Skriptum zum Vorkurs Mathematik im Wintersemester 2007/2008

erstellt von Dipl.-Math. Monika Dücker

September 2007

Überarbeitete Version der zweiten Auflage des Skriptum zum Vorkurs Mathematik
von Dipl.-Math. Mathias Charton,
Dipl.-Math. Markus Demmerling
und Dipl.-Math. Monika Dücker

Vorwort zur dritten Auflage

Dieses Skript dient zur Begleitung des Vorkurses. In ihm werden die Themen aufgegriffen und vertieft, die auch während des Vorkurses behandelt werden.
Neben der Berichtigung von Fehlern und der stilistischen Überarbeitung einiger Stellen wurden einige Abschnitte erweitert oder weggelassen. Auf Grund der Erfahrungen aus dem letzten Vorkurs und Wünschen von Seiten der Studierenden wurden einige Kapitel neu hinzugenommen. Im Folgenden sind die Änderungen im Einzelnen aufgelistet.

Kapitel 1 wurde im Wesentlichen aus der zweiten Auflage übernommen. Die wenigen Änderungen basieren auf [Sch71] und [SG94].
In Kapitel 2 wurden die Abschnitte über Relationen und Mengenvergleiche weggelassen und der Abschnitt über Abbildungen basierend auf [SG94] erweitert.
Kapitel 3 basiert auf Kapitel 4 des alten Skriptes.
In Kapitel 4 wurde die Betrachtung quadratischer Funktionen aus dem alten Skript übernommen und basierend auf [SG94] erweitert.
Kapitel 5 wurde aus der zweiten Auflage aus Kapitel 2.5 übernommen.
Kapitel 6 entspricht Kapitel 3 der zweiten Auflage, ohne auf die Grundlagen der Kombinatorik einzugehen.
Kapitel 7 wurde basierend auf [SG94] neu hinzugenommen.
Kapitel 8 wurde basierend auf [SG94] und der zweiten Auflage umgeschrieben, ohne auf die Grundbegriffe aus der Algebra einzugehen.
Die Kapitel 9 und 10 wurden auf Wunsch der Studierenden basierend auf [SG94] neu hinzugenommen. Auf die theoretischen Hintergründe wurde bewußt verzichtet, da diese wesentlicher Bestandteil der ersten Semester sind und nicht auf Kosten anderer Themengebiete vorweggenommen werden sollen.
Kapitel 11 wurde zum Teil aus der zweiten Auflage übernommen und mit einigen Grundlagen basierend auf [SG94] erweitert.
Kapitel 7 der zweiten Auflage wurde zu Gunsten anderer Themengebiete weggelassen, da dieses während der ersten Semester des Studiums ausführlich bearbeitet wird.

Allen, die durch Bemerkungen und Anregungen zur Verbesserung beigetragen haben, sei an dieser Stelle gedankt.

Siegen, im September 2007 Dipl.-Math. Monika Dücker

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe der mathematischen Logik

Zu Grunde liegt Kapitel 1 der zweiten Auflage ([CDD06]). Änderungen basieren auf [SG94] und [Sch71].

Bezeichung 1.1 *Logik beschäftigt sich mit den Methoden des Denkens, d.h. mit der Aufstellung und Überprüfung logischer Gesetze und Regeln für das Bilden von Begriffen, Aussagen und Schlüssen.*

Logik bestätigt oder widerlegt also nicht die Wahrheit, sondern zeigt nur auf, welche Konsequenzen es in unserem Denken hat, wenn wir bestimmte Dinge als gegeben annehmen. Man könnte Logik auch als die Lehre vom Schlußfolgern bezeichnen.

1.1 Aussagenlogik

Bezeichung 1.2 *Eine* ***Aussage*** *ist ein sprachliches Gebilde, das vom Inhalt her wahr oder falsch ist, d.h. man kann jeder Aussage einen Wahrheitswert zuordnen.*

Keine Aussagen sind:

- Guten Morgen!
- Walzer ist der schönste Tanz.
- Dieser Satz ist falsch.

Es ist nicht immer bekannt, ob eine Aussage wahr oder falsch ist, es gibt jedoch keine Aussage, die weder wahr noch falsch ist und keine, die beides zugleich ist.

Bezeichung 1.3 *Eine* ***elementare Aussage*** *ist eine Aussage, die keine weitere Aussage als Teil enthält und die nicht Negation einer Aussage ist.*

Beispiel 1.4

- *Die Erde ist ein Planet. (w)*
- *5 ist eine Primzahl. (w)*
- *7 ist eine gerade Zahl. (f)*

Bezeichung 1.5 *Eine* ***nicht elementare Aussage*** *ist eine Aussage, die aus zwei oder mehreren elementaren Aussagen zusammengesetzt ist oder die durch Verneinung einer Aussage entsteht.*

Beispiel 1.6

- *Es gilt nicht, das Steine auf der Erde nach oben fallen. (w)*

- *Rubens war weder Maler noch Architekt. (f)*

Bezeichung 1.7 *Eine **Variable** ist ein Symbol, das eine Leerstelle kennzeichnet, an die ein beliebiges Element einer vorher festgelegten Grundmenge treten kann. Ist diese die Menge der Aussagen und Wahrheitswerte spricht man von Aussagevariablen.*

Bezeichung 1.8 *Eine **Aussageform** ist ein sprachliches Gebilde, das mindestens eine freie Variable enthält und in eine Aussage übergeht, sobald ein Element der jeweiligen Grundmenge für jede freie Variable eingesetzt wird.*
*Aussageformen die ausschließlich Aussagevariablen enthalten, nennt man **aussagenlogische Aussageformen**.*

Beispiel 1.9

- *Aida ist eine Oper des Komponisten A.*

  Für A können sinnvollerweise Elemente aus der Grundmenge der Komponisten eingesetzt werden, wobei die Aussageform genau dann den Wert wahr annimmt, wenn man Guiseppe Verdi für A einsetzt.

- *Entweder p oder q ist eine wahre Aussage.*

  Es handelt sich um eine aussagenlogische Aussageform, da p und q sinnvollerweise nur als Aussagevariablen zu verstehen sind. Die Aussageform nimmt genau dann den Wert wahr an, wenn genau eine der beiden Variablen durch eine wahre Aussage (bzw. den Wahrheitswert w) und die andere durch eine falsche Aussage (bzw. den Wahrheitswert f) ersetzt wird.

Definition 1.10 *Eine aussagenlogische Aussageform A, die bei jeder Belegung ihrer Variablen den Wert wahr annimmt, heißt **Wahrform** (oder auch Tautologie, logisch wahre Aussageform, logisches Gesetz). Man schreibt $A \Leftrightarrow W$.*
*Wird bei jeder Belegung ihrer Variablen der Wert falsch angenommen, so heißt eine aussagenlogische Aussageform **Falschform** (oder auch Kontradiktion, logisch falsche Aussageform, logischer Widerspruch). Man schreibt $A \Leftrightarrow F$.*
*Alle übrigen aussagenlogischen Aussageformen nennt man **Neutralform**.*

Beispiel 1.11

1. *„Es gilt entweder p oder nicht p." ist eine Tautologie.*
2. *„Es gilt p und nicht p." ist ein Widerspruch.*
3. *„Es gilt p oder q." ist eine Neutralform.*

Definition 1.12 *Eine Abbildung, die einer oder mehreren Aussagen bzw. Aussageformen eine neue Aussage bzw. Aussageform zuordnet, nennt man **Junktion**.*

Bemerkung 1.13 *Für bestimmte gebräuchliche Junktionen gibt es allgemein übliche Symbole, sog.* ***Junktoren****:*

Bezeichnung	*Schreibweise*	*Sprechweise*
Negation	$\neg p$	*nicht* p
Konjunktion	$p \wedge q$	p *und* q
Disjunktion	$p \vee q$	p *oder* q *(einschließendes oder)*
Subjunktion	$(p \rightarrow q)$; $\neg p \vee q$	p *subjungiert* q
Bijunktion	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$; $(p \leftrightarrow q)$	p *bijungiert* q
Antivalenz	$\neg(p \leftrightarrow q)$; $(p \longleftrightarrow q)$	*entweder* p *oder* q*, (ausschließendes oder)*

Beispiel 1.14 *(Der zugehörige Wahrheitswert ist nicht angegeben.)*

- *p: Die Rose ist rot.*

  $\neg p$: Die Rose ist nicht rot.

- *p: 18 ist durch 2 teilbar. q: 18 ist durch 3 teilbar.*

  $p \wedge q$: 18 ist durch 2 und durch 3 teilbar.

- *p: Das Kind ißt Bonbons. q: Das Kind ißt Schokolade.*

  $p \vee q$: Das Kind ißt Schokolade oder Bonbons (oder beides).

- *p: x ist durch 10 teilbar. q: x ist durch 5 teilbar.*

  $p \rightarrow q$: Wenn x durch 10 teilbar ist, so ist x auch durch 5 teilbar.

- *p: Eine Zahl ist durch 6 teilbar. q: Eine Zahl ist durch 2 teilbar.*

  $p \leftrightarrow q$: Eine Zahl ist dann und nur dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 teilbar ist.

- *p: Peter ist in Köln geboren. q: Peter ist in Bonn geboren.*

  $p \longleftrightarrow q$: Peter ist entweder in Köln oder in Bonn geboren.

In der Logik interessiert man sich nicht (so sehr) dafür, was eine Junktion bei konkreten Aussagen bewirkt, sondern man betrachtet die Bedeutung einer Junktion als ausreichend beschrieben, wenn man weiß, wie sich der Wahrheitswert der zugeordneten Aussage in Abhängigkeit von dem der ursprünglichen Aussagen verhält. Dazu dienen die sog. Wahrheitsfunktionen.

Definition 1.15 *Die Zuordnung von Wahrheitswerten einer Aussagenverknüpfung zu den Wahrheitswerten der in ihr enthaltenen Elementaraussagen bezeichnet man als* ***Wahrheitsfunktion.***

Wahrheitsfunktionen können mit Hilfe von Wahrheitswertetabellen beschrieben werden:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \leftarrow\!\!+\!\!\rightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w	f
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	f	w
f	f	w	f	f	w	w	f

Mit Hilfe dieser Symbole und Funktionen kann man Sachverhalte, die in der Umgangssprache nur sehr umständlich zu beschreiben wären, sehr einfach ausdrücken. Außerdem lassen sich mit Hilfe von eindeutig definierten Symbolen Mißverständnisse vermeiden.

Beispiel 1.16

- *p: Es schneit., q: Es ist kalt.*

  a) *Es schneit, es ist kalt.* $p \wedge q$

  b) *Es schneit, aber es ist nicht kalt.* $p \wedge (\neg q)$

  c) *Wenn es schneit, ist es kalt.* $p \rightarrow q$

  d) *Weder schneit es, noch ist es kalt.* $(\neg p) \wedge (\neg q)$

  e) *Es stimmt nicht, daß es schneit oder es kalt ist.* $\neg(p \vee q)$

- *p: Paul ist reich., q: Paul ist glücklich.*

  a) $p \wedge (\neg q)$ — *Paul ist reich, aber nicht glücklich.*

  b) $(\neg p) \vee q$ — *Paul ist nicht reich oder glücklich.*

  c) $(\neg p) \wedge (\neg q)$ — *Weder ist Paul reich noch glücklich.*

  d) $p \rightarrow q$ — *Wenn Paul reich ist, ist er glücklich.*

  e) $p \not\leftrightarrow q$ — *Entweder ist Paul reich oder glücklich.*

Definition 1.17 *Seien A und B Aussageformen:*

- *A impliziert B ($A \Rightarrow B$), wenn $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist. (Sprechweisen: wenn A, dann B; B folgt logisch aus A; A ist hinreichende Bedingung für B; B ist notwendige Bedingung für A). Man spricht von **logischer Implikation**.*

- *A ist äquivalent zu B ($A \Leftrightarrow B$), wenn $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie ist. (Sprechweisen: A genau dann, wenn B; A dann und nur dann, wenn B). Man spricht von **logischer Äquivalenz**.*

Beachte: Die Pfeile $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ bezeichnen eine Beziehung zwischen Wahrheitsfunktionen, die Pfeile $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ verbinden Aussagen bzw. Aussageformen zu neuen Aussagen bzw. Aussageformen. $p \rightarrow q$ meint also die Aussageform „Aus p folgt q.“ während $p \Rightarrow q$ die Tatsache bezeichnet, daß q aus p logisch folgt, also $p \rightarrow q$ eine Tautologie ist.

1.2 Gesetze der Aussagenlogik

- Kommutativgesetze

  $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

- Assoziativgesetze

  $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

- Distributivgesetze

  $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

  $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- Idempotenzgesetze

  $p \vee p \Leftrightarrow p$

  $p \wedge p \Leftrightarrow p$

- Absorptionsgesetze

  $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

  $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

- de Morgan Gesetze

  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$

  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$

- Andere Verneinungsgesetze

  $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

  $\neg W \Leftrightarrow F$

  $\neg F \Leftrightarrow W$

- Satz vom ausgeschlossenen Dritten

  $p \vee (\neg p)$ ist eine Tautologie.

- Satz vom Widerspruch

  $p \wedge (\neg p)$ ist eine Kontradiktion.

- Kontrapositionsgesetz

  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q) \rightarrow \neg p$

- Transitivgesetz

  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

- Abtrenngesetze

  $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$ (direkter Schluß)

  $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q) \Rightarrow \neg p$ (indirekter Schluß)

Bewiesen werden diese Gesetze durch Aufstellen der zugehörigen Wahrheitswertetabelle.

1.3 Existenz- und Universalaussagen

Existenz- und Universalaussagen beziehen sich auf Aussageformen. Offen bleibt die Frage, ob Ersetzungen für die Variable existieren, die die Aussageform zu einer wahren Aussage machen.

Beispiel 1.18 *Sei K die Menge der Komponisten. Wir betrachten die folgenden Aussageformen, wobei K die Grundmenge ist.*

1. *A beherrschte alle Musikinstrumente.*
2. *A hat die Oper Aida geschrieben.*
3. *A hat eine Oper geschrieben.*

In 1. läßt sich kein Komponist einsetzen, in 2. und 3. lassen sich genau ein bzw. mehrere Komponisten finden, so daß eine wahre Aussage entsteht. Man führt folgende Symbolik ein:

1. $\exists\ A \in K:$ *A hat eine Oper geschrieben.*
2. $\exists!\ A \in K:$ *A hat die Oper Aida geschrieben.*
3. $\nexists\ A \in K:$ *A beherrschte alle Musikinstrumente.*

*Somit sind sogenannte **Existenzaussagen** aus den Aussageformen entstanden. Beachte: Die vorkommende Variable ist nicht mehr frei, sondern durch den **Existenzquantor** gebunden. (Man darf nicht mehr jedes beliebige Element der Grundmenge einsetzen.)*

Es gibt Aussageformen, sogenannte **Universalaussagen**, die für alle Elemente der Grundmenge zu einer wahren Aussage werden.

