\|_0 - (f, \varphi)}{\|\varphi\|_1} \\ &\leq c \|u\|_1 + \sup_{\varphi \in V} \frac{|(f, \varphi)|}{\|\varphi\|_1} && \text{(Äquivalenz von } \|\nabla \varphi\|_0 \text{ und } \|\varphi\|_1) \\ &\leq c \|u\|_1 + \|f\|_{-1} \\ &\leq C \|f\|_{-1} && \text{(wegen i))} \end{aligned}$$

i) und ii) ergeben zusammen die Behauptung. ■

**Bemerkung V.5** Die Stabilitätsbedingung BBB spiegelt ein Zueinanderpassen der Räume  $V$  und  $Q$  wieder. Dies muss auch bei der Diskretisierung berücksichtigt werden.

Betrachte ein Galerkin-Verfahren:...

Die variationelle Formulierung des Stokes-Problems (V.1) lässt sich auch schreiben als

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) + b(\varphi, p) &= (f, \varphi) && \forall \varphi \in V \\ b(u, q) &= 0 && \forall q \in Q, \end{aligned}$$

dabei sind

$$\begin{aligned}
 V &= (H_0^1(\Omega))^2 \\
 Q &= \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q = 0 \right\} \\
 a(u, \varphi) &= (\nabla u, \nabla \varphi) = (\nabla u_1, \nabla \varphi_1) + (\nabla u_2, \nabla \varphi_2) \\
 b(\varphi, q) &= (\operatorname{div} \varphi, q).
 \end{aligned}$$

Damit lautet die Babuška-Brezzi-Bedingung:

$$\exists c > 0 \quad \sup_{\varphi \in V} \frac{b(\varphi, q)}{\|\varphi\|_V} \geq c \|q\|_Q.$$

Diese impliziert die Stabilitätsabschätzung

$$\|u\|_1 + \|p\|_0 \leq \|f\|_{-1}.$$

## V.2 Sattelpunktprobleme

Aufgabe: Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

Bezeichnungen:  $X, M$  Hilberträume

$a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$   
 $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$

} stetige Bilinearformen

$X', M'$  Dualräume zu  $X$  und  $M$

entsprechende Paarungen werden mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet

Weiterhin gegeben  $f \in X', g \in M'$

Problem: Gesucht wird in  $X$  das Minimum von

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u \rangle \tag{PM}$$

unter der Nebenbedingung  $b(u, q) = \langle g, q \rangle \quad \forall q \in M$

(Bezug zu Anwendung:  $u \sim \sigma$ )

Umformulierung: Betrachte die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(u, \lambda) := J(u) + [b(u, \lambda) - \langle g, \lambda \rangle]$$

Dies führt auf das Sattelpunktproblem: (vgl. Übung)

Gesucht wird  $(u, \lambda) \in X \times M$  mit

$$\begin{aligned}
 a(u, \varphi) + b(\varphi, \lambda) &= \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in X \\
 b(u, q) &= \langle g, q \rangle \quad \forall q \in M
 \end{aligned} \tag{PS}$$

Für jede Lösung  $(u, \lambda)$  von (PS) kann man die „Sattelpunkteigenschaft“

$$\mathcal{L}(u, q) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(\varphi, \lambda)$$

nachrechnen. (vgl. Übung)

**Beispiel V.6** Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{auf } \Omega \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit  $X = H^1(\Omega)$  und  $M = L_2(\partial\Omega)$  Definiere:

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) &:= \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx \\ \langle f, \varphi \rangle &:= \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx = (f, \varphi) \\ b(\varphi, q) &:= \int_{\partial\Omega} \varphi \cdot q d\Gamma \\ \langle g, q \rangle &:= \int_{\partial\Omega} g q d\Gamma \end{aligned}$$

Nebenbedingung:

$$\int_{\partial\Omega} u q d\Gamma = \int_{\partial\Omega} g \cdot q d\Gamma \quad \forall q \in M$$

**Beispiel V.7** Erneut

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{auf } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Substitution:

$$\sigma = \nabla u$$

(Spannung  $\sigma$ )

Dies führt auf das System

$$\begin{aligned} \sigma &= \nabla u \\ \operatorname{div} \sigma &= -f && \text{auf } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Wir testen:

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) &= (\nabla u, \tau) && \forall \tau \in L_2(\Omega)^2 \\ (\operatorname{div} \sigma, \varphi) &= (-f, \varphi) && \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Partielle Integration:

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) - (\nabla u, \tau) &= 0 && \forall \tau \in L_2(\Omega)^2 \\ -(\sigma, \nabla \varphi) &= -(f, \varphi) && \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

In diesem Beispiel:  $u \sim \sigma; \lambda \sim u$

$$X = (L_2(\Omega))^2, \quad M = H_0^1(\Omega)$$

$$a(\sigma, \tau) = (\sigma, \tau) = \int_{\Omega} (\sigma_1 \tau_1 + \sigma_2 \tau_2) dx$$

$$b(\tau, \varphi) = -(\tau, \nabla \varphi)$$

### V.2.1 Lösbarkeit von Sattelpunktproblemen

Analyse für den endlichdimensionalen Fall:

Betrachte:

$$C := \underbrace{n}_{\left\{ \begin{matrix} A & B^T \\ B & 0 \end{matrix} \right\}} \underbrace{m}_{\left\{ \begin{matrix} u \\ \lambda \end{matrix} \right\}} = \underbrace{\left( \begin{matrix} f \\ g \end{matrix} \right)}_{\left\{ \begin{matrix} f \\ g \end{matrix} \right\}} \quad (V.2)$$

Zeilen von  $B$  seien linear unabhängig. (Keine doppelte Nebenbedingung)

Wir hatten bereits als notwendige Bedingung:

$$n \geq m.$$

#### Bemerkung V.8

a) *Unter den Voraussetzungen*

i)  $A$  ist invertierbar,

ii)  $S := BA^{-1}B^T$  ist invertierbar,

ist das System (V.2) eindeutig lösbar.

b) *Notwendige Bedingung für die Invertierbarkeit von  $S$  ist die Injektivität von  $B^T$ .*

Beweis:

a) Die erste Zeile von (V.2) lässt sich nach  $u$  auflösen:

$$\begin{aligned} Au + B^T \lambda &= f \\ \Leftrightarrow u &= A^{-1}(f - B^T \lambda) \end{aligned}$$

und in die zweite Zeile einsetzen:

$$\begin{aligned} Bu &= g \\ \Leftrightarrow B(A^{-1}f - A^{-1}B^T \lambda) &= g \\ \Leftrightarrow \underbrace{(BA^{-1}B^T)}_{=:S, \text{ Schurkomplement}} \lambda &= BA^{-1}f - g \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ii) ist damit  $\lambda$  eindeutig bestimmt und dann auch  $u$ .

b) Wenn schon  $B^T$  nicht injektiv ist, kann es  $S$  auch nicht mehr sein. ■

**Bemerkung V.9** *ACHTUNG: Die Invertierbarkeit von  $A$  ist keine notwendige Voraussetzung zur Lösbarkeit von (V.2). Betrachte hierzu*

$$C = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Hier ist  $\det C = -4 \neq 0$ .



**Bemerkung V.10** Falls  $A$  nicht invertierbar ist, kann man alternativ wie folgt vorgehen:

i) Multipliziere die zweite Zeile in (V.2) mit  $B^T$ :

$$B^T B u = B^T g.$$

ii) Addition zur ersten Zeile:

$$\begin{pmatrix} A + B^T B & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + B^T g \\ g \end{pmatrix}.$$

Anwendung auf Beispiel der vorherigen Bemerkung:

$$B^T B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Das System lautet dann

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right) : \circ)$$

Frage: Wieviel Invertierbarkeit braucht man für  $A$ ?

Was weiß man über  $B$ ?

- $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $n \geq m$
- $B$  hat maximalen Rang  $\Rightarrow$  Rang  $B = m$
- $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Betrachte

$$Z = \text{Kern } B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^m \quad (Bx, y) = 0\}$$

$$\mathbb{R}^n = Z^\perp \oplus Z$$

$B$  ist ein Isomorphismus auf  $Z^\perp$ :

$$B : Z^\perp \leftrightarrow \mathbb{R}^m,$$

der sich darstellen lässt als

$$B = (\overline{B}, 0)$$

mit  $\overline{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $\overline{B}^{-1}$  existiert.  $A$  hat dann die Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} A_{\perp\perp} & A_{\perp 0} \\ A_{0\perp} & A_{00} \end{pmatrix},$$

also hat man insgesamt

$$C = \begin{pmatrix} A_{\perp\perp} & A_{\perp 0} & \overline{B}^T \\ A_{0\perp} & A_{00} & 0 \\ \overline{B} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\overline{B}$  und  $\overline{B}^T$  sind per Konstruktion invertierbar.

Falls zusätzlich  $A_{00}$  invertierbar ist, ist das gesamte System invertierbar.

Es gilt also

**Satz V.11** Falls

$$A : Z \rightarrow A(Z)$$

ein Isomorphismus ist, ist  $C$  invertierbar.

**Lemma V.12**

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{(Bx, y)}{\|x\|} \geq \beta \|y\| \Leftrightarrow B : Z^\perp \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

Beweis:

- ( $\Leftarrow$ )

$$\begin{aligned} & \forall y \in \mathbb{R}^m \exists x \in Z^\perp \text{ mit } y = Bx \\ \Rightarrow & \frac{(Bx, y)}{\|x\| \|y\|} = \frac{\|y\|}{\|x\|} = \frac{\|y\|}{\|B^{-1}y\|} \\ & \geq \frac{\|y\|}{\|B^{-1}\| \|y\|} = \frac{1}{\|B^{-1}\|} \end{aligned}$$

- ( $\Rightarrow$ ) Angenommen,  $B$  wäre kein Isomorphismus von  $Z^\perp \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dann wäre  $B$  nicht surjektiv ( $B$  ist per Konstruktion injektiv), also gäbe es ein  $y \in \mathbb{R}^m$ , so daß

$$\begin{aligned} & \forall x \in Z^\perp : Bx \neq y \\ \Rightarrow & Bx \in \{y\}^\perp \\ \Rightarrow & \exists y : \forall x \quad (Bx, y) = 0 \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu der Abschätzung. ■