Beispiel 1.19 *Sei K wie oben die Menge der Komponisten.*

1. *A kann Noten lesen.*

*Man kann davon ausgehen, daß die Aussageform für alle Komponisten wahr wird. Hier benutzt man den sogenannten **Allquantor**:*

1. $\forall\ A \in K:$ *A kann Noten lesen.*

1.3.1 Verneinung von Existenz- und Universalaussagen

Oftmals sind in der Mathematik Verneinungen von komplizierten Existenz- und Universalaussagen zu bilden. Wir betrachten zunächst Aussagen bestehend aus Quantor und Aussageform. Dann gilt:

1. Eine Existenzaussage wird verneint, indem man den Allquantor vor die verneinte Aussageform stellt.

2. Eine Universalaussage wird verneint, indem man den Existenzquantor vor die verneinte Aussageform stellt.

Beispiel 1.20 *(Verneinte Existenzaussage)*

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists\, n \in \mathbb{N}:\ n \geq 7\ \wedge\ n \leq 10) \\ \Leftrightarrow & \forall\, n \in \mathbb{N}:\ \neg(n \geq 7\ \wedge\ n \leq 10) \\ \Leftrightarrow & \forall\, n \in \mathbb{N}:\ \neg(n \geq 7) \vee \neg(n \leq 10) \\ \Leftrightarrow & \forall\, n \in \mathbb{N}:\ n < 7\ \vee\ n > 10 \end{array}$$

Beispiel 1.21 *(Verneinte Universalaussage)*

$$\begin{array}{ll} & \neg(\forall\, n \in \mathbb{N}:\ n \textit{ ist eine Primzahl } \to n \textit{ ist ungerade}) \\ \Leftrightarrow & \exists\, n \in \mathbb{N}:\ \neg(n \textit{ ist eine Primzahl } \to n \textit{ ist ungerade})) \\ \Leftrightarrow & \exists\, n \in \mathbb{N}:\ \neg(\neg\ (n \textit{ ist eine Primzahl})\ \vee\ n \textit{ ist ungerade}) \\ \Leftrightarrow & \exists\, n \in \mathbb{N}:\ n \textit{ ist Primzahl } \wedge\ n \textit{ ist gerade} \end{array}$$

Bei Aussagen, die mehrere Quantoren enthalten, gilt folgende Faustregel:
Zur Verneinung sind alle Quantoren umzudrehen (aus $\forall$ wird $\exists$ und umgekehrt) und die zugehörige Aussageform ist zu verneinen. Die Eigenschaften der Variablen unter den Quantoren sind beizubehalten.

Beispiel 1.22

$$\begin{array}{ll} & \neg(\exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, m \geq n\ \exists\, k \in \mathbb{N}:\ k > m) \\ \Leftrightarrow & \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, m \geq n\ \forall\, k \in \mathbb{N}:\ k \leq m \end{array}$$

1.4 Notwendige und hinreichende Bedingung

Für $A \Rightarrow B$ gibt es, wie schon erwähnt, die Formulierungen:

1. A ist hinreichend für B.

2. B ist notwendig für A.

1. besagt, daß die Erfüllung der Aussage A ausreichend für die Erfüllung der Aussage B ist.
2. besagt, daß die Gültigkeit der Aussage B erforderlich ist, damit die Aussage A gilt. Gilt B nicht, so gilt auch A nicht.

Beispiel 1.23 *A: Die Zahl n ist teilbar durch 6. B: Die Zahl n ist teilbar durch 3. Dann gilt: $A \Rightarrow B$.*
Hinreichend dafür, daß n durch 3 teilbar ist, ist das n durch 6 teilbar ist. Notwendig dafür, daß eine Zahl durch 6 teilbar ist, ist ihre Teilbarkeit durch 3.

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ (gleichbedeutend mit $A \Rightarrow B$ **und** $B \Rightarrow A$) gilt in diesem Beispiel nicht. Z.B. ist 9 durch 3 teilbar, jedoch nicht durch 6.

1.5 Beweismethoden

Sei V die Voraussetzung und B die Behauptung.
Ein mathematischer Satz hat die Form $V \Rightarrow B$.

Ein Beweis eines Satzes muß ausgehend von der Wahrheit von V die Wahrheit von B zeigen, unter Umständen mit Hilfe von schon früher bewiesenen Ergebnissen.

Die Mathematik kennt drei prinzipiell verschiedene Beweismethoden: Den **direkten**, den **indirekten** und den Beweis mittels **vollständiger Induktion**.

1.5.1 Der direkte Beweis

Beim direkten Beweis überführt man eine wahre Aussage mittels logischer Folgerung in die Behauptung. Da bei korrekter Folgerung aus etwas Wahrem nur etwas Wahres folgen kann, hat man somit die Wahrheit der Behauptung bewiesen.

Beispiel 1.24 *a, b reell, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Z.z: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.*

Es gilt: $(a-b)^2 \geq 0$

$$\begin{array}{lcrcll}
 & & (a-b)^2 & \geq & 0 & \\
(Binomische\ Formel) & \Leftrightarrow & a^2 - 2ab + b^2 & \geq & 0 & \\
(Addition\ von\ 4ab) & \Leftrightarrow & a^2 + 2ab + b^2 & \geq & 4ab & \\
(Binomische\ Formel) & \Leftrightarrow & (a+b)^2 & \geq & 4ab & \\
(Wurzelziehen) & \Rightarrow & a+b & \geq & 2\sqrt{ab} & (a, b \geq 0) \\
(Division\ durch\ 2) & \Leftrightarrow & \dfrac{a+b}{2} & \geq & \sqrt{ab} &
\end{array}$$

$\square$

Beim Beweisen von Gleichungen besteht der direkte Beweis im Überführen der einen Seite in die andere Seite mittels bereits als gültig erkannter Umformungen.

Beispiel 1.25 *1. binomische Formel*
Behauptung: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Beweis:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b) + b(a+b)\\ &= aa + ab + ba + bb\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

□

1.5.2 Der indirekte Beweis

Beim indirekten Beweis macht man die Annahme, daß die Behauptung falsch sei, und folgert daraus eine falsche Aussage (meist ist dies ein Widerspruch zur Voraussetzung). Da etwas Falsches logisch nur aus etwas Falschem folgen kann, muß die Annahme falsch, mithin die Behauptung richtig gewesen sein.

Beispiel 1.26 *a, b reell, $a \geq 0, b \geq 0$. Es gilt:* $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Die Negation der Behauptung ist: Es existieren $a \geq 0,\ b \geq 0$ mit $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$.

$$\begin{array}{lcrcl} & & \dfrac{a+b}{2} & < & \sqrt{ab}\\ (Quadrieren\ da\ (a+b)/2 \geq 0) & \Rightarrow & \dfrac{(a+b)^2}{4} & < & ab\\ (Multiplikation\ mit\ 4) & \Leftrightarrow & (a+b)^2 & < & 4ab\\ (Binomische\ Formel) & \Leftrightarrow & a^2+2ab+b^2 & < & 4ab\\ (Subtraktion\ von\ 4ab) & \Leftrightarrow & a^2-2ab+b^2 & < & 0\\ (Binomische\ Formel) & \Leftrightarrow & (a-b)^2 & < & 0\ (Widerspruch)\end{array}$$

Also ist $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. □

Als weiteres Beispiel soll der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 1.27 *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis:
Hier setzen wir, ohne es zu beweisen, voraus, daß zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ eine Primzahl existiert, die n teilt.
Angenommen, es gibt endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$, dann ist $l := p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ durch keins der $p_k, k = 1, \ldots, n$ teilbar, es muß also eine Primzahl außer $p_1, \ldots, p_n$ existieren, die l teilt. Widerspruch. □

1.5.3 Der Beweis durch vollständige Induktion

Dieses Beweisprinzip nutzt man zum Beweis von Behauptungen über alle natürlichen Zahlen ab einem n_0.
Zugrunde liegt das folgende Prinzip:

Wenn eine Aussage über natürliche Zahlen $A(n)$ für eine bestimmte Zahl n_0 gilt und aus der Gültigkeit von $A(n)$ für eine beliebige natürliche Zahl n auch auf die Gültigkeit von $A(n+1)$ (also der Aussage für den Nachfolger von n) geschlossen werden kann, so ist die Aussage wahr für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$.
Der Induktionsbeweis erfordert daher drei Schritte:

1. Induktionsanfang: Zeige $A(n_0)$.
2. Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gilt bis $A(n)$.
3. Induktionsschritt: Zeige $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Der Induktionsanfang wird auch mit Induktionsverankerung oder Induktionsanker bezeichnet, der Induktionsschritt mit Induktionsbehauptung.

Beispiel 1.28

1. *$\forall\, n \geq 0$ gilt: $2^n > n$.*

   Beweis:

   I.A. $n = 0:$ $\quad 2^0 = 1 > 0$

   I.V.: $\quad$ *Die Behauptung gilt bis n, also $2^n > n$.*

   I.S. $n \to n+1:$ $\quad$ *Z.z.* $2^{n+1} > n+1$

   Es gilt nach Voraussetzung $2^n \geq 1$ und $2^n > n$ und somit

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n > n + 1$$

□

2. $\forall\ n \geq 1$ *gilt:* $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Beweis:

I.A. $n = 1:$ $\quad 1 = 1^2 = 1$

I.V.: *Die Beh. gilt bis* n, *also* $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

I.S.: $n \to n + 1:$ *Zz.* $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Es gilt nach Voraussetzung $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

Addition von $(2n + 1)$ *auf beiden Seiten liefert:*

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$$

Durch Anwendung der 2. binomischen Formel folgt:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

$\square$

1.5.4 Falsche Beweise

Von einem chinesischen Weisen wird erzählt, daß er in einer Zeit, in der das Überschreiten der Grenze mit Pferden strengstens untersagt war, einen Grenzposten mit Hilfe des folgenden „Beweises“ davon überzeugte, daß der Schimmel, auf dem er ritt, kein Pferd sei und er folglich passieren dürfe: Ein Pferd kann braun sein. Ein Schimmel kann nicht braun sein, also ist ein Schimmel kein Pferd. (Man hat nur: Es existiert ein Pferd das braun ist, man brauchte aber für einen korrekten Beweis: Alle Pferde sind braun.)

1.6 Übungsaufgaben

1. Geben Sie an, ob es sich bei folgenden Sätzen um Aussagen handelt oder nicht. Bestimmen Sie gegebenenfalls den zugehörigen Wahrheitswert.
   a) Wie geht es Dir?
   b) Eine Zahl ist durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
   c) Mathematik ist dreimal so schön wie Latein.
   d) Die Winkelsumme in einem ebenen Dreieck beträgt 100 Grad.

2. Gegeben seien die folgenden Aussagen:

   p: Die Firma S stellt billige Möbel her.

   q: Der Absatz verringert sich.

   Schreiben Sie die folgenden Aussagen in der Formelsprache:

a) Wenn die Firma S billige Möbel herstellt, verringert sich der Absatz.
b) Die Firma S stellt billige Möbel her, aber der Absatz geht nicht zurück.
c) Wenn der Absatz zurückgeht, stellt die Firma S keine billigen Möbel her.
d) Es stimmt nicht, daß der Absatz genau dann zurückgeht, wenn die Firma S billige Möbel herstellt.
e) Der Absatz geht dann und nur dann zurück, wenn die Firma S teure Möbel herstellt.

3. p, q, r seien Aussagen: p und q seien durch eine wahre und r durch eine falsche Aussage ersetzt. Bestimmen Sie unter dieser Voraussetzung den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

   a) $(p \wedge q) \wedge (\neg r)$;
   b) $p \rightarrow (q \vee (\neg r))$;
   c) $p \rightarrow (p \rightarrow q)$;
   d) $(\neg p) \vee (q \rightarrow r)$;
   e) $(p \vee q) \wedge (q \leftrightarrow r)$;
   f) $\neg p \rightarrow (q \vee (\neg q))$.

4. Die Aussage q sei gegeben durch „Das Parallelogramm D ist ein Quadrat.“. Geben Sie jeweils eine andere Aussage p an, so daß gilt:

   a) $q \Rightarrow p$, aber nicht $p \Rightarrow q$;
   b) $p \Rightarrow q$, aber nicht $q \Rightarrow p$;
   c) $p \Leftrightarrow q$.

5. Geben Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen an, wenn p und q durch wahre Aussagen und r und s durch falsche Aussagen ersetzt werden:

   a) $(p \wedge (\neg q)) \vee r$;
   b) $(p \vee q) \wedge (\neg s)$;
   c) $((\neg p) \rightarrow q) \rightarrow s$;
   d) $((\neg p) \rightarrow s) \vee q$;
   e) $((\neg p) \leftrightarrow r) \vee (s \wedge r)$;
   f) $((p \rightarrow q) \rightarrow s) \rightarrow r$.

6. Beweisen Sie die Distributivgesetze der Aussagenlogik mittels Wahrheitswertetabellen:

$$\begin{aligned} p \vee (q \wedge r) \quad &\Leftrightarrow \quad (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ p \wedge (q \vee r) \quad &\Leftrightarrow \quad (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \end{aligned}$$

7. Denksportaufgaben:

a) Was macht Paul, wenn die folgende Aussage wahr ist?
„Es ist unrichtig, daß Paul nicht die Aufgaben macht oder daß Paul im Garten arbeitet.“

b) Tante Katharina und Tante Maria unterhalten sich: die eine trinkt Kaffee, die andere ißt Schokolade. Was macht Tante Maria, wenn die folgende Aussage wahr ist:
„Es ist falsch, daß Tante Maria Kaffee trinkt oder nicht Schokolade ißt.“

c) Wie heißt die Zahl x, für die folgendes gilt?
x ist eine gerade Zahl.
x ist kleiner als 12 oder eine Quadratzahl.
x ist eine Quadratzahl, oder x ist nicht kleiner als 12.
x ist nicht gerade, oder x ist kleiner als 12.

8. Verneinen Sie die folgenden Aussagen:
   a) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ so daß $\forall n > n_0$ gilt: $|f_n - f| < \varepsilon$
   b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,$ so daß $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
   c) Zu jedem Mann existiert eine Frau, die ihn nicht liebt.
   d) $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b\ \exists\ c \in \mathbb{Q}:\ a > c > b.$

9. Beweisen Sie direkt: Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl ist ungerade.

10. Beweisen Sie indirekt:
$$\forall x > 0 : \frac{3x - 4}{2x + 4} > -1$$

11. Beweisen Sie induktiv:
   a) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1;$
   b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$

2 Mengen und Abbildungen

Zu Grunde liegt Kapitel 2 der zweiten Auflage ([CDD06]). Ergänzungen basieren auf [SG94].

2.1 Mengen

Definition 2.1 *("naiver" Mengenbegriff nach Cantor)*
*Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen, wohlbestimmten Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens. Die Objekte dieser Zusammenfassung nennt man **Elemente**.*

Schreib- und Sprechweisen:

$a \in M$	a ist ein Element der Menge M; a liegt in M.
$a \notin M$	a ist kein Element der Menge M; a liegt nicht in M.
$M = \{a, b, c\}$	Die Menge M besteht aus den Elementen a, b, c.
$M = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$	M ist die Menge aller reellen Zahlen, die positiv sind.
	(Angabe der die Elemente charakterisierenden Eigenschaft.)
$M = \emptyset = \{\}$	M ist die leere Menge.

Beispiel 2.2

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *ist die Menge der natürlichen Zahlen.*
2. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ *ist die Menge der ganzen Zahlen.*
3. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ ggT(p, q) = 1 \right\}$ *ist die Menge der rationalen Zahlen.*
4. $\mathbb{R}$ *ist die Menge der reellen Zahlen.*
5. $\mathbb{C}$ *ist die Menge der komplexen Zahlen.*
6. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$,
   $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = \emptyset = \{\}$ *(leere Menge)*

Bemerkung 2.3

- *Die Reihenfolge der Elemente ist irrelevant:*

$$\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$$

- *Eine Mehrfachaufzählung ist nicht zulässig, d.h.*

$$\{a, b, c, a, b\}$$

  ist keine Menge.

Bezeichung 2.4 *Sei M eine Menge. $\#M$ bezeichnet die Anzahl der Elemente in M. Andere Schreibweisen sind: $ord(M)$ oder $|M|$.*

Beispiel 2.5 *Sei $M = \{a, b, c, d\}$ gegeben. Dann ist $\#M = 4$.*

Bemerkung 2.6 (Russelsche Antinomie) *Die Grenzen des naiven Mengenbegriffes werden an folgendem Beispiel deutlich. Eine Menge, die sich nicht selbst als Element enthält, wie z.B. die natürlichen Zahlen, heißt Normalmenge. Wenn man nun versucht, die Menge M aller Normalmengen zu bilden und fragt, ob M normal ist, so stößt man auf den Widerspruch, daß, wenn M normal wäre, es sich selbst als Element enthalten müßte und folglich nicht normal wäre. Wäre dagegen M nicht normal, so enthielte es sich selbst als Element, im Widerspruch dazu, daß alle Mengen in M normal sind.*

Definition 2.7 *Seien S, T, K, P, T_1 und T_2 Mengen.*

1. *T heißt **Teilmenge** von S, wenn jedes Element, das in T liegt, auch ein Element von S ist. (i.Z. $T \subset S$, $S \supset T$)*

   *Gilt zusätzlich $T \neq S$, so heißt T **echte Teilmenge** von S. (i.Z. $T \subsetneq S$)*

2. *S heißt **Schnitt(menge)** von T_1 und T_2, wenn S die Menge aller Elemente ist, die sowohl in T_1 als auch in T_2 liegen. (i.Z. $S = T_1 \cap T_2$)*

3. *S heißt **Vereinigung(smenge)** von T_1 und T_2, wenn S die Menge aller Elemente ist, die in T_1 oder T_2 (oder in beiden Mengen) liegen. (i.Z. $S = T_1 \cup T_2$)*

4. *Gilt $T \subset S$, so heißt K das **Komplement** von T in S, wenn K die Menge aller Elemente ist, die in S, aber nicht in T liegen. (i.Z. $K = S \backslash T$)*

5. *Die **Produktmenge** P von S und T besteht aus allen geordneten Paaren (s, t) mit $s \in S$ und $t \in T$ (i.Z. $P = S \times T$). Statt Produktmenge sagt man auch **kartesisches Produkt**. Für die Produktmenge $S \times S$ schreibt man auch S^2.*

6. *Die* ***Potenzmenge*** $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ *einer Menge* S *ist definiert als die Menge, die aus allen Teilmengen von* S *besteht.*

Beispiel 2.8 *Betrachte die Menge der geraden Zahlen* $G = \{n \in \mathbb{N} \mid 2|n\}$ *und die Menge der ungeraden Zahlen* $H = \{n \in \mathbb{N} \mid 2|(n+1)\}$*. Dann gilt:*

1. $G \subset \mathbb{N},\ H \subset \mathbb{N}$
2. $G \subsetneq \mathbb{N} \supsetneq H$
3. $G \cap H = \emptyset$, $G \cup H = \mathbb{N}$
4. $\{n \in G \mid n \geq 4\} \cap \{n \in G \mid n \leq 5\} = \{4\}$
5. $\mathbb{N} \backslash H = G,\ \mathbb{N} \backslash G = H$
6. $$\begin{aligned} \{n \in G \mid n \leq 6\} &\times \{m \in H \mid m \leq 3\} = \{2,4,6\} \times \{1,3\} \\ &= \{(2,1),(2,3),(4,1),(4,3),(6,1),(6,3)\} \end{aligned}$$
7. *Die Punkte der Zeichenebene werden mit Elementen aus* $\mathbb{R}^2$ *identifiziert. (kartesisches Koordinatensystem)*

Es gelten folgende Rechenregeln. Seien A, B und C Mengen. Dann gilt:

(R1) $A \subset B \ \wedge\ B \subset C \ \Rightarrow\ A \subset C$ (Transitivität von „$\subset$“)

(R2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Assoziativgesetze)

(R3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(R4) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetze)

(R5) $A \cap B = B \cap A$

(R6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetze)

(R7) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(R8) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(R9) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Bemerkung 2.9

1. *Um $T \subset S$ zu zeigen, kann man auch $a \notin S \;\Rightarrow\; a \notin T$ beweisen (Kontrapositionsgesetz). (Außerhalb von S gibt es kein Element von T, also liegt T ganz in S.)*

2. *Ist S eine beliebige Menge, dann gilt für jedes $a \notin S$ auch $a \notin \emptyset$. Somit folgt: $\emptyset \subset S$.*

3. *Schnitt, Vereinigung und Produktmenge kann man auch für mehr als zwei Mengen $S_1, \dots, S_n$, $n \in \mathbb{N}$, definieren:*

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{n} S_i &= S_1 \cap \ldots \cap S_n = \{x \mid \forall\, 1 \le i \le n:\; x \in S_i\} \\
\bigcup_{i=1}^{n} S_i &= S_1 \cup \ldots \cup S_n = \{x \mid \exists\, 1 \le i \le n:\; x \in S_i\} \\
\prod_{i=1}^{n} S_i &= S_1 \times \ldots \times S_n = \{(s_1, \dots, s_n) \mid s_i \in S_i,\; i = 1, \dots, n\}
\end{aligned}$$

4. *Zwei Mengen S und T sind gleich, wenn $S \subset T$ und $T \subset S$ gilt, d.h. wenn $a \in S$ äquivalent zu $a \in T$ ist.*

2.2 Abbildungen

Definition 2.10 *Eine Zuordnung, bei der jedem Element einer Menge M, $M \neq \emptyset$, genau ein Element einer Menge N zugeordnet wird, heißt* ***Abbildung (Funktion)****. Bezeichnet man die Abbildung mit f und ist $y \in N$ das Element, das $x \in M$ zugeordnet wird, dann heißt y das* ***Bild*** *von x unter f, oder auch der Wert von f an der Stelle x. Das Bild von M unter f oder kurz das Bild von f ist definiert als*

$$f(M) := \{f(x) \mid x \in M\} \subset N.$$

Das Bild von f heißt auch ***Wertebereich*** *von f.*

Schreib- und Sprechweisen:

$f : M \to N$	f ist eine Abbildung von M nach N
M	heißt **Definitionsbereich** oder **Definitionsmenge**
N	heißt **Zielmenge**
$y = f(x)$	y ist das Bild von x unter f

Mögliche andere Schreibweisen sind:

$f : M \to N, f(x) = x^2;$

$f : M \ni x \mapsto f(x) \in N;$

$f : M \supset M' \ni x \mapsto f(x) \in N' \subset N;$

$f : M \to N, x \mapsto f(x).$

Für $M_1 \subset M$ heißt $f(M_1) := \{f(x) \mid x \in M_1\} \subset N$ das **Bild von** M_1 **unter** f. Analog definiert man zu jeder Teilmenge N_1 von N das sogenannte **Urbild**:

$$f^{-1}(N_1) := \{x \in M \mid f(x) \in N_1\}.$$

Bemerkung 2.11 *Zu einer Abbildung gehören Definitionsbereich, Zielmenge sowie Zuordnungsvorschrift, d.h. zwei Abbildungen sind genau dann gleich, wenn sie nicht nur in der Zuordnungsvorschrift, sondern auch in Definitions- und Zielmenge übereinstimmen.*

Beispiel 2.12

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. *Für das Bild von* f *gilt:*

$$f(\mathbb{R}) = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

2. $g : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   $g(a) = g(b) = g(c) = 1,\ g(d) = 6$
   $g(\{a, b, c, d\}) = \{1, 6\},\ g(\{a\}) \cap g(\{a, b, c\}) = \{1\}$

3. $h : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1\} \times \{0, 1\}$
   $h(0) = (0, 0),\ h(1) = (0, 1),\ h(2) = (1, 0),\ h(3) = (1, 1)$

Sei f eine Abbildung von M nach N. Das Bild von f ist immer eine Teilmenge der Zielmenge (s.o.). Außerdem können i.a. zwei verschiedene $m_1,\ m_2$ das gleiche Bild unter f besitzen. Wir kennzeichnen die folgenden Spezialfälle:

Definition 2.13 *Eine Abbildung* $f : M \to N$ *heißt*

1. ***surjektiv***, *wenn* $f(M) = N$ *gilt.*

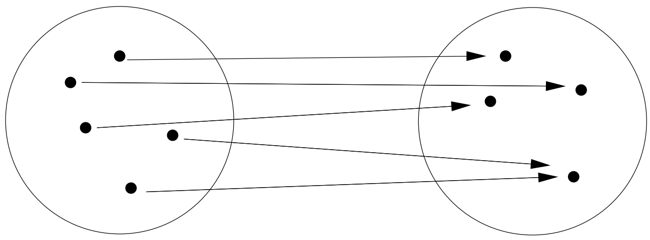


Abbildung 1: Surjektivität

2. ***injektiv***, *wenn für beliebige* $x_1 \neq x_2,\ x_1,\ x_2 \in M$ *folgt* $f(x_1) \neq f(x_2)$. *Äquivalent dazu ist (Kontrapositionsgesetz!)*

$$\forall\ x_1,\ x_2 \in M:\ f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

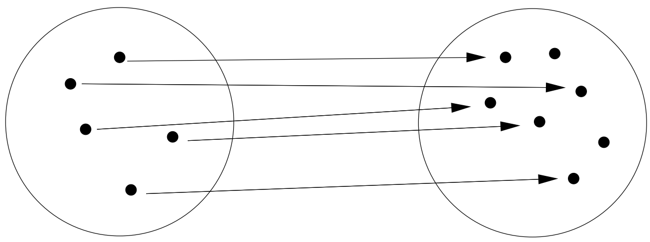


Abbildung 2: Injektivität

3. ***bijektiv***, *falls* f *sowohl surjektiv als auch injektiv ist.*

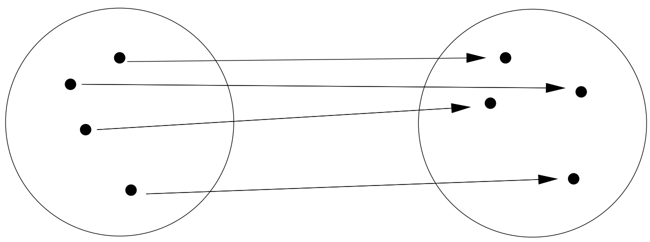


Abbildung 3: Bijektivität

Beispiel 2.14

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

   f *ist nicht injektiv, da* $f(-1) = 1 = f(1)$, *aber* $-1 \neq 1$.

   f *ist nicht surjektiv, da keine negative reelle Zahl existiert, die zu* $f(\mathbb{R})$ *gehört, also* $f(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}$.

2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 1$

g ist injektiv, denn für alle $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \ \Rightarrow\ g(x_1) \neq g(x_2)$$

g ist surjektiv, denn für alle $y \in \mathbb{R}$ existiert ein $\mathbb{R} \ni x := y - 1$ mit

$$g(x) = g(y-1) = (y-1) + 1 = y$$

d.h. $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, somit ist g auch bijektiv.

Die Eigenschaften Injektivität und Surjektivität und damit auch die Bijektivität hängen ganz wesentlich von Definitions- und Zielmenge ab und nicht nur von der Zuordnungsvorschrift. Betrachte f definiert durch $f(x) = x^2$ für verschiedene Definitions- und Zielmengen ($\mathbb{D}$ bzw. $\mathbb{W}$):

$\mathbb{D}$	$\mathbb{W}$	surjektiv	injektiv	bijektiv
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nein	nein	nein
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{\geq 0}$	ja	nein	nein
$\mathbb{R}^{\leq 0}$	$\mathbb{R}$	nein	ja	nein
$\mathbb{R}^{\leq 0}$	$\mathbb{R}^{\geq 0}$	ja	ja	ja

Bezeichung 2.15 *Sei $M \neq \emptyset$. Die Abbildung $f : M \to M,\ f(x) = x$ wird als **identische Abbildung** oder auch **Identität** auf M bezeichnet (i.Z. id_M).*

Definition 2.16 *Seien S, T, U Mengen und $f : S \to T,\ g : T \to U$ Abbildungen. Dann ist die **Komposition** (Hintereinanderausführung) $g \circ f : S \to U$ definiert durch*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Satz 2.17 *Eine Abbildung $f : M \to N$ ist genau dann*

1. *surjektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert, so daß $f \circ g = id_N$ gilt.*
2. *injektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert, so daß $g \circ f = id_M$ gilt.*
3. *bijektiv, wenn eine Abbildung $g : N \to M$ existiert, so daß $f \circ g = id_N$ und $g \circ f = id_M$ gilt. g heißt in diesem Fall die Umkehrabbildung von f (Bez.: $g = f^{-1}$). Die Umkehrabbildung ist, obwohl sie mit dem gleichen Symbol bezeichnet wird wie das Urbild, von diesem streng zu unterscheiden.*

Beweis:

1. Sei f surjektiv. Dann gilt für alle $y \in N$:

$$f^{-1}(y) \neq \emptyset.$$

   Als Bild von y unter g wählt man ein beliebiges Element aus $f^{-1}(y)$ aus und hat so eine Abbildung g mit der gewünschten Eigenschaft $f \circ g = id_N$ definiert.

   Ist umgekehrt eine solche Abbildung g vohanden, so ist f surjektiv, denn zu $y \in N$ ist $g(y)$ Urbild.

2. Sei nun f injektiv. Dann definiert man ($x_0 \in M$ beliebig):

$$g(y) = \begin{cases} x_0, & y \notin f(M) \\ x, & y = f(x) \end{cases}$$

   Offenbar hat g die gewünschte Eigenschaft $g \circ f = id_M$.

   Ist umgekehrt eine solche Abbildung g vorhanden, so ist f injektiv, denn aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ und folglich mit $g \circ f = id_M$ der Zusammenhang $x_1 = x_2$.

3. Ist f bijektiv, so sind die jeweils zur Injektivität und Surjektivität definierten Abbildungen identisch.

   Ist umgekehrt eine Abbildung g mit den beiden Eigenschaften $f \circ g = id_N$ und $g \circ f = id_M$ gegeben, so folgt mit dem ersten und zweiten Teil dieses Satzes, daß f sowohl surjektiv als auch injektiv, also bijektiv sein muß. □

Bemerkung 2.18

1. *Die Komposition von Funktionen ist assoziativ, d.h. für Funktionen f, g, h mit den entsprechenden Definitions- und Wertebereichen gilt:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

2. *Die Komposition von Funktionen ist i.a. nicht kommutativ.*

   Z.B. ist für $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 1$

$$(f \circ g)(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \neq x^2 + 1 = (g \circ f)(x).$$

Weitere Eigenschaften von Funktionen sind Monotonie und Symmetrie, die im Folgenden erläutert werden sollen.