**Satz V.13** Durch (PS) wird ein Isomorphismus  $L : X \times M \rightarrow X' \times M'$  erklärt, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i) Die Bilinearform  $a$  ist elliptisch auf dem Raum  $Z = \{v \in X \mid b(v, q) = 0 \quad \forall q \in M\}$ , also  $a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$  für  $v \in Z \subset X$  und  $\alpha > 0$

ii)  $\exists \beta > 0$  mit  $\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\| \|q\|} \geq \beta$

### V.2.2 Laplace-Gleichung als gemischtes Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= -f \quad \text{auf } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

„formales System“ :

$$\begin{aligned} \sigma &= \nabla u \quad u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \operatorname{div} \sigma &= \partial_{x_1} \sigma_1 + \partial_{x_2} \sigma_2 = -f \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

Variationeller Ansatz:

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) - \langle \nabla u, \tau \rangle &= 0 \quad \forall \tau \\ \langle \operatorname{div} \sigma, \varphi \rangle &= \langle -f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \end{aligned}$$

#### Primal-gemischte Formulierung

Gesucht ist  $(\sigma, u) \in L_2(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)$ , so daß gilt:

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) - \langle \nabla u, \tau \rangle &= 0 \quad \forall \tau \in L_2(\Omega)^2 \\ - \langle \sigma, \nabla \varphi \rangle &= \langle -f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Im abstrakten Rahmen:  $X = L_2(\Omega)^2, \quad M = H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} a(\sigma, \tau) &= (\sigma, \tau) := (\sigma_1, \tau_1) + (\sigma_2, \tau_2) \\ b(\tau, \varphi) &= -(\tau, \nabla \varphi) \end{aligned}$$

Nachweis:

i) (Bedingung i) aus Satz V.13)  
Wegen  $\|\sigma\|^2 = a(\sigma, \sigma)$ , ist  $a(\cdot, \cdot)$  elliptisch auf ganz  $X$ .

ii) (Bedingung ii) aus Satz V.13)  
Sei  $v \in H_0^1(\Omega)$  gegeben.

Wähle  $\tau = -\nabla v \in L_2(\Omega)^2$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|} &= \frac{-(\tau, \nabla v)}{\|\tau\|} \\ &= \frac{(\nabla v, \nabla v)}{\|\tau\|} = \frac{(\nabla v, \nabla v)}{\|\nabla v\|} \\ &= \|\nabla v\| \geq \frac{1}{c} \|v\|_1 \end{aligned}$$

Poincaré-Ungleichung

Also  $\sup_{\tau \in L_2(\Omega)^2} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|} \geq \frac{1}{c} \|v\|_1$

Wiederholung:  
Das Problem

$$\begin{aligned} a(u, \varphi) + b(\varphi, p) &= (g, \varphi), & \varphi \in X \\ b(u, q) &= (f, q), & q \in M \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar, falls

i)  $a(\cdot, \cdot)$  ist  $Z$ -elliptisch:  $\forall \varphi \in Z \ a(\varphi, \varphi) \geq \alpha \|\varphi\|_X$   
mit  $Z = \{\varphi \in X \mid b(\varphi, q) = 0 \forall q \in M\}$ .

ii)  $\sup \frac{b(\varphi, q)}{\|\varphi\|_X \|q\|_M} \geq \beta > 0$

Laplace, primal-gemischt

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) & \quad -(\tau, \nabla u) = 0, & \forall \tau \\ -(\sigma, \nabla \varphi) & \quad = -(f, \varphi) & \forall \varphi \end{aligned}$$

Stabil!

### Dual-gemischte Formulierung

Vorbereitung:  $H_{\text{div}} := \{\tau \in L_2(\Omega)^2 \mid \text{div } \tau \in L_2(\Omega)\}$

Zugehörige Norm:  $\|\tau\|_{\text{div}}^2 := \|\tau\|^2 + \|\text{div } \tau\|^2$

Für  $v \in H_0^1(\Omega)$  und  $\sigma \in H_{\text{div}}$

$$(\sigma, \nabla v) = -(\text{div } \sigma, v)$$

„schwache Formulierung“ : Gesucht ist  $(\sigma, u) \in H_{\text{div}} \times L_2(\Omega)$  mit

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau) + (u, \text{div } \tau) &= 0 \quad \forall \tau \in H_{\text{div}} \\ (\text{div } \sigma, \varphi) &= (-f, \varphi) \quad \forall \varphi \in L_2(\Omega) \end{aligned} \tag{V.3}$$

Abstrakt:  $X := H_{\text{div}}, \quad M := L_2(\Omega)$

$$a(\sigma, \tau) = (\sigma, \tau), \quad b(\tau, v) = (\text{div } \tau, v)$$

**Bemerkung:**  $Z = \{\tau \in H_{\text{div}} \mid (\text{div } \tau, v) = 0, v \in L_2(\Omega)\}$   
 Nachweis zu i) aus Satz V.13:

$$\begin{aligned} a(\tau, \tau) &= (\tau, \tau) = (\tau, \tau) + \underbrace{(\text{div } \tau, \text{div } \tau)}_{=0 \text{ f\"ur } \tau \in V = \{\tau \in H_{\text{div}} \mid (\text{div } \tau, v) = 0, v \in L_2(\Omega)\}} \\ &= \|\tau\|^2 + \|\text{div } \tau\|^2 = \|\tau\|_{\text{div}}^2 \quad \forall \tau \in V \end{aligned}$$

Nachweis zu ii) aus Satz V.13:

zu zeigen:  $\sup_{\tau \in H_{\text{div}}} \frac{(\text{div } \tau, v)}{\|\tau\|_{\text{div}}} \geq \beta \|v\|$

i) Sei  $v \in L_2(\Omega)$  beliebig: Wähle dazu  $w \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\|v - w\| \leq \frac{1}{2} \|v\|$  (A1)  
Dichtheitsargument

ii) Man setze  $\xi := \inf\{x_1 \mid x \in \Omega\}$ .

$$\text{Ansatz: } \tau_1(x) = \int_{\xi}^{x_1} w(t, x_2) dt, \quad \tau_2 = 0$$

Damit gilt:  $\text{div } \tau = \partial_{x_1} \tau_1 = w$

Ähnlich wie beim Beweis der Poincaré-Abschätzung:

$$\begin{aligned} |\tau(x)|^2 &= |\tau_1(x)|^2 \leq \int_{\xi}^{x_1} |w(t, x_2)|^2 dt \\ &\leq \int_{\xi}^s |w(t, x_2)|^2 dt \quad \text{mit } s = \max\{x_1 \mid x \in \Omega\} \end{aligned}$$

Integration über  $x_1$ :

$$\begin{aligned} \int_{\xi}^s |\tau_1(x)|^2 dx_1 &\leq c \int_{\xi}^s |w(t, x_2)|^2 dt \\ &= c \int_{\xi}^s |w(x_1, x_2)|^2 dx_1 \end{aligned}$$

Integration über  $x_2$ :

$$\|\tau\|^2 \leq c \|w\|^2 \tag{A2}$$

iii) Ausgangspunkt ist (A1)

$$\begin{aligned}\|v - w\|^2 &= (v - w, v - w) \leq \frac{1}{4} \|v\|^2 \\ &\Leftrightarrow 2(v, w) \geq \frac{3}{4} \|v\|^2 + \|w\|^2 \\ &\Leftrightarrow (v, w) \geq \frac{3}{8} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \|w\|^2 \geq c \|v\|^2\end{aligned}$$

iv) Auswertung von  $\frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_{\text{div}}}$ :

$$\begin{aligned}\frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_{\text{div}}} &= \frac{(\text{div } \tau, v)}{(\|\tau\|^2 + |\text{div } \tau|^2)^{1/2}} \\ &\geq \frac{(\text{div } \tau, v)}{c \|w\|} \quad \text{wegen (A2) und } \text{div } \tau = w \\ &= \frac{(w, v)}{c \|w\|} \\ &\geq \frac{c \|v\|^2}{d \|v\|} \quad \text{wegen } (v, w) \geq c \|v\|^2 \\ &= c \|v\|\end{aligned}$$

Passende Diskretisierung: (Raviart-Thomas-Elemente)

$$\begin{aligned}X_h &= \left\{ \tau \in L_2(\Omega)^2 \mid \tau|_T = \begin{pmatrix} a_T \\ b_T \end{pmatrix} + c_T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, a_T, b_T, c_T \in \mathbb{R}, \tau \cdot n \text{ stetig an Kanten} \right\} \\ M_h &= \{v \in L_2(\Omega) \mid v|_T = d_T, \quad d_T \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Bemerkung:  $\text{div } \tau = \partial_{x_1} \tau_1 + \partial_{x_2} \tau_2 = c_T + c_T = \text{const.} \in M_h$

(V.3) definiert ein stabiles Sattelpunktproblem. Auf den ersten Blick sieht es so aus, als ob durch (V.3) nur eine Lösung  $u \in L_2$  bestimmt ist. Tatsächlich liegt jedoch  $u \in H_0^1(\Omega)$ . Wegen  $C_0^\infty(\Omega)^d \subset H_{\text{div}}$  besagt die erste Gleichung insbesondere

$$\forall \tau_i \in C_0^\infty(\Omega) \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \sigma_i \tau_i dx$$

Also besitzt  $u$  die schwache Ableitung  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sigma_i$ . Deshalb ist  $u \in H^1(\Omega)$  und es ist  $\nabla u = \sigma$  sowie mit (V.3)

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} u \tau \cdot \nu ds &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \tau dx + \int_{\Omega} \text{div } \tau u dx \\ &= \int_{\Omega} \sigma \cdot \tau dx + \int_{\Omega} \text{div } \tau u dx = 0.\end{aligned}$$

Weil dies für alle  $\tau \in C^\infty(\Omega)^d$  zutrifft, ist  $u = 0$  auf dem Rand im verallgemeinerten Sinn, d. h. es gilt sogar  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

Während sich bei der Standardformulierung  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$  als natürliche Randbedingung ergibt, stellt sich hier also  $u = 0$  als natürliche Randbedingung ein.

### V.2.3 Nichtlineare Probleme am Beispiel Plastizität

Es wird dieselbe Notation wie bei der gemischten Formulierung der Laplace-Gleichung verwendet.

Aufgabe: Finde  $\sigma$ , so daß die Komplementärenergie

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau^2 dx \quad \forall \tau$$

unter der Nebenbedingung

$$\operatorname{div} \sigma = -f$$

minimal ist.