Definition 2.19 *f heißt in einem Intervall $[a,b] \subseteq D$* ***monoton steigend*** *genau dann, wenn für zwei beliebige Werte $x_1 \in [a,b],\ x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$ gilt:*

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

Gilt

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

so heißt sie ***monoton fallend****. Gilt das Gleichheitszeichen nicht, so spricht man von* ***strenger Monotonie****.*

Beispiel 2.20 *$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ist streng monoton steigend in $D = \mathbb{R}$.*

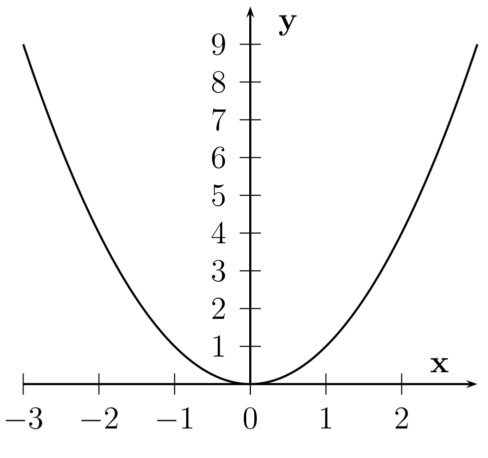
Definition 2.21 *Eine in einem Intervall I definierte Funktion f heißt* ***gerade*** *oder* ***symmetrisch*** *genau dann, wenn $\forall x \in I$ mit $-x \in I$ gilt:*

$$f(x) = f(-x).$$

Sie heißt ***ungerade*** *oder* ***antisymmetrisch*** *genau dann, wenn $\forall x \in I$ mit $-x \in I$ gilt:*

$$f(x) = -f(-x).$$

Beispiel 2.22
$f(x) = x^2$ ist eine gerade Funktion. $f(x) = x^3$ ist eine ungerade Funktion. (vgl. Abb. 4)



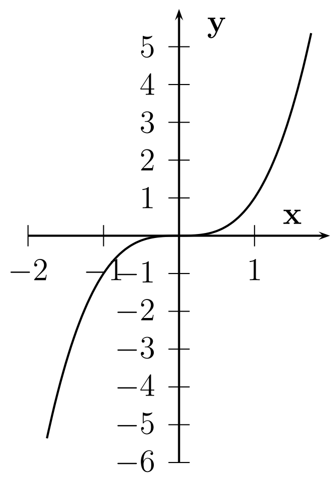


Abbildung 4: $f(x) = x^2$ links und $f(x) = x^3$ rechts

Eine genauere Untersuchung verschiedener Funktionstypen soll in Kapitel 4 durchgeführt werden. Zunächst einmal sollen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen betrachtet werden.

2.3 Übungsaufgaben

1. Sei $B = \{0, 1\}$. Bestimmen Sie $B^3 = B \times B \times B$.

   (Bemerkung: Man erhält damit die Antwort auf die Frage, welche verschiedenen Binärzahlen ein Dreibit-Computer darstellen kann.)

2. Sei $S = \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{P}(S)$ und die Anzahl der Elemente von $\mathcal{P}(S)$ (i.Z. $|\mathcal{P}(S)|$).

3. Seien $A,\ B$ und C Mengen. Beweisen Sie:
   a) $A \cap B \subset A$;
   b) $A \subset A \cap B \ \wedge\ B \subset B \cap A \quad \Rightarrow \quad A = B$;
   c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
   d) Seien $A,\ B$ und C Teilmengen von X. Für $A \subset X$ ist das **Komplement** A' von A in X erklärt durch $A' := X \setminus A$. Zeigen Sie
      a) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetz);
      b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (eine der Regeln von de Morgan);
      c) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

      Bemerkung:
      Die oben angegebenen Regeln für Mengen gelten auch, wenn man jeweils $\cup$ durch $\cap$ und $\cap$ durch $\cup$ ersetzt. Die *Regeln von de Morgan* gelten nicht nur für zwei, sondern auch für eine beliebige endliche oder unendliche Anzahl von Mengen.
   e) Seien B und C Teilmengen einer Menge A. Zeigen Sie die Äquivalenz von
      a) $B \subset C$;
      b) $B \cap C = B$;
      c) $B \cup C = C$.
   f) Die Mengen $A,\ B$ und M seien gegeben durch

      $$A := \{\text{Teller, Schüssel, Tasse}\}, \quad B := \{\text{gelb, grün}\} \quad \text{und} \quad M := A \times \{\text{grün}\}.$$

      a) Bestimmen Sie die Menge $B \times A$.
      b) Wie viele Elemente hat die Menge $B \times A \times \{\}$?
      c) Bestimmen Sie die Menge $(A \times B) \setminus M$.
      d) Bestimmen Sie die Menge $M \cap (\{\text{Teller, Schüssel}\} \times \{\text{gelb, grün}\})$.

4. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität:
   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3;$
   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4;$
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0},\ f(x) = x^4;$
   d) $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0},\ f(x) = x^4;$
   e) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f(x) = \dfrac{1}{x};$
   f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x - 1;$
   g) $g : [-2; \infty[\to [-2; \infty[, x \mapsto x^2 - 2x - 1;$

5. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Monotonie:
   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 3;$
   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2;$
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 + 1.$

6. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Symmetrie:
   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 1;$
   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 + 1;$
   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^4;$
   d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^5 - x^3.$

3 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Zu Grunde liegt Kapitel 4 der zweiten Auflage basierend auf [SG94].

Seien $a_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}, k, l \in \mathbb{Z}$. Wir verwenden im folgenden die Symbole

$$\prod_{i=k}^{l} a_i := \begin{cases} a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_l, & k < l \\ a_k, & k = l \\ 1, & k > l \end{cases}$$

$$\sum_{i=k}^{n} a_i = \begin{cases} a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n, & k < n \\ a_k, & k = n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

3.1 Potenzen und Wurzeln

Definition 3.1 *Sei $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$. Man definiert:*

$$a^n := \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} a, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

*a heißt **Basis**, n **Exponent** und $b = a^n$ **Potenzwert**.*

Definition 3.2 *Sei $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Man definiert für $a \neq 0$:*

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

Seien $a, b \in \mathbb{R},\ n, m \in \mathbb{N}_0$. Es gelten folgende Rechenregeln, die man mittels vollständiger Induktion beweisen kann:

(R1) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(R2) $a^n : b^n = \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n,\ b \neq 0$

(R3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

(R4) $a^n : a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\ a \neq 0$

(R5) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Bemerkung 3.3 *(R1)-(R5) gelten auch für $n, m \in \mathbb{Z}$, wobei darauf zu achten ist, daß evtl. auftretende Nenner immer ungleich 0 sein müssen.*

Beispiel 3.4

- $\left(\dfrac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}\right)^{-2} = (4a^{-3}b^0x^{-2}y)^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \dfrac{a^6x^4}{16y^2}$ *für* $axy \neq 0$;
- $\dfrac{9^4(a^2\sqrt{a}b)^2}{18^2(3ab)^3} = \dfrac{3^8a^4ab^2}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3a^3b^3} = \dfrac{3a^2}{4b}$ *für* $a > 0,\ b \neq 0$.

Definition 3.5 *Sei $a \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung $b^n = a$ hat in $\mathbb{R}$ genau eine nichtnegative Lösung (der Beweis ist nicht leicht, s. z.B. [Heu90]), die man mit*

$$b = \sqrt[n]{a}$$

*bezeichnet. a heißt **Radikand**, n **Wurzelexponent** und b der **Wurzelwert**. Merke Radikand und Wurzelwert sind immer nichtnegativ (zur Begründung siehe [SG94])!*

Bemerkung 3.6 *Definiert man zunächst für $m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N},\ a \geq 0,\ \ a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$ und anschließend für $a > 0$*

$$a^{\frac{-m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}},$$

so ergibt sich wiederum die Gültigkeit von (R1)-(R5) auch für rationale Exponenten (achte jeweils auf Nenner ungleich 0).

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;
- $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$;
- $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$;
- $\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$.

Bemerkung 3.7 *Diese Gültigkeit bleibt erhalten, wenn man auch beliebige reelle Exponenten zuläßt, wobei die Potenzen dann für irrationale Exponenten z.B. durch Intervallschachtelungen definiert werden können.*

Beispiel 3.8

- $\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \left(125^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$
- $$\begin{aligned} 8\sqrt[3]{343} - 4\sqrt[3]{125} + 5\sqrt[3]{8} - 5\sqrt[3]{729} &= 8\sqrt[3]{7^3} - 4\sqrt[3]{5^3} + 5\sqrt[3]{2^3} - 5\sqrt[3]{3^6} \\ &= 8 \cdot 7 - 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 - 5 \cdot 9 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen: Für $a, b \in \mathbb{R}^{>0},\ m, n \in \mathbb{Z},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $a^0 = 1,\ \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}$.
2. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}, n > 0.$
3. $a^\alpha \cdot b^\alpha = (ab)^\alpha$.
4. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta},\ a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$.
5. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$.

3.2 Logarithmen

Definition 3.9 *Seien $a \in \mathbb{R}^{>0}, b \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$.*
Man definiert:

$$c = log_b a \Leftrightarrow c \text{ ist die eindeutige Lösung von } b^c = a.$$

Bemerkung 3.10 *Der **Logarithmus von a zur Basis b** (auch: b-Logarithmus von a) ist also diejenige Zahl, mit der man b potenzieren muß, um a zu erhalten. Es gilt also per Definition:*

$$b^{log_b a} = a$$

und

$$log_b b^c = c.$$

Aus der zweiten Beziehung folgt unmittelbar für $c = 0$ bzw. $c = 1$:

$$log_b 1 = 0,\ log_b b = 1.$$

*Der Logarithmus zur Basis 10 heißt **dekadischer Logarithmus** (i.Z. lg), der zur Basis e (Euler'sche Zahl e=2,71828...) heißt **natürlicher Logarithmus** (i.Z. ln).*
Merke: Basis und Argument des Logarithmus sind immer positiv.

Beispiel 3.11

- $2^x = 16 \;\Leftrightarrow\; x = \log_2 16 \;\Leftrightarrow\; x = 4$;
- $2 = \log_x 36 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 36 \;\Leftrightarrow\; x = 6$;
- $x = \log_5 125 \;\Leftrightarrow\; 5^x = 125 \;\Leftrightarrow\; x = 3$;
- $5 = \log_3 x \;\Leftrightarrow\; 3^5 = x \;\Leftrightarrow\; x = 243$.

Satz 3.12 *Für den Logarithmus zur Basis b gelten folgende Rechenregeln ($c, d, x > 0$):*

(R1) $\log_b(c \cdot d) = \log_b c + \log_b d$

(R2) $\log_b \left(\frac{c}{d}\right) = \log_b c - \log_b d$

(R3) $\log_b x^a = a \cdot \log_b x,\; a \in \mathbb{R}$

(R4) $\log_{b_2} x = \log_{b_1} x \cdot \log_{b_2} b_1 \Leftrightarrow \log_{b_1} x = \dfrac{\log_{b_2} x}{\log_{b_2} b_1}$

Die letzte Regel gibt zum einen an, wie man einen Logarithmus von einer Basis b_1 in eine andere Basis b_2 umrechnet, und erlaubt zum anderen die Berechnung von Logarithmen zu einer beliebigen Basis b_1, falls man nur die Logarithmen zu einer festen Basis b_2 (etwa 10 oder e) vollständig kennt.

Beweis:
(R1) $b^{\,\log_b c + \log_b d} = b^{\,\log_b c} \cdot b^{\,\log_b d} = c \cdot d$
(R2) $b^{\,\log_b c - \log_b d} = b^{\,\log_b c} \cdot b^{\,-\log_b d} = \dfrac{c}{d}$
(R3) $b^{\,a \log_b x} = \left(b^{\,\log_b x}\right)^a = x^a$
(R4) $b_2^{\log_{b_1} x \cdot \log_{b_2} b_1} = \left(b_2^{\log_{b_2} b_1}\right)^{\log_{b_1} x} = b_1^{\log_{b_1} x} = x$

Beispiel 3.13

- $$\begin{aligned}\log \frac{2\sqrt{a+b}\; a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2} &= \log 2 + \log(a+b)^{\frac{1}{2}} + \log a^3 + \log b^2 - \log c^{\frac{1}{3}} - \log(a+c)^2 \\ &= \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)\end{aligned}$$

  Voraussetzungen an a, b, c damit der Logarithmus definiert ist.

  Auf der linke Seite der Gleichung muß gelten:

  i) $a + b > 0$, *damit die Wurzel definiert ist.*

ii) *$a > 0$, damit der Zähler nicht negativ wird.*
iii) *$b \neq 0$ damit der Zähler nicht 0 wird.*
iv) *$c > 0$, damit die Wurzel definiert ist.*
v) *$a + c \neq 0$, damit der Nenner nicht 0 wird.*

Für die Logarithmen auf der rechten Seite muß zusätzlich gelten:

$b > 0$ und $a + c > 0$, damit die Logarithmen definiert sind.

- $$\begin{aligned} & \log(a+b) + 2\log(a-b) - \frac{1}{2}\log(a^2-b^2) \\ = \; & \log(a+b) + \log(a-b)^2 - \log(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}} \\ = \; & \log\frac{(a+b)(a-b)^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ = \; & \log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ = \; & \log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}] \end{aligned}$$

Voraussetzungen an a, b, damit der Logarithmus definiert ist.

Auf der linken Seite muß gelten:

i) *$a + b > 0$, damit der Logarithmus definiert ist.*
ii) *$a - b > 0$, damit der Logarithmus definiert ist.*
iii) *Mit $a + b > 0$ und $a - b > 0$ ist auch $a^2 - b^2 > 0$.*
iv) *Für die rechte Seite müssen keine zusätzlichen Bedingungen erfüllt sein.*

3.3 Übungsaufgaben

1. Schreiben Sie als Potenzen:
   a) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$;
   b) $-(b-a)(a-b)(a-b)$;
   c) $-(a^0b)(a^0b)(a^0b)(a^0b)$.

2. Berechnen Sie:
   a) $(-2^{-1})^3$;
   b) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$;
   c) $\frac{a^{x+1}b^{x+3}a^{3x-1}b^{x+3}}{a^{x-2}b^{3-x}a^xb^{x+1}}$;
   d) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$;

e) $\dfrac{a^{n+1}b^{x-1} + a^n b^x + a^{n-1}b^{x+1}}{a^{n-2}b^{x-1}}$;

f) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-3}$.

3. Machen Sie den Nenner wurzelfrei:

$$\frac{x(2r^2 - 4x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 8x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

4. Berechnen Sie

$$\sqrt[3]{a^3\sqrt{a^2\sqrt[5]{a^8\sqrt[4]{a^3}}}}.$$

5. Die französische Gräfin Elisabeth-Angelique de Beauteville verwitwete im Alter von 20 Jahren. Ihr Gatte, der Gouverneur Sanslisse, liebte sie sehr und hinterließ folgendes Testament:

   Im ersten Jahr nach seinem Tode wird der Witwe ein Goldstück ausgezahlt, wenn sie nicht wieder heiratet, im zweiten zwei Goldstücke, im dritten vier usw., also in jedem Jahr doppelt so viele Goldstücke wie im Vorjahr, vorausgesetzt sie bleibt unverheiratet. Die Gräfin lebte noch 69 Jahre und heiratete nicht wieder. Wie viele Goldstücke hätte sie erhalten müssen?

6. Berechnen Sie:

   a) $\log_7 49 = x$;

   b) $\log_{0.5} \dfrac{1}{32}$;

   c) $\ln x = \dfrac{1}{2}$.

7. Berechnen Sie mittels der Logarithmengesetze und bestimmen Sie den Gültigkeitsbereich:

   a) $\log_{10} \dfrac{a^2b^3}{c}$;

   b) $\log_{10} \dfrac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$.

8. Man nehme ein Blatt Papier der Dicke $0,1$ mm und falte es 40 mal. Welche Dicke hätte es dann? Wie oft müßte man es falten, um einen Papierstapel von der Erde bis zur Sonne (8 Lichtminuten, Lichtgeschwindigkeit 300000 km pro Sekunde) zu erhalten?

4 Betrachtung verschiedener Funktionstypen

Basierend auf [SG94] und [CDD06].
In Kapitel 2.2 wurde bereits definiert, was eine Funktion ist und es wurden einige Eigenschaften vorgestellt. Im Folgenden sollen verschiedene Funktionstypen genauer untersucht werden.