Variationelle Formulierung

$$\begin{array}{lll} (\sigma, \tau) & +(\operatorname{div} \tau, u) = 0 & \forall \tau \\ (\operatorname{div} \sigma, \varphi) & = -(f, \varphi) & \forall \varphi \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{ll} (\sigma, \tau) = (\nabla u, \tau) & \forall \tau \\ (\sigma, \nabla \varphi) = (f, \varphi) & \forall \varphi \end{array}$$

oder durch Einsetzen von  $\sigma = \nabla u$  in die zweite Gleichung

$$(\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi.$$

Dies ist ein **lineares** Problem.

Aufgabe: Finde  $\sigma$ , so daß

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\omega} \tau^2 dx$$

unter den Nebenbedingungen

$$\operatorname{div} \sigma = -f$$

**und**

$$|\sigma| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \leq 1.$$

Variationelle Formulierung

$$\begin{array}{lll} (\sigma, \tau - \sigma) & +(\operatorname{div} \tau - \operatorname{div} \sigma, u) \geq 0 & \forall \tau \text{ mit } |\tau| \leq 1 \\ -(\operatorname{div} \sigma, \varphi) & = (f, \varphi) & \forall \varphi \end{array}$$

oder (?mal sehen ob sinnvoll?)

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau - \sigma) &\geq (\nabla u, \tau - \sigma) && \forall \tau \text{ mit } |\tau| \leq 1 \\ (\sigma, \nabla \varphi) &= (f, \varphi) && \forall \varphi \end{aligned}$$

Die Ungleichung beschreibt eine Projektion:

$$\sigma = \Pi(\nabla u)$$

mit

$$\Pi(\nabla u) = \begin{cases} \nabla u, & \text{falls } |\nabla u| \leq 1 \\ \frac{\nabla u}{|\nabla u|}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

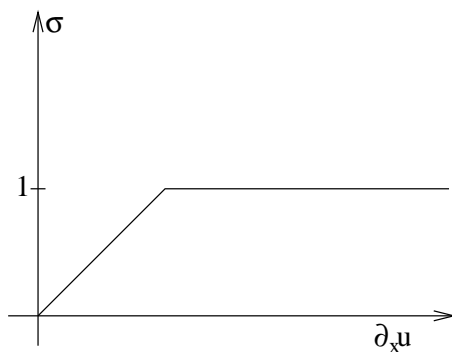
$$\forall \varphi \quad (a(\nabla u)\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi)$$

$$\text{mit } a(\nabla u) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |\nabla u| \leq 1 \\ \frac{1}{|\nabla u|}, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Dies ist ein **nichtlineares** Problem.

Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen  $\sigma$  und  $\nabla u$  für den eindimensionalen Fall:  $\Omega = (a, b)$ .

$$\begin{aligned} \sigma &: (a, b) \rightarrow (-1; 1) \\ u &: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$



$$\sigma(x) = a(\partial_x u)\partial_x u$$

**Problem:** Nicht umkehrbar eindeutiger Zusammenhang zwischen  $\sigma$  und  $\partial_x u$ .

**Beispiel V.14 (zur Nicht-Eindeutigkeit von  $u$ )** Es wird das eindimensionale Problem auf  $\Omega = (0; 1)$  untersucht. Im elastischen Bereich gilt

$$\sigma = u' = \partial_x u.$$



Es sollen die Fließregel

$$|\sigma| \leq 1,$$

das Gleichgewicht

$$\operatorname{div} \sigma = \partial_x \sigma = 0$$

sowie die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u(1) &= \lambda > 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein.

Aus dem Materialgesetz

$$(\sigma, \tau - \sigma) - (\partial_x u, \tau - \sigma) \geq 0$$

folgt durch partielle Integration

$$(\sigma, \tau - \sigma) + (u, \partial_x \tau - \partial_x \sigma) - \lambda(\tau(1) - \sigma(1)) \geq 0. \quad (\text{V.4})$$

Nun gilt

$$\partial_x \sigma = 0,$$

also ist  $\sigma$  konstant:

$$\sigma(x) = s, \quad s \in \mathbb{R}$$

und dann wegen  $|\sigma| \leq 1$

$$|s| \leq 1.$$

Insgesamt ist  $s$  bestimmt durch

$$\forall t \in P := \{r \in \mathbb{R} \mid |r| \leq 1\} \quad (s, t - s) - \lambda \cdot (t - s) \geq 0.$$

Das kann geschrieben werden als Minimum-Problem

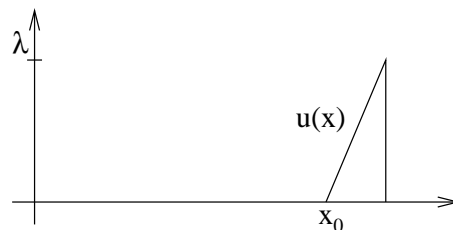
$$s = \operatorname{argmin}_{t \in P} \left\{ \frac{1}{2} t^2 - \lambda t \right\}.$$

Falls  $\lambda > 1$  ist, ist der Optimalwert  $s = 1$ . Einsetzen in (V.4) liefert

$$\begin{aligned} (1, \tau - 1) + (u, \tau') &\geq \lambda \tau(1) - \lambda \\ \Rightarrow (1, \tau - 1) - \int u' \tau &\geq -\lambda \end{aligned}$$

Der Ansatz für  $u$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ \frac{\lambda}{(1-x_0)}(x - x_0) & x \geq x_0 \end{cases}$$



erweist sich als zulässig, denn (für  $\lambda > 1$ ) ist

$$\begin{aligned} \tau - 1 - \int_{x_0}^1 \frac{\lambda}{(1-x_0)} \tau &\geq -\lambda \\ \Leftrightarrow \tau(1-\lambda) &\geq (1-\lambda) \\ \Leftrightarrow \tau &\leq 1 \quad (\text{beachte } 1-\lambda < 0) \end{aligned}$$

**Beispiel V.15 (zur Unstetigkeit der Verschiebung)** Es wird wieder das eindimensionale Problem auf  $\Omega = (-1, 1)$  untersucht:

$$\begin{aligned} \sigma &= u' \\ |\sigma| &\leq 1 \\ u(-1) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Im Gleichgewicht soll diesmal gelten

$$-\operatorname{div} \sigma = -\sigma' = f$$

mit der Kraftdichte

$$f(x) = \begin{cases} -\kappa(1-x) & x \geq 0 \\ \kappa(1+x) & x < 0 \end{cases} \quad \text{mit } 3 < \kappa < 4.$$

Wegen  $-\sigma' = f$  sind zulässige Spannungen

$$\tau(x) = C_\tau + \begin{cases} \kappa \left( x - \frac{x^2}{2} \right), & x \geq 0 \\ -\kappa \left( x + \frac{x^2}{2} \right), & x < 0 \end{cases}.$$

Für  $-1 \leq C_\tau \leq 1 - \frac{\kappa}{2}$  ist damit  $|\tau(x)| \leq 1$  erfüllt. Die eindeutige Lösung ist

$$\sigma(x) = -1 + \begin{cases} \kappa \left( x - \frac{x^2}{2} \right), & x \geq 0 \\ -\kappa \left( x + \frac{x^2}{2} \right), & x < 0 \end{cases}.$$

Zum Nachweis dessen wird  $(\sigma, \tau - \sigma) \geq 0$  nachgerechnet:

$$(\sigma, \tau - \sigma) = 2 \int_0^1 \left( -1 + \kappa \left( x - \frac{x^2}{2} \right) \right) (C_\tau + 1) dx = \left( \frac{2\kappa}{3} - 2 \right) (C_\tau + 1).$$

Der letzte Ausdruck ist wegen  $-1 \leq C_\tau$  und  $3 < \kappa$  nichtnegativ.

Nun folgt wegen  $\frac{du}{dx} = \sigma$

$$u(x) = \begin{cases} C_+ - x + \kappa \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), & x > 0 \\ C_- - x - \kappa \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right), & x < 0 \end{cases}.$$

Anpassen an die Randbedingungen  $u(-1) = u(1) = 0$  ergibt die Integrationskonstanten:

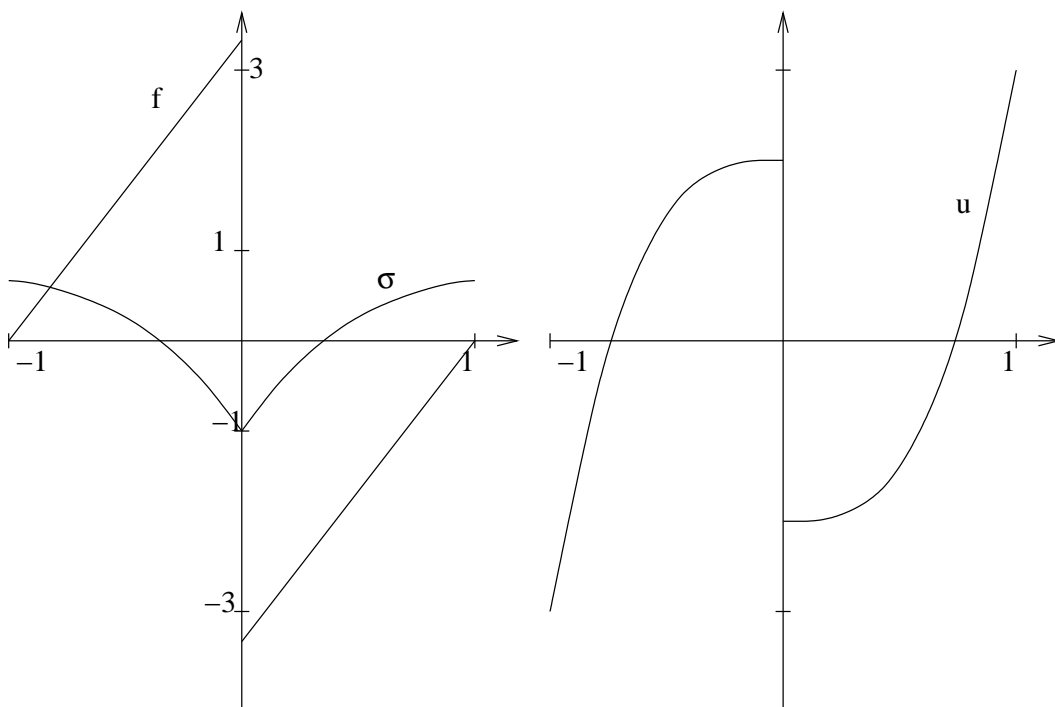
$$C_+ = 1 - \kappa \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = 1 - \frac{\kappa}{3}$$

$$C_- = -1 + \kappa \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = -1 + \frac{\kappa}{3}$$

Zusammengefasst hat man damit die (eindeutige) Lösung des Problems

$$\sigma(x) = -1 + \begin{cases} \kappa \left( x - \frac{x^2}{2} \right), & x > 0 \\ -\kappa \left( x + \frac{x^2}{2} \right), & x < 0 \end{cases}$$

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3} + \kappa \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), & x > 0 \\ \frac{1}{3} - \kappa \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right), & x < 0 \end{cases}.$$



In der Darstellung der beiden Größen erkennt man eine Unstetigkeit der Verschiebung  $u$ !