4.1 Ganzrationale Funktionen

In diesem Abschnitt werden zunächst einige elementare Funktionen und deren Eigenschaften untersucht.

Definition 4.1 *Man nennt*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit $n \in \mathbb{N}_0,\ a_i \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$ ***ganzrationale Funktion*** n***-ten Grades*** *(Polynom).*

Aus der Schule sind insbesondere die linearen und die quadratischen Funktionen bekannt.

Definition 4.2 *Eine Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *der Form*

$$y = f(x) = mx + n, \quad m, n \in \mathbb{R},$$

heißt ***lineare Funktion*** *(Gerade).*
m *bezeichnet die* ***Steigung*** *und* n *den* y***-Achsenabschnitt****.*

Ist $n = 0$ so heißt $y = mx$ **Ursprungsgerade**.

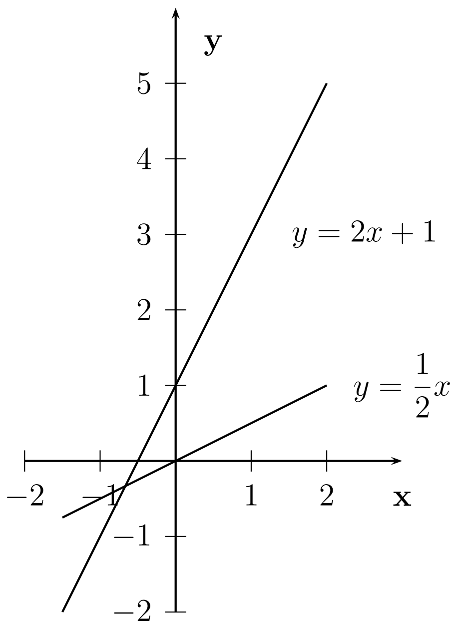


Abbildung 5: Zwei Geraden

Seien (x_0, y_0) und (x_1, y_1) zwei Punkte auf der Geraden und m die Steigung, dann sind alternative Darstellungen der Geraden die Punktsteigungsform

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \;\Leftrightarrow\; y = mx + (y_0 - mx_0)$$

und die Zwei-Punkte-Form

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \;\Leftrightarrow\; y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \left(y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 \right).$$

Die Gerade hat für $m \neq 0$ genau eine Nullstelle ($y = 0$):

$$x_N = -\frac{n}{m}$$

Zwei Geraden $y_1 = m_1 x + n_1$ und $y_2 = m_2 x + n_2$ heißen

- parallel zueinander genau dann, wenn $m_1 = m_2$.
- senkrecht zueinander genau dann, wenn $m_1 m_2 = -1$.

Weitere Untersuchungen sollen für lineare Funktionen nicht geführt werden.

Definition 4.3 *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\; a \neq 0,$$

*heißt **quadratische Funktion (Parabel).***
*Ist $f(\alpha)$ der kleinste Funktionswert im Fall $a > 0$ bzw. ist $f(\alpha)$ der größte Funktionswert im Fall $a < 0$, dann heißt der Punkt $S = (\alpha, f(\alpha))$ der **Scheitelpunkt** der Parabel.*

Bemerkung 4.4 *Ist $|a| > 1$, so liegt eine **Streckung** der Parabel vor; ist $0 < |a| < 1$, so liegt eine **Stauchung** der Parabel vor. Im Fall $a = 1$ verwendet man i.a. die Schreibweise $x^2 + px + q$ für $ax^2 + bx + c$.*

Satz 4.5 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\; a \neq 0.$$

Dann ist

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$$

der Scheitelpunkt der Parabel.

Beweis:
Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erhält man die sog. **Scheitelpunktsform**:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= ax^2+\frac{ab}{a}x+\frac{ab^2}{4a^2}-\frac{ab^2}{4a^2}+c \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2-4ac}{4a} \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.
\end{aligned}
$$

a) Ist $a>0$, dann ist $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \geq -\frac{b^2-4ac}{4a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichheit gilt offensichtlich genau dann, wenn $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ gilt, also für $x=-\frac{b}{2a}$. Damit lautet der kleinste Funktionswert

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

also $S=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

b) Ist $a<0$, dann ist $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \leq -\frac{b^2-4ac}{4a}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichheit gilt offensichtlich genau dann, wenn $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ gilt, also für $x=-\frac{b}{2a}$. Damit lautet der größte Funktionswert

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

also $S=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$. □

Beispiel 4.6

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1;\ S = (3, -1);$

b) $g(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4;\ S = (1, 4);$

c) $h(x) = -x^2 + 11 = -(x-0)^2 + 11;\ S = (0, 11);$

d) $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4;\ S = (-3, 4);$

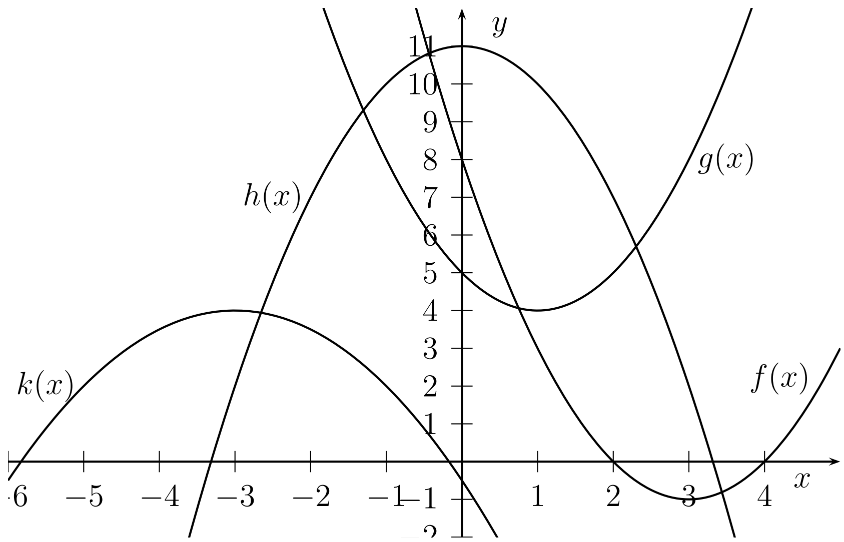


Abbildung 6: Die Graphen der Funktionen $f,\ g,\ h$ und k

Satz 4.7 *Sei f eine quadratische Funktion. f besitzt genau*

(i) zwei Nullstellen, (ii) eine Nullstelle, (iii) keine Nullstelle

in $\mathbb{R}$, wenn für die ***Diskriminante***

$$D = b^2 - 4ac$$

gilt:

(i) $D > 0$, *(ii)* $D = 0$, *(iii)* $D < 0$.

Die Nullstellen lauten dann

$$\text{(i) } x_1 = -\frac{b - \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = -\frac{b + \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{(ii) } x = -\frac{b}{2a}.$$

Beweis:
Es gilt

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Damit erhät man schließlich

$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} \\ \overset{*}{\Leftrightarrow} \quad & x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \\ \Leftrightarrow \quad & x = -\frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}. \end{aligned}$$

*: Für $D < 0$ ist diese Gleichung in $\mathbb{R}$ nicht lösbar, für $D = 0$ ergibt sich die Lösung $x = -\frac{b}{2a}$. $\square$

Bemerkung 4.8

- *Ist $D = 0$, so nennt man $x = -\frac{b}{2a}$ auch eine* doppelte *Nullstelle von f.*
- *Im Fall $a = 1$ ist $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Die Nullstellen lauten somit*

  $$i)\ x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},\ x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad ii)\ x = -\frac{p}{2}$$

  ($p - q-$Formel).

Satz 4.9 *Die quadratische Funktion f besitze die Nullstellen x_1 und x_2, wobei $x_1 = x_2$ zugelassen ist. Dann gilt*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{und} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

und f läßt sich darstellen durch

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(Satz von Vieta).

Beweis:
Die Nullstellen x_1 und x_2 haben die Darstellung

$$x_1 = -\frac{b - \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = -\frac{b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Dann gilt

$$x_1 + x_2 = -\frac{b - \sqrt{D}}{2a} - \frac{b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}) = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{b - \sqrt{D}}{2a}\right)\left(-\frac{b + \sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Damit erhält man schließlich

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) \\ &= ax^2 - a\left(-\frac{b}{a}\right)x + a\frac{c}{a} \\ &= ax^2 + bx + c \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 4.10 *Berechnung von Nullstellen quadratischer Funktionen:*

a) $f(x) = x^2 - x - 6;$
$x = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \;\Rightarrow\; x = -2 \;\vee x = 3;$

b) $g(x) = -2x^2 - 6x + 8;$
$x = -\frac{-6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8}}{2 \cdot (-2)} = -\frac{1}{4}(6 \pm \sqrt{100}) \;\Rightarrow\; x = -4 \;\vee x = 1;$

Satz 4.11 *Jede ganzrationale Funktion n-ten Grades hat n Nullstellen. Sie können alle voneinander verschieden sein oder mehrfach auftreten, reell oder paarweise konjugiert komplex sein. (vgl. Kapitel 8)*
Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n Nullstellen der Funktion

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \; a_i \in \mathbb{C}, \; x \in \mathbb{R}$$

so läßt sich y als Produkt von Linearfaktoren schreiben:

$$y = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n), \; x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung 4.12 *Werden nur reelle Nullstellen der Funktion gesucht, gilt dieser Satz i.a. nicht.*

Beispiel 4.13

$$2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80 = 2(x-2)^2(x+2)(x^2+2x+5)$$

Die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + 2x + 5$ *besitzt keine reellen Nullstellen, da die Diskriminante negativ ist:* $D = -16$.

Die Berechnung der Linearfaktoren ergibt sich bei Kenntnis einer Nullstelle durch Polynomdivision. Diese soll anhand eines Beispieles noch einmal verdeutlicht werden:

Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$. Gesucht ist die Linearfaktorzerlegung dieses Polynoms. $x_1 = 1$ ist eine Nullstelle dieses Polynoms. Mit Hilfe der Polynomdivison ergibt sich:

$$\begin{array}{cccccl}
(x^4 & +5x^3 & +5x^2 & -5x & -6) & : (x-1) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\
-(x^4 & -x^3) & & & & \\
\hline
 & 6x^3 & +5x^2 & & & \\
 & -(6x^3 & -6x^2) & & & \\
\hline
 & & 11x^2 & -5x & & \\
 & & -(11x^2 & -11x) & & \\
\hline
 & & & 6x & -6 & \\
 & & & -(6x & -6) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Also $p(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)(x-1)$.
$x_2 = -1$ ist eine Nullstelle von $\tilde{p}(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Durch eine weitere Polynomdivision ergibt sich:

$$
\begin{array}{llllll}
(x^3 & +6x^2 & +11x & +6) & :(x+1) = x^2+5x+6 \\
-(x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
 & 5x^2 & +11x & & \\
 & -(5x^2 & +5x) & & \\
\hline
 & & 6x & +6 & \\
 & & -(6x & +6) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Also
$$p(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = (x-1)(x+1)(x^2+5x+6).$$
$\bar{p}(x) = x^2 + 5x + 6$ läßt sich nochmals in die Faktoren $(x+2)(x+3)$ aufspalten.
Somit ergibt sich als Linearfaktorzerlegung:

$$p(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x+1)(x+2)(x+3).$$

Für weitere Aussagen über charakteristische Punkte ganzrationaler Funktionen muß die Differentialrechnung zu Hilfe gezogen werden, worauf später in Kapitel 9 noch einmal eingegangen werden soll.
Ohne die Differentialrechnung lassen sich jedoch noch Aussagen zu dem Verhalten der Funktion im Unendlichen machen. Dafür benutzen wir den Begriff des Grenzwertes.
Dazu betrachten wir wieder die allgemeine ganzrationale Funktion n-ten Grades

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} p(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} x^n \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) \\
&= a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n
\end{aligned}
$$

Es sind nun verschiedene Fälle zu untersuchen. Dabei hängt der Grenzwert von a_n, n und $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ ab.

Fall: $x \to +\infty$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
n gerade	$\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$
n ungerade	$\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = -\infty$

Fall: $x \to -\infty$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
n gerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$
n ungerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \infty$

Im Folgenden sollen spezielle ganzrationale Funktionen betrachtet werden.

Definition 4.14 *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ x > 0$$

heißt ***Potenzfunktion****.*

Bemerkung 4.15 *Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ ist die Potenzfunktion eine ganzrationale Funktion.*

Für gerades $0 < \alpha \in \mathbb{Z}$ haben alle Kurven den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, den Wertebereich $W = \mathbb{R}_0^+$ und die gemeinsamen Punkte $(-1, 1)$,$(0, 0)$, $(1, 1)$.
Für ungerades $0 < \alpha \in \mathbb{Z}$ ist $D = W = \mathbb{R}$ und gemeinsame Punkte sind $(-1, -1)$, $(0, 0)$, und $(1, 1)$.

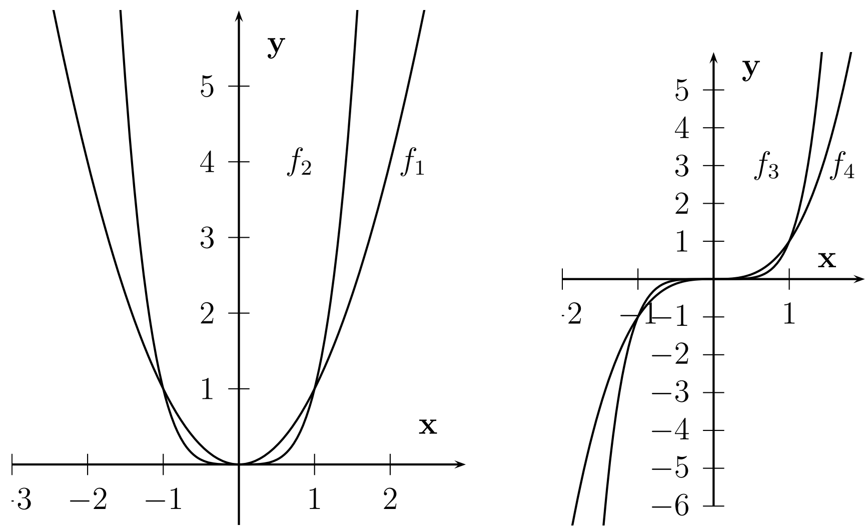


Abbildung 7: $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = x^4$ links, $f_3(x) = x^3$ und $f_4(x) = x^5$ rechts

Für $0 > \alpha \in \mathbb{Z}$ nennt man y eine **gebrochenrationale Funktion**. Diese hat einen **Pol** bei $x = 0$ und $y = 0$ als **Asymptote**.
Für $0 > \alpha \in \mathbb{Z}$ gerade haben alle Funktionen den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, den Wertebereich $W = \mathbb{R}_0^+$ und die gemeinsamen Punkte $(-1, 1),\ (1, 1)$.
Für $0 > \alpha \in \mathbb{Z}$ ungerade ist $D = W = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und die gemeinsamen Punkte sind $(-1, -1),\ (1, 1)$

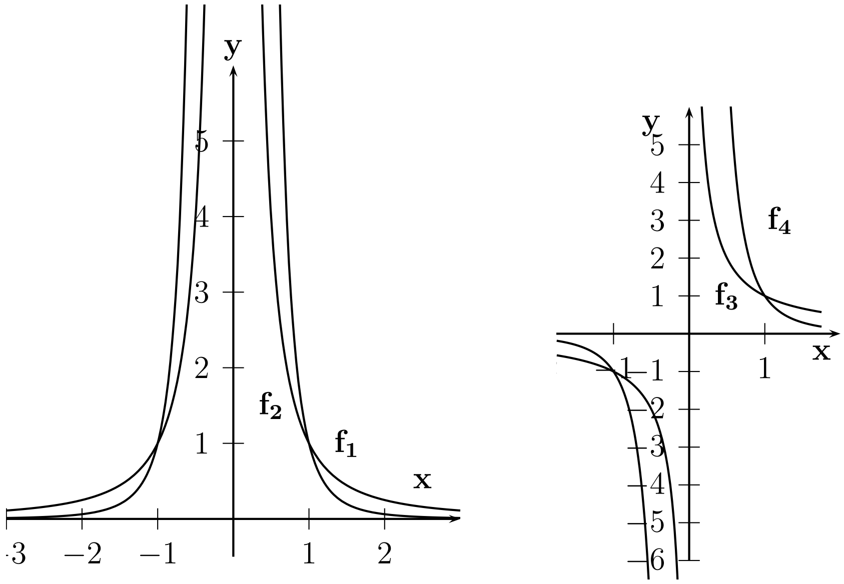


Abbildung 8: $f_1(x) = x^{-2}$ und $f_2(x) = x^{-4}$ links und $f_3(x) = x^{-1}$ und $f_4(x) = x^{-3}$ rechts

4.2 Exponentialfunktionen

Definition 4.16 *Eine Funktion f mit $a > 0,\ a \neq 1$*

$$f(x) = a^x,$$

*heißt **Exponentialfunktion**.*

Bemerkung 4.17 *Exponentialfunktionen haben den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und den Wertebereich $W = \mathbb{R}^+$. Da $a^0 = 1\ \forall a \in \mathbb{R}^+$ gilt, ist $(0, 1)$ gemeinsamer Punkt aller Exponentialfunktionen.*

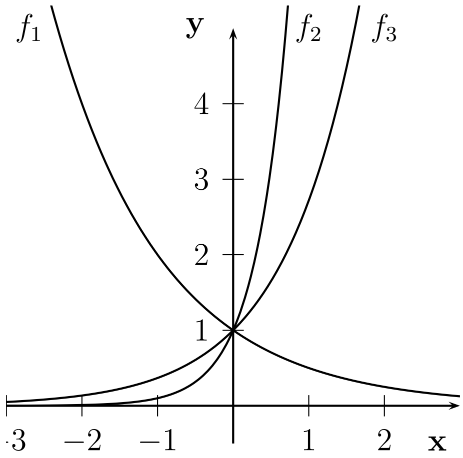


Abbildung 9: Exponentialfunktionen: $f_1(x) = 2^{-x},\ f_2(x) = 10^x,\ f_3(x) = e^x$

Für $a > 1$ ist f streng monoton steigend und strebt für $x \to -\infty$ gegen die x-Achse.
Für $0 < a < 1$ ist f streng monoton fallend und strebt für $x \to \infty$ gegen die x-Achse.

4.3 Logarithmusfunktion

Definition 4.18 *Eine Funktion f mit $a > 0,\ a \neq 1$*

$$f(x) = \log_a x$$

heißt Logarithmusfunktion.

Die Funktion hat den Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}^{>0}$ und den Wertebereich $\mathbb{W} = \mathbb{R}$.
Gemeinsamer Punkt aller Logarithmusfunktionen ist $(1, 0)$.
Für $a > 1$ ist f streng monoton steigend und hat die negative y-Achse als Asymptote.
Für $0 < a < 1$ ist f streng monoton fallend und hat die positive y-Achse als Asymptote.
Die Kurven von $f(x) = \log_a x$ sind das Spiegelbild von $g(x) = a^x$ an der Geraden $h(x) = x$.

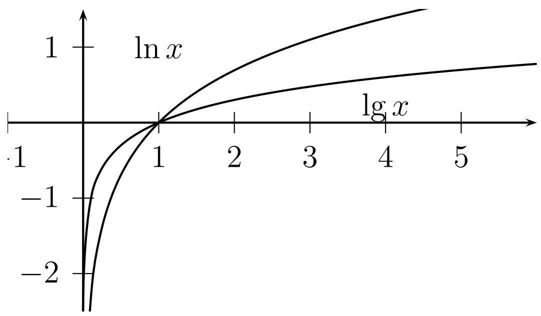


Abbildung 10: Logarithmusfunktionen: $f(x) = \lg x$ und $g(x) = \ln x$

4.4 Trigonometrische Funktionen

Definition 4.19 *Als* ***trigonometrische Funktionen*** *oder* ***Winkelfunktionen*** *bezeichnet man die Funktionen* $\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x$.

Funktion	*Definitionsbereich*	*Wertebereich*
$f(x) = \sin x$	$D = \mathbb{R}$	$W = [-1, 1]$
$f(x) = \cos x$	$D = \mathbb{R}$	$W = [-1, 1]$
$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$D = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$W = \mathbb{R}$
$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$D = \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$W = \mathbb{R}$

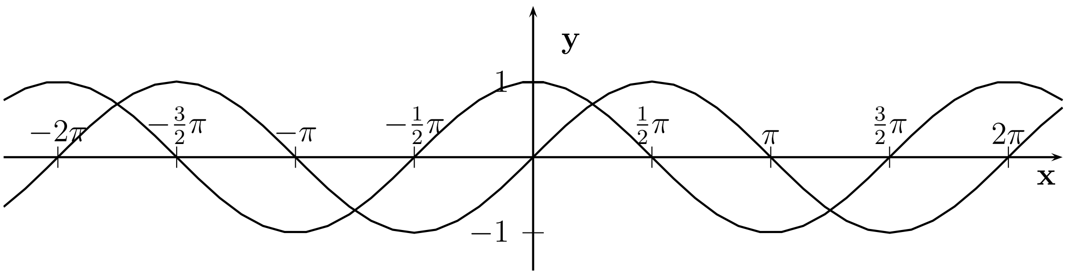


Abbildung 11: $\sin x$ und $\cos x$

	Symmetrie	Periode	Nullstellen
$\sin x$	ungerade	2π	$x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\cos x$	gerade	2π	$x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\tan x$	ungerade	π	$x_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	ungerade	π	$x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Auf weitere Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen wird in Kapitel 7 eingegangen.

4.5 Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie die Geraden, die durch folgende Punkte gehen:
   a) $(2,3),\ (5,5)$;
   b) $(1,1),\ (3,7)$;
   c) $(-1,0),\ (-2,-3)$.

2. Gegeben sind die folgenden quadratischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Scheitelpunkt und die Nullstellen von f.
   a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$;
   b) $f(x) = (x-5)(x-1)$;
   c) $f(x) = 3x^2 + 6x$.

3. Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen mittels Polynomdivision und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$:
   a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40$;
   b) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 5x + 6$;
   c) $f(x) = x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 20x^2 + 4x + 16$.

5 Gleichungen, Ungleichungen und Beträge

Zu Grunde liegt Kapitel 2.5. der zweiten Auflage. Änderungen basieren auf [SG94].

5.1 Gleichungen

Das Lösen von Gleichungen läßt sich zurückführen auf das Berechnen von Nullstellen der zugehörigen Funktion.
Alle Gleichungen der Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = b$$

lassen sich umformen zu

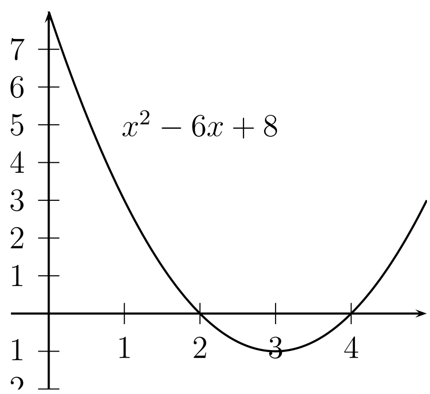
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + \bar{a}_0 = 0.$$

wobei $\bar{a}_0 = a_0 - b$ gilt. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + \bar{a}_0$ ist eine ganzrationale Funktion deren Nullstellen die Lösung der Gleichung sind. Wie diese berechnet werden, wurde bereits in Kapitel 4 vorgestellt.

Beispiel 5.1
$x^2 - 6x + 2 = -6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0$
Die Nullstellen lassen sich mittels der $p-q-$Formel ausrechnen und sind die Lösungen der obigen Gleichung:

$$\mathbb{L} = \{2, 4\}.$$

Die Lösungsmenge kann man auch am Graphen der Funktion ablesen. (vgl. Kapitel 4.1 Abbildung 6)



5.2 (Un-)Gleichungen mit Beträgen

Definition 5.2 *Die **Betragsfunktion** $|\cdot|$ ist definiert durch*

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Definition 5.3 *Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ sind die Funktionen f_+ und f_- definiert durch*

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases} \quad \textit{bzw.} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Beispiel 5.4

a) $2|x-7| < 7(x+2) + |5x+2|$;
Aufgrund der Beträge ist eine Fallunterscheidung notwendig:

i) $x - 7 \geq 0 \ \wedge\ 5x + 2 \geq 0 \ \Leftrightarrow\ x \geq 7 \ \wedge\ x \geq -\frac{2}{5} \ \Leftrightarrow\ x \geq 7$;

$$\begin{aligned} & 2(x-7) < 7(x+2) + 5x + 2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x - 14 < 12x + 16 \\ \Leftrightarrow\ & -30 < 10x \\ \Leftrightarrow\ & x > -3; \end{aligned}$$

insgesamt liefert dies: $x \geq 7 \ \wedge\ x > -3 \ \Leftrightarrow\ x \geq 7 :\ \mathbb{L}_1 = [7, \infty)$;

ii) $x - 7 < 0 \ \wedge\ 5x + 2 \geq 0 \ \Leftrightarrow\ x < 7 \ \wedge\ x \geq -\frac{2}{5} \ \Leftrightarrow\ -\frac{2}{5} \leq x < 7$;

$$\begin{aligned} & 2(7-x) < 7(x+2) + 5x + 2 \\ \Leftrightarrow\ & 14 - 2x < 12x + 16 \\ \Leftrightarrow\ & -2 < 14x \\ \Leftrightarrow\ & x > -\tfrac{1}{7}; \end{aligned}$$

insgesamt liefert dies: $-\frac{2}{5} \leq x < 7 \ \wedge\ x > -\frac{1}{7} \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{7} < x < 7 :$
$\mathbb{L}_2 = \ (-\frac{1}{7}, 7)$;

iii) $x - 7 \geq 0 \;\wedge\; 5x + 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 7 \;\wedge\; x < -\frac{2}{5}$ *(Widerspruch!)*;
insgesamt liefert dies: $\mathbb{L}_3 = \{\}$;
iv) $x - 7 < 0 \;\wedge\; 5x + 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 7 \;\wedge\; x < -\frac{2}{5} \;\Leftrightarrow\; x < -\frac{2}{5}$;

$$\begin{aligned} & 2(7 - x) < 7(x + 2) - (5x + 2) \\ \Leftrightarrow\;\; & 14 - 2x < 2x + 12 \\ \Leftrightarrow\;\; & 2 < 4x \\ \Leftrightarrow\;\; & x > \tfrac{1}{2}; \end{aligned}$$

insgesamt liefert dies: $x < -\frac{2}{5} \;\wedge\; x > \frac{1}{2}$ *(Widerspruch!):* $\mathbb{L}_4 = \{\}$;

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4 = [7, \infty) \;\cup\; (-\frac{1}{7}, 7) \;\cup\; \{\} \;\cup\; \{\} = \;(-\frac{1}{7}, \infty)$;

b) $|f| = f_+ + f_-$;
Aufgrund der Beträge ist eine Fallunterscheidung notwendig:
i) $f(x) \geq 0: \;|f(x)| = f(x) = f(x) + 0 = f_+(x) + f_-(x)$;
ii) $f(x) < 0: \;|f(x)| = -f(x) = 0 - f(x) = f_+(x) + f_-(x)$;
somit gilt für alle $x \in \mathbb{D}: \;|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$, *d.h.* $|f| = f_+ + f_-$;

5.3 Quadratische (Un-)Gleichungen

Bemerkung 5.5 *Jede quadratische Ungleichung läßt sich leicht auf eine der folgenden Formen bringen:*

$$x^2 + px + q < 0, \quad x^2 + px + q \leq 0, \quad x^2 + px + q > 0, \quad x^2 + px + q \geq 0.$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung kann man mit Hilfe der $p-q-$*Formel direkt angeben:*

	$f(x) = x^2 + px + q < 0$
$D < 0$	$\mathbb{L} = \{\}$
$D = 0$	$\mathbb{L} = \{\}$
$D > 0$	$\mathbb{L} = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$

	$f(x) = x^2 + px + q \leq 0$
$D < 0$	$\mathbb{L} = \{\}$
$D = 0$	$\mathbb{L} = \{-\frac{p}{2}\}$
$D > 0$	$\mathbb{L} = \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]$

	$f(x) = x^2 + px + q > 0$
$D < 0$	$\mathbb{L} = \mathbb{R}$
$D = 0$	$\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{p}{2}\}$
$D > 0$	$\mathbb{L} = \left(-\infty, -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cup \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \infty\right)$

	$f(x) = x^2 + px + q \geq 0$
$D < 0$	$\mathbb{L} = \mathbb{R}$
$D = 0$	$\mathbb{L} = \mathbb{R}$
$D > 0$	$\mathbb{L} = \left(-\infty, -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right] \cup \left[-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \infty\right)$

Beispiel 5.6 *Zu lösen sind die folgenden quadratischen Ungleichungen:*

a) $x^2 + 5x > 7x + 3$;

$$\begin{aligned} & x^2 + 5x > 7x + 3 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2x - 3 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)(x-3) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & x < -1 \ \vee \ x > 3; \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet also: $\mathbb{L} = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$.

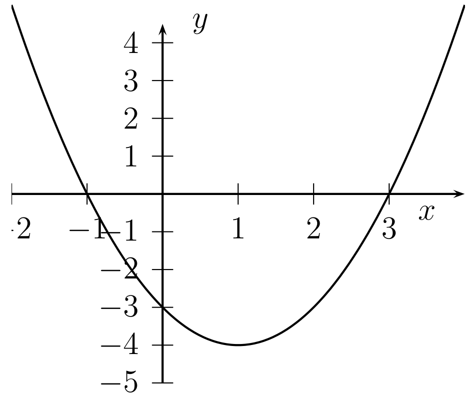


Abbildung 12: Anhand des Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2x - 3$ läßt sich die Lösungsmenge leicht ablesen.

b) $2x^2 - 6x + 4 \leq 6x - 12$;

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 6x + 4 \leq 6x - 12 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 - 6x + 8 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-2)(x-4) \leq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2 \leq x \leq 4; \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet also: $\mathbb{L} = [2, 4]$.

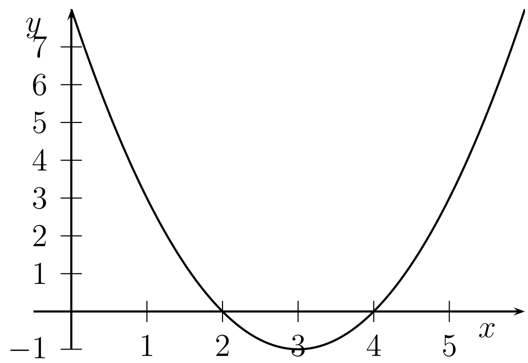


Abbildung 13: Anhand des Graphen der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 6x + 8$ läßt sich die Lösungsmenge leicht ablesen.