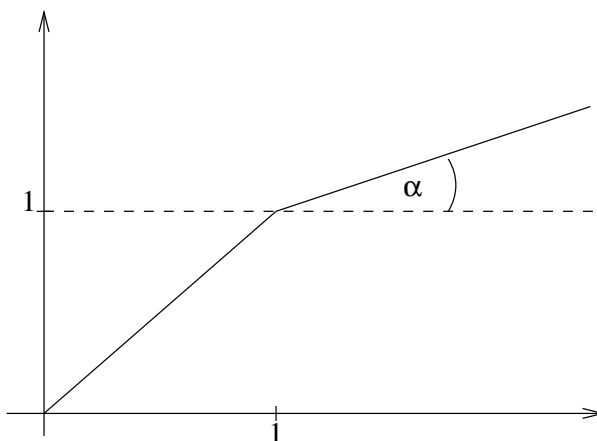
Lehre aus Beispiel V.15: Die dual-gemischte Formulierung erscheint angemessener.

### Regularisierung

betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ \gamma x + (1 - \gamma) \frac{x}{|x|}, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit  $0 < \gamma < 1$ .



Betrachte das regularisierte Plastizitätsproblem:

$$\gamma(\nabla u, \nabla \varphi) + (a(\nabla u)\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \quad (\text{lineare Verfestigung})$$

mit

$$a(\nabla u) = \begin{cases} (1 - \gamma)\nabla u, & |\nabla u| \leq 1 \\ \frac{(1-\gamma)}{|\nabla u|} & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wiederholung: Plastizität

$$\operatorname{argmin}_{\tau \in P} \frac{1}{2} \int \Omega \tau^2 dx$$

mit  $P := \{\tau \in (L^2(\Omega))^2 \mid \operatorname{div} \tau = -f, |\tau| \leq 1\}$ .

Formulierungen:

a)

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \Sigma & \quad (\sigma, \tau - \sigma) + (\operatorname{div} \tau - \operatorname{div} \sigma, u) \geq 0 \\ \forall \varphi \in L_2(\Omega) & \quad (\operatorname{div} \sigma, \varphi) = -(f, \varphi) \end{aligned}$$

mit  $\Sigma = \{\tau \in H_{\operatorname{div}} \mid |\tau| \leq 1\}$ .

b)

$$\begin{aligned} \forall \tau \in (L^2(\Omega))^2, |\tau| \leq 1 & \quad (\sigma, \tau - \sigma) - (\tau - \sigma, \nabla u) \geq 0 \\ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) & \quad -(\sigma, \nabla \varphi) = -(f, \varphi) \\ \curvearrowright & \quad (\sigma - \nabla u, \tau - \sigma) \geq 0 [\text{analog } (y - x, \varphi - y) \geq 0 \Leftrightarrow y = P_K(x)] \\ \curvearrowright & \quad \sigma = \Pi(\nabla u) \end{aligned}$$

c)  $\forall \varphi \in ? \quad (a(\nabla u)\nabla u, \nabla \varphi) = (f, \varphi)$

c') Regularisierung:

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (C(\nabla u), \nabla \varphi) = (f, \varphi) \text{ mit } C(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{falls } |\xi| \leq 1 \\ \gamma \xi + (1 - \gamma) \frac{\xi}{|\xi|} & \text{sonst} \end{cases}$$

### V.2.4 Existenz von Lösungen

Wir definieren durch

$$a(u; \varphi) := (C(\nabla u), \nabla \varphi)$$

eine Abbildung

$$a(\cdot; \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $V = H_0^1(\Omega)$ . Für jedes feste  $u \in V$  ist  $a(u; \cdot)$  linear. Weiterhin gilt

$$a(u; \varphi) \leq c \|\nabla u\|_{L_2} \cdot \|\nabla \varphi\|_{L_2} \leq c \|u\|_V \|\varphi\|_V.$$

Also ist  $a(u; \cdot)$  ein beschränktes lineares Funktional  $a(u; \cdot) \in V'$ .

$A : V \rightarrow V'$  bezeichne den zugehörigen Operator, d. h.

$$Au := a(u; \cdot).$$

**Lemma V.16** *Es gilt: Der Operator ist Lipschitz-stetig, d. h.:*

$$\begin{aligned} |\langle Au, \varphi \rangle - \langle Aw, \varphi \rangle| &= |(C(\nabla u), \nabla \varphi) - (C(\nabla w), \nabla \varphi)| \\ &\stackrel{i)}{\leq} c \|u - w\|_V \|\varphi\|_V. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für alle  $u, w \in V$ :

$$\langle Au - Aw, u - w \rangle \stackrel{ii)}{\geq} c \|u - w\|_V^2$$

Bei dieser Eigenschaft spricht man von **starker Monotonie**.