5.4 Sonstiges

Beispiel 5.7

a) *Wurzelgleichung:*

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-1} \;\Rightarrow\; x-1 = x^2-1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = 1;$$

Eine Probe liefert folgendes Ergebnis:
$x = 0:\ \sqrt{0-1} = \sqrt{-1}$ *ist in* $\mathbb{R}$ *nicht definiert, also ein Widerspruch! Also gilt* $0 \notin \mathbb{L}$.
$x = 1:\ \sqrt{1-1} = 0 = \sqrt{1^2-1}$, *also gilt* $\mathbb{L} = \{1\}$.

b) *Quadrieren von Ungleichungen:*

$$x > -3 \underset{?}{\overset{?}{\rightleftarrows}} x^2 > 9;$$

Es gilt hier weder die eine noch die andere Richtung:

Gegenbeispiele:

„$\Rightarrow$“: *Sei* $x = 2$:
$2 > -3$ *(w)* $\not\Rightarrow$ $4 = 2^2 > 9$ *(f), also gilt diese Richtung nicht.*

„$\Leftarrow$“: *Sei* $x = -4$:
$16 = (-4)^2 > 9$ *(w)* $\not\Rightarrow$ $-4 > -3$ *(f), also gilt diese Richtung nicht.*

Bemerkung 5.8 *Das Quadrieren von Gleichungen kann dazu führen, daß die Lösungsmenge vergrößert wird (vgl. Beispiel a)). Deshalb ist dieser Vorgang i.a. keine äquivalente Umformung. Daher ist eine Probe sinnvoll.*
Bei Ungleichungen kann sogar der Fall auftreten, daß noch nicht einmal mehr die Hinrichtung gilt (vgl. Beispiel b)). Daher ist beim Quadrieren große Vorsicht geboten, da man anderenfalls falsche Ergebnisse erhält!

5.5 Übungsaufgaben

1. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen über $\mathbb{R}$:
   a) $8x - 3 < 2x + 9$;
   b) $(3x+1)(2x-1) < (5x-3)(2x-1)$;
   c) $\dfrac{2x-2}{2x+2} < 2$;
   d) $\dfrac{3(4x-1)}{x-1} \geq 12 - \dfrac{2(4x-5)}{x-1}$;
   e) $x^2 + 5x > 7x + 3$;

f) $2x^2 - 6x + 4 \leq 6x - 12$;

g) $x^2 - 2x + 1 > \dfrac{5}{2}x - 1$;

h) $8(x-2) \geq \dfrac{20}{x+1} + 3(x-7)$;

i) $\left|\dfrac{x+3}{1-x}\right| > 3$;

j) $|3-x| < 2 - |x-5|$;

k) $|1 - |2 - |x||| = 1$.

2. Lösen Sie folgende Ungleichungen über $\mathbb{R}$. Skizzieren Sie zudem die Lösungsmenge auf der $x-$Achse.

   a) $\frac{x+3}{2x-5} > 3$;

   b) $\frac{|x|-1}{x^2-1} \geq \frac{1}{2}$;

   c) $|x - |x-1|| > -2x + 1$.

   Hinweis:
   Machen Sie geeignete Fallunterscheidungen für x.

6 Der binomische Lehrsatz

Zu Grunde liegt Kapitel 3 der zweiten Auflage ([CDD06]).

6.1 Sätze und Definitionen

Definition 6.1 (Fakultät) *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Die Zahl*

$$\prod_{i=1}^{n} i$$

*heißt $n!$ (lies: **n-Fakultät**).*

Definition 6.2 (Binomialkoeffizienten) *Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Unter dem **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ versteht man die Zahl*

$$\frac{\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} i}{k!}.$$

Satz 6.3 (Eigenschaften der Binomialkoeffizienten)
Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$.

1. *Es gilt:*
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n.$$

2. *Für $n < k$ ist*
$$\binom{n}{k} = 0.$$

3. *Für $n \geq k$ gilt die Darstellung*
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
und die Symmetriebedingung
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

4. *Es gilt:*
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Beweis:

1. Die Eigenschaft folgt direkt aus der Definition der Binomialkoeffizienten.

2. Für $n < k$ ist einer der Faktoren im Zähler 0.

3. Für $n \geq k$ ist

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} i}{k!} \\ &= \frac{\left(\prod\limits_{i=n-k+1}^{n} i\right)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}.\end{aligned}$$

   Es folgt

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

4.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1)!}{k!(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n+1-k-1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

□

Satz 6.4 (binomischer Lehrsatz) *Seien $a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Beweis: [vollständige Induktion]
I.A.: $n = 0$:

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} \cdot a^0 \cdot b^0 = \sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} a^i \cdot b^{0-i}.$$

I.V.:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

I.S.: $n \to n+1$: Zz:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}.$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\
&= (a+b) \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-i+1} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) a^i b^{n-i+1} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{(n+1)-(n+1)} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}.
\end{aligned}$$

□

Folgerung 6.5

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

□

Man kann die Binomialkoeffizienten sehr übersichtlich im sogenannten **Pascalschen Dreieck** anordnen:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Um die Werte in diesem Pascalschen Dreieck zu berechnen muß man nicht die Binome berechnen, sondern addiert die jeweils darüber stehenden Zahlen folgendermaßen:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & & \searrow & & \swarrow & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & & \searrow\ \swarrow & & & & \searrow\ \swarrow & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & \searrow\ \swarrow & & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Zusammen mit dem binomischen Lehrsatz kann man so z.B. sehr schnell $(a+b)^5$ berechnen:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

6.2 Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie
   a) $\dfrac{5!}{3!}$;
   b) $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$;
   c) $2n!$;
   d) $(2n)!$.

2. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:
   a) $\binom{6}{4}$;
   b) $\binom{4}{1}$;
   c) $\dfrac{\binom{7}{6}}{3!}$.

3. Berechnen Sie die folgenden Summen:
   a) $\binom{2}{1} + \binom{2}{2}$;
   b) $\binom{3}{1} + \binom{3}{2}$;
   c) $\binom{4}{1} + \binom{4}{2}$.

4. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:
   a) $(x+y)^7$;
   b) $(a-b)^6$;
   c) $(5a+4b)^3$;
   d) $\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}y\right)^4$.

7 Elementargeometrie

Basierend auf [SG94].

7.1 Das rechtwinklige Dreieck

Es soll im Folgenden nur das rechtwinklige Dreieck betrachtet werden. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt **Hypotenuse**, die anderen beiden Seiten heißen **Katheten**.

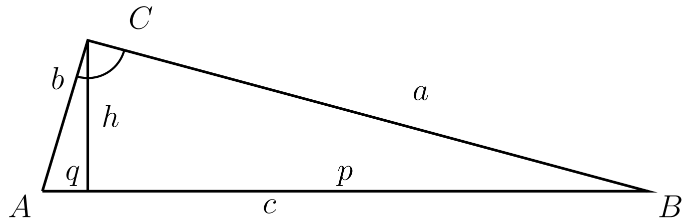


Abbildung 14: Rechtwinkliges Dreieck

Am rechtwinkligen Dreieck gelten die nachfolgenden Sätze:

Satz 7.1 (Satz des Pythagoras) *Im rechtwinkligen Dreieck ist die Fläche des Quadrates über der Hypotenuse gleich der Summe der Flächen der Quadrate über den Katheten:*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Satz 7.2 (Kathetensatz) *Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über eine Kathete flächengleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und der Projektion dieser Kathete auf die Hypotenuse:*

$$a^2 = p \cdot c, \quad b^2 = q \cdot c.$$

Beweis Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ b^2 &= q^2 + h^2 \\ a^2 &= p^2 + h^2 \end{aligned}$$

zusätzlich haben wir $c^2 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - b^2 \\ &= p^2 + 2pq + q^2 - b^2 \\ &= p^2 + 2pq + q^2 - (q^2 + h^2) \\ &= p^2 + 2pq - h^2 \\ &= p^2 + 2pq - (a^2 - p^2) \\ &= 2p^2 + 2pq - a^2 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} 2a^2 &= 2p^2 + 2pq \\ \Leftrightarrow \quad a^2 &= p^2 + pq \\ &= p(p+q) \\ &= pc \end{aligned}$$

$b^2 = qc$ analog. □

Satz 7.3 (Höhensatz) *Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe auf der Hypotenuse flächengleich mit dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten:*

$$h^2 = p \cdot q.$$

Beweis:
Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ b^2 &= q^2 + h^2 \\ a^2 &= p^2 + h^2 \end{aligned}$$

zusätzlich haben wir $c^2 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ \Leftrightarrow p^2 + q^2 + 2h^2 &= c^2 \\ \Leftrightarrow p^2 + q^2 + 2h^2 &= (p+q)^2 \\ \Leftrightarrow p^2 + q^2 + 2h^2 &= p^2 + q^2 + 2pq \end{aligned}$$

Also $2h^2 = 2pq$ und somit $h^2 = pq$. □

7.2 Seitenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck

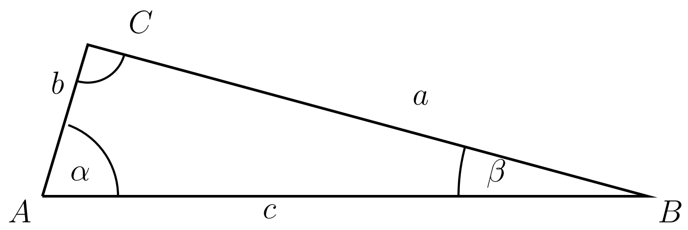


Abbildung 15: Rechtwinkliges Dreieck

Die dem Winkel α gegenüberliegende Seite a wird als **Gegenkathete** von α bezeichnet, die Seite b als **Ankathete**. Für den Winkel β ist b die Gegenkathete und a die Ankathete. Mit diesen Bezeichnungen lassen sich Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens wie folgt erklären:

$$\begin{aligned}
\text{Sinus von } \alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} & \text{bzw. } \sin\alpha &= \frac{a}{c};\\
\text{Kosinus von } \alpha &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} & \text{bzw. } \cos\alpha &= \frac{b}{c};\\
\text{Tangens von } \alpha &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} & \text{bzw. } \tan\alpha &= \frac{a}{b};\\
\text{Kotangens von } \alpha &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} & \text{bzw. } \cot\alpha &= \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Diese Verhältnisse hängen nur vom Winkel α ab. Mit $\beta = 90° - \alpha$ gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \frac{b}{c} &&= \sin(90° - \alpha) &&= \cos\alpha;\\
\cos\beta &= \frac{a}{c} &&= \cos(90° - \alpha) &&= \sin\alpha;\\
\tan\beta &= \frac{b}{a} &&= \tan(90° - \alpha) &&= \cot\alpha;\\
\cot\beta &= \frac{a}{b} &&= \cot(90° - \alpha) &&= \tan\alpha.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhält man:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1;\\
1 + \tan^2\alpha &= 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2+a^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha};\\
1 + \cot^2\alpha &= 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.
\end{aligned}$$

Einige Werte der Winkelfunktionen für spezielle Winkel:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$0 \mathrel{\hat{=}} 0°$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	0	nicht definiert
$\frac{\pi}{6} \mathrel{\hat{=}} 30°$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90°$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	nicht definiert	0

7.3 Sinus- und Kosinussatz

Die beiden folgenden Sätze ermöglichen es, Berechnungen an einem allgemeinen Dreieck (kein rechter Winkel mehr) durchzuführen ($\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$):

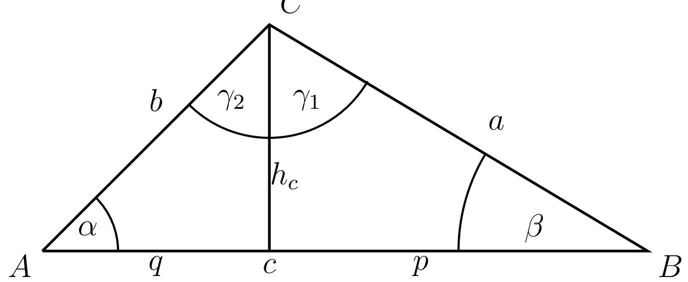


Abbildung 16: Allgemeines Dreieck

Satz 7.4 (Sinussatz) *Mit den Bezeichnungen des Bildes gilt:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Dieser Satz kann verwendet werden, wenn in einem Dreieck zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel (SSW) oder eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind (WSW).

Satz 7.5 (Kosinussatz) *Mit den Bezeichnungen des Bildes gilt:*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha; \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Dieser Satz kann verwendet werden, wenn in einem Dreieck drei Seiten (SSS) oder zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind (SWS).

7.4 Additionstheoreme

Es gibt eine Vielzahl von Beziehungen zwischen den trigonometrischen Formeln, von denen hier nur einige angegeben werden sollen.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Beweis: (nur für $\cos(x \pm y)$)
Ausgehend von Abbildung 16 setzen wir $\gamma_1 = x,\ \gamma_2 = y$ und somit $\gamma = x + y$.
Nach dem Kosinussatz gilt mit $a^2 = p^2 + h_c^2,\ \ b^2 = q^2 + h_c^2,\ \ c^2 = (p+q)^2$

$$\begin{aligned} 2ab\cos\gamma &= a^2 + b^2 - c^2 \\ &= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (p+q)^2 \\ &= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2pq - p^2 \\ &= 2h_c^2 - 2pq. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{h_c^2}{ab} - \frac{pq}{ab} \\ &= \frac{h_c}{a}\frac{h_c}{b} - \frac{q}{b}\frac{p}{a} \\ &= \cos\gamma_1\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1\sin\gamma_2. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Aufgrund von Symmetrie gilt:

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y. \end{aligned}$$

□

Weitere Beziehungen sind:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x;$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

Für weitere sei auf die Literatur verwiesen.

7.5 Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie:
   a) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$;
   b) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;
   c) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;
   d) $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$.

2. Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die folgenden Winkel:
   a) $\cos(15°)$;
   b) $\sin(15°)$;
   c) $\cos(75°)$;
   d) $\sin(75°)$;
   e) $\tan(15°)$;
   f) $\tan(75°)$.

3. Berechnen Sie die fehlenden Größen in den folgenden Dreiecken:
   a) $\Delta\ ABC$ mit $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 90°$.
   b) $\Delta\ ABC$ mit $b = 6$ cm, $\alpha = 30°$, $\gamma = 90°$.
   c) $\Delta\ ABC$ mit $b = 3$ cm, $c = 7$ cm, $\gamma = 90°$.
   d) $\Delta\ ABC$ mit $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm.
   e) $\Delta\ ABC$ mit $a = 5$ cm, $= 6$ cm, $\gamma = 50°$.

8 Komplexe Zahlen

Zu Grunde liegt Kapitel 5 der zweiten Auflage ([CDD06]).
Die komplexen Zahlen sind in Kapitel 2 schon einmal erwähnt worden. Nun sollen diese etwas genauer eingeführt werden, wobei auf die algebraischen Hintergründe verzichtet werden soll. Im Folgenden soll lediglich gezeigt werden, wie man mit komplexen Zahlen rechnet.
Schon sehr einfache quadratische Gleichungen wie

$$x^2 + 1 = 0$$

haben keine reelle Lösung mehr. Mit Hilfe der komplexen Zahlen läßt sich jedoch eine Lösung angeben:

$$x_1 = \sqrt{-1}, \quad x_2 = -\sqrt{-1}.$$

Für $\sqrt{-1}$ wählt man das Symbol i, und somit ist $i^2 = -1$.
i nennt man auch **imaginäre Einheit**.