Beweis: Es gilt die Identität

$$(C(\nabla u) - C(\nabla w), \nabla \varphi) = \int_0^1 ([C'(\nabla(s \cdot u + (1-s) \cdot w))] \nabla(u - w), \nabla \varphi) ds$$

$$\left[ \text{zur Erinnerung: } \int_0^1 F'(g(s)) \cdot g'(s) ds = F(g(s)) \Big|_0^1 \right]$$

Für die Ableitung ergibt sich (siehe Übung)

$$C'(\nabla w)(\cdot) = \begin{cases} \nabla(\cdot) & |\nabla w| \leq 1 \\ \gamma \nabla(\cdot) + \frac{(1-\gamma)}{|\nabla w|} \left( \text{Id} - \frac{(\nabla w)^T \nabla w}{|\nabla w|^2} \right) \nabla(\cdot) & \text{sonst} \end{cases}$$

Darin hat die Matrix  $\left(\text{Id} - \frac{(\nabla w)^T \nabla w}{|\nabla w|^2}\right)$  die Eigenwerte 0 und 1. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \|C'(\nabla w)(\cdot)\| &\leq \begin{cases} \|\nabla(\cdot)\| & |\nabla w| \leq 1 \\ |\gamma| \|\nabla(\cdot)\| + \left|\frac{1-\gamma}{|\nabla w|}\right| \left\| \left(\text{Id} - \frac{(\nabla w)^T \nabla w}{|\nabla w|^2}\right) \nabla(\cdot) \right\|, & |\nabla w| > 1 \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \|\nabla(\cdot)\|, & |\nabla w| \leq 1 \\ |\gamma| \|\nabla(\cdot)\| + \frac{|1-\gamma|}{|\nabla w|} \|\nabla(\cdot)\|, & |\nabla w| > 1 \end{cases} \\ &\leq \|\nabla(\cdot)\| \cdot \begin{cases} 1, & |\nabla w| \leq 1 \\ |\gamma| + |1-\gamma|, & |\nabla w| > 1 \end{cases} \\ &\leq c \|\nabla(\cdot)\| \end{aligned}$$

Eingesetzt in die obige Identität liefert diese Abschätzung:

$$|(C(\nabla u) - C(\nabla w), \nabla \varphi)| \leq \int_0^1 c \|\nabla(u - w)\| \|\nabla \varphi\| ds \leq c \|u - w\|_V \|\varphi\|_V,$$

also i).

Um die zweite Abschätzung zu erhalten, setzt man  $(u - w)$  ein:

$$\begin{aligned} \gamma \|\nabla(u - w)\|_{L_2}^2 &\leq (C(\nabla u) - C(\nabla w), \nabla u - \nabla w) \\ \Rightarrow \gamma \|u - w\|_V^2 &\leq \langle Au - Aw, u - w \rangle \end{aligned}$$

■

Unser Beispiel fällt in den allgemeinen Rahmen:

**Satz V.17** *Betrachte Operatoren  $A : V \rightarrow V'$  in dem Hilbertraum  $V$  und dessen Dualraum  $V'$  mit den Eigenschaften*

i)  *$A$  ist Lipschitzstetig, d. h. für alle  $u, v \in V$  ist*

$$\forall y \in V \quad |\langle Au - Av, y \rangle| \leq M \|u - v\| \|y\|$$

ii)  *$A$  ist stark monoton, d. h. es gibt ein  $\gamma > 0$  mit*

$$\forall u, v \in V \quad \langle Au - Av, u - v \rangle \geq \gamma \|u - v\|_V^2$$

Dann besitzt das Problem

$$Au = f$$

zu beliebigem  $f \in V'$  eine eindeutige Lösung  $u \in V$ .

Beweis: Bezeichne  $J : V' \rightarrow V$  den Rieszschen Darstellungoperator (jedem  $g \in V'$  wird ein  $Jg \in V$  zugeordnet, so daß gilt  $\forall v \in V : \langle g, v \rangle = (Jg, v)$ )

Definiere

$$Bv := J(Av - f), \quad v \in V.$$

Wir haben also ein

$$B : V \rightarrow V$$

mit den Eigenschaften:

$$\text{i) } \exists M > 0 \quad \forall u, v \in V \quad \|Bu - Bv\|_V \leq M \|u - v\|_V$$

$$\text{ii) } \exists \gamma > 0 \quad \forall u, v \in V \quad (Bu - Bv, u - v) \geq \gamma \|u - v\|_V^2$$

und betrachten die Aufgabe

$$Bu = 0.$$

Analog zum Existenzbeweis im linearen Fall ist die eindeutige Lösung festgelegt durch den Fixpunktoperator

$$T_r v := v - rBv, \quad v \in V, r \in \mathbb{R}.$$

Dieser ist kontrahierend, falls  $0 \leq r \leq \frac{2\gamma}{M^2}$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} \|T_r y - T_r v\|^2 &= \|y - rBy - [v - rBv]\|^2 \\ &= \|y - v\|^2 - 2r(By - Bv, y - v) + r^2 \|By - Bv\|^2 \\ &\leq (1 - 2r\gamma + r^2 M^2) \|y - v\|^2 \end{aligned} \quad \text{[Lipschitz und Monotonie]}$$

■