Definition 8.1 *$z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißt **komplexe Zahl**.*
*$\bar{z} = a - bi$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.*
*Der **Betrag** von z ist definiert durch $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.*
*a heißt **Realteil** ($a = Re(z)$) und b **Imaginärteil** ($b = Im(z)$).*

Bemerkung 8.2 *Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn sie sowohl in Realteil als auch in Imaginärteil übereinstimmen:*

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \ \wedge \ b_1 = b_2.$$

8.1 Rechenoperationen mit komplexen Zahlen

Mit komplexen Zahlen rechnet man wie mit reellen Zahlen. Somit ergibt sich für die Addition zweier komplexer Zahlen:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Analog ergibt sich für die Subtraktion:

$$z_1 - z_2 = (a_2 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Für die Multiplikation gilt nach den üblichen Rechenregeln für reelle Zahlen:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \end{aligned}$$

Um den Quotient zweier komplexer Zahlen zu berechnen, erweitert man den Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}$$

und erhält so wieder eine komplexe Zahl z

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Beispiel 8.3 *Seien $z_1 = 2 - 3i$ und $z_2 = 3 + 2i$ zwei komplexe Zahlen.*

1. $\bar{z}_1 = 2 + 3i, \quad \bar{z}_2 = 3 - 2i;$
2. $|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}, \quad |z_2| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13};$
3. $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (3 + 2i) = (2 + 3) + (-3 + 2)i = 5 - i;$
4. $z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (3 + 2i) = (2 - 3) + (-3 - 2)i = -1 - 5i;$
5. $z_1 z_2 = (2 \cdot 3 - (-3) \cdot 2) + (2 \cdot 2 + (-3) \cdot 3)i = (6 + 6) + (4 - 9)i = 12 - 5i;$
6. $$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{3 + 2i} &= \frac{(2 - 3i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} \\ &= \frac{(2 \cdot 3 - (-3)(-2)) + (2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 3)i}{3^2 + 2^2} \\ &= \frac{(6 - 6) + (-4 - 9)i}{13} = \frac{-13}{13}\, i = -i. \end{aligned}$$

8.2 Die Gaußsche Zahlenebene

Man kann komplexe Zahlen in der Ebene veranschaulichen, der **Gaußschen Zahlenebene**. Dabei trägt man den Realteil von z auf der x-Achse und den Imaginärteil von z auf der y-Achse auf. Die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ geht dann durch Spiegelung an der x-Achse aus der Zahl z hervor (siehe Abb. 17). Addition und Subtraktion komplexer Zahlen lassen sich mittels Vektoraddition graphisch darstellen (siehe Abb. 18 und Abb. 19).

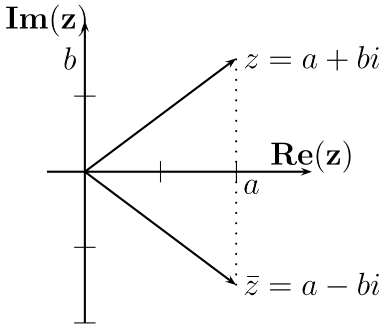


Abbildung 17: Komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

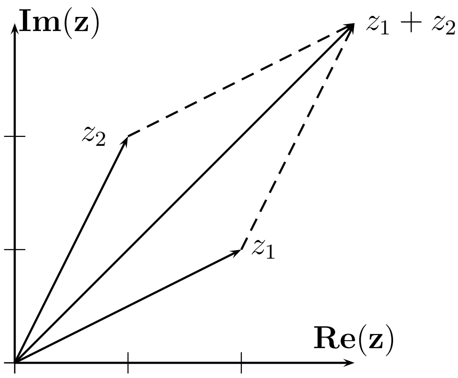


Abbildung 18: Addition komplexer Zahlen

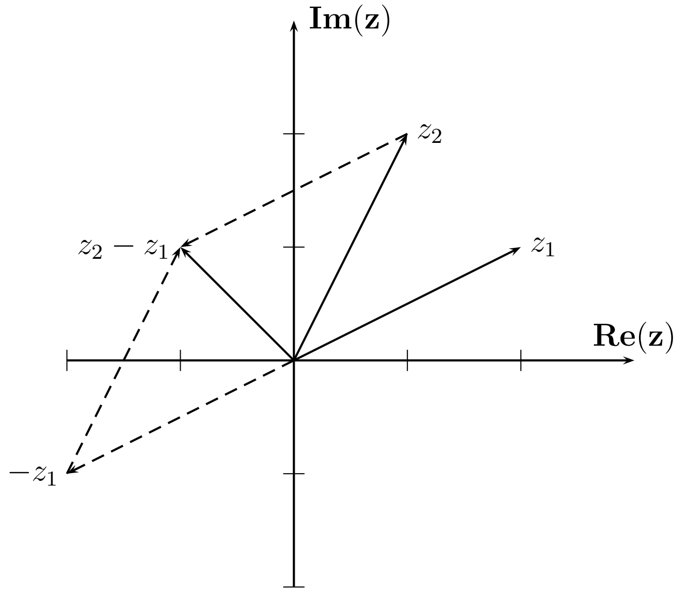


Abbildung 19: Subtraktion komplexer Zahlen

8.3 Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen

Ein Punkt P der Zahlenebene ist auch durch Angabe seiner **Polarkoordinaten**, also des Abstandes r vom Ursprung O und der Angabe des Winkels ϕ, den OP mit der positiven reellen Achse gegen den Uhrzeigersinn einschließt, eindeutig beschrieben.

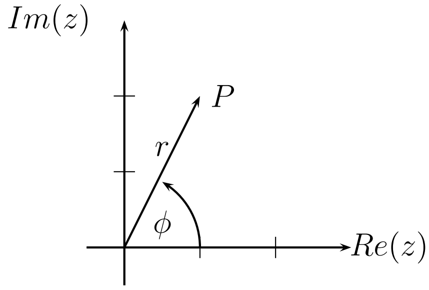


Abbildung 20: Darstellung mittels Polarkoordinaten

Ist $z = a + bi$ so gilt für r und ϕ:

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi &= \begin{cases} \arctan \frac{b}{a}, & a > 0 \\ \pi + \arctan \frac{b}{a}, & a < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0,\ b > 0 \\ \frac{3}{2}\pi, & a = 0,\ b < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

ϕ heißt auch **Argument** von z ($\phi = arg(z)$) und ist bis auf Vielfache von 2π eindeutig bestimmt.
Dies führt auf die sogenannte **Polarkoordinatendarstellung** der komplexen Zahlen:

$$z = a + bi = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}.$$

Mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung lässt sich die Multiplikation komplexer Zahlen in der Zahlenebene folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = (r_1 e^{i\phi_1})(r_2 e^{i\phi_2}) &= r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) r_2 (\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i(\sin(\phi_1 + \phi_2)) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}. \end{aligned}$$

Für den Beweis werden die trigonometrischen Additionstheoreme oder die Potenzgesetze benötigt.

8.4 Eigenschaften der komplexen Zahlen

Satz 8.4 *Seien $z,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

1.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2};$$

$$\overline{\overline{z}} = z;$$

$$z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R};$$

$$arg(\overline{z}) = -arg(z);$$

2.

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z});$$

$$Im(z) = \frac{-i}{2}(z - \overline{z});$$

3.

$$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z\overline{z}};$$

4.

$$Re(z) \leq |z|;$$

$$Im(z) \leq |z|;$$

5.

$$|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \quad \text{(Definitheit)};$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \quad \text{(Homogenität)};$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{(Dreiecksungleichung).}$$

Beweis: Bis auf die Dreiecksungleichung lassen sich alle Eigenschaften sehr leicht verifizieren. □

Folgerung 8.5 *Sei*

$$f(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0, \quad a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N},$$

ein komplexwertiges Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann gilt:

$$f(z_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\overline{z_0}) = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 0 = \overline{0} &= \overline{f(z_0)} \\ &= \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_0^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z_0^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0}^k \\ &= f(\overline{z_0}) \end{aligned}$$

□

In $\mathbb{C}$ gilt der sogenannte **Fundamentalsatz der Algebra**:

Satz 8.6 *Jedes komplexe Polynom der Form*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0,\ \ a_k \in \mathbb{C},\ \ k = 0, \ldots, n,\ \ n \in \mathbb{N},$$

hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle (und zerfällt damit völlig in Linearfaktoren).

Somit sind alle Gleichungen vom Typ

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0,\ \ a_k \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N},$$

lösbar.

8.5 Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie für $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2}$ und $z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\frac{i}{4}$

   a) $z_1 + z_2$;
   b) $\frac{z_1}{z_2}$;
   c) $|z_1|$;
   d) $|z_2|$;

e) $\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;

f) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$.

2. Bringen Sie die folgenden Ausdrücke auf die Form $x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$:

   a) $i^7 + i^8 + i^9 + i^{10}$;

   b) $\frac{i}{1+i}$;

   c) $\frac{1}{-i} + \frac{3}{1-i}$;

   d) $\left(\frac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}\right)^2$;

   e) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i}$;

   f) $\dfrac{3a+4bi}{4a-3bi} + \dfrac{4a-3bi}{4a+3bi}$.

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

   a) $x^2 + (3-2i)x + 3(1-i) = 0$;

   b) $x^2 + (1+i)x - 2(1-i) = 0$.

   Hinweis: $2 - \dfrac{3}{2}i = \left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^2$.

Beweisen Sie für $z \in \mathbb{C}$ mit $|Re(z)| < 1$ die Ungleichung

$$\left|\frac{z}{1-z^2}\right| \le \frac{|z|}{1-(Re(z))^2}.$$

4. Bestimmen Sie die Teilmengen von $\mathbb{C}$, die durch die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen charakterisiert werden, und skizzieren Sie diese:

   a) $|z-2| = |z+2|$;

   b) $|z-1| \ge |z+1|$;

   c) $|z-1| \le |z+2|$;

   d) $Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \ge 3,\ z \ne 1$.

9 Differentialrechnung

Basierend auf [SG94].

9.1 Der Differentialquotient

Definition 9.1 *f sei eine an der Stelle x_0 und einer Umgebung dieser Stelle definierte Funktion. x sei eine beliebige Stelle dieser Umgebung mit $x \neq x_0$. Dann existiert der **Differenzenquotient**:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

mit $h = \Delta x$.

Graphisch ist der Differenzenquotient der Anstieg der Sekante.

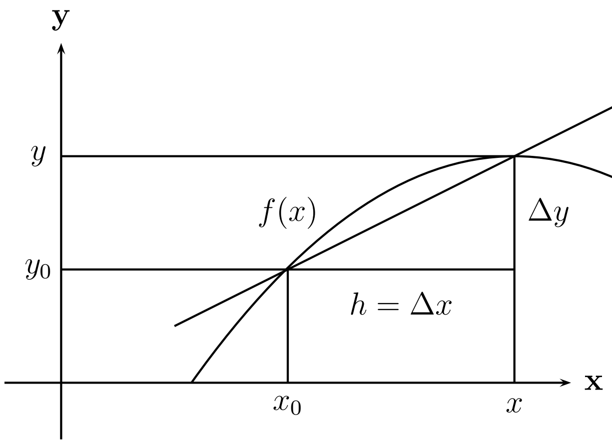


Abbildung 21: Graphische Darstellung des Differenzenquotienten

Hat dieser Differenzenquotient für $x \to x_0$ bzw. für $h \to 0$ einen Grenzwert, so heißt die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar. Man schreibt:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Dieser Grenzwert wird auch als **Differentialquotient** oder **Ableitung** der Funktion an der Stelle x_0 bezeichnet. Graphisch ist die Ableitung die Tangente der Kurve im Punkt (x_0, y_0).

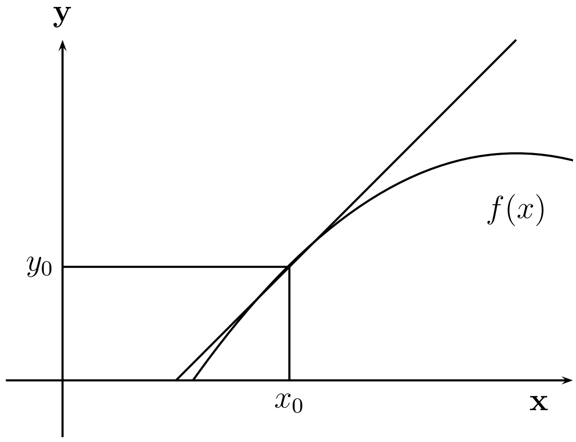


Abbildung 22: Graphische Darstellung des Differentialquotienten

9.2 Differentiationsregeln

Satz 9.2 *Multiplikation mit einer Konstanten*
Ist f an der Stelle x differenzierbar, so ist es auch cf und es gilt:

$$(cf(x))' = cf'(x).$$

Beweis

$$(cf(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x).$$

□

Satz 9.3 (Summenregel)
Sind f_1 und f_2 an der Stelle x differenzierbar, dann sind auch die Summe

$$f_1(x) + f_2(x)$$

und die Differenz

$$f_1(x) - f_2(x)$$

an der Stelle x differenzierbar, und es gilt:

$$(f_1(x) + f_2(x))' = f_1'(x) + f_2'(x);$$

$$(f_1(x) - f_2(x))' = f_1'(x) - f_2'(x).$$

Satz 9.4 (Produktregel) *Sind f_1 und f_2 an der Stelle x differenzierbar, so ist auch das Produkt $f_1 f_2$ an der Stelle x differenzierbar, und es gilt:*

$$(f_1(x)f_2(x))' = f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x).$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \quad & \frac{f_1(x+h)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x+h) + f_1(x)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f_1(x+h)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x+h)}{h} + \frac{f_1(x)f_2(x+h) - f_1(x)f_2(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f_2(x+h)(f_1(x+h) - f_1(x))}{h} + \frac{f_1(x)(f_2(x+h) - f_2(x))}{h} \right) \\
&= f_1'(x)f_2(x) + f_1(x)f_2'(x).
\end{aligned}$$

□

Satz 9.5 (Quotientenregel) *Sind f_1 und f_2 an der Stelle x differenzierbar mit $f_2(x) \neq 0$, dann ist auch der Quotient $\frac{f_1}{f_2}$ an der Stelle x differenzierbar, und es gilt:*

$$\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{(f_2(x))^2}.$$

Satz 9.6 (Kettenregel) *Ist die Funktion g in x und die Funktion f in $z = g(x)$ differenzierbar, dann ist auch $f(z) = f(g(x))$ in x differenzierbar, und es gilt:*

$$f'(z) = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x).$$

In der folgenden Tabelle sind Ableitungen einiger wichtiger Funktionen zusammengefaßt.

$f(x)$	$f'(x)$	Voraussetzungen
$c = konst$	0	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z},\ x \neq 0$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R},\ x > 0$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n \in \mathbb{N},\ x > 0$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$a > 0,\ a \neq 1$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

9.3 Extremwerte und Wendepunkte

Definition 9.7 *Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f hat dort ein lokales Maximum, wenn für alle hinreichend nahe bei x_0 liegenden x gilt:*

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Gilt in einer Umgebung von x_0

$$f(x) \geq f(x_0),$$

so hat die Funktion dort ein lokales Minimum.

Definition 9.8 *Eine in einer Umgebung von x_0 differenzierbare Funktion f hat dort einen links-rechts Wendepunkt, wenn ihre Ableitung dort ein lokales Maximum hat. Hat* *die Funktion dort ein lokales Minimum, hat die Funktion dort einen rechts-links Wendepunkt.*

Satz 9.9 (Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum) *Hat eine in x_0 differenzierbare Funktion f dort ein lokales Extremum, so gilt:*

$$f'(x_0) = 0.$$

Die notwendige Bedingung reicht jedoch nicht aus, um die Lage eines Extremums zu bestimmen.
Z.B. gilt für $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$: $f'(0) = 0$. Dort liegt jedoch kein Extremum vor (vgl. Abb. 23).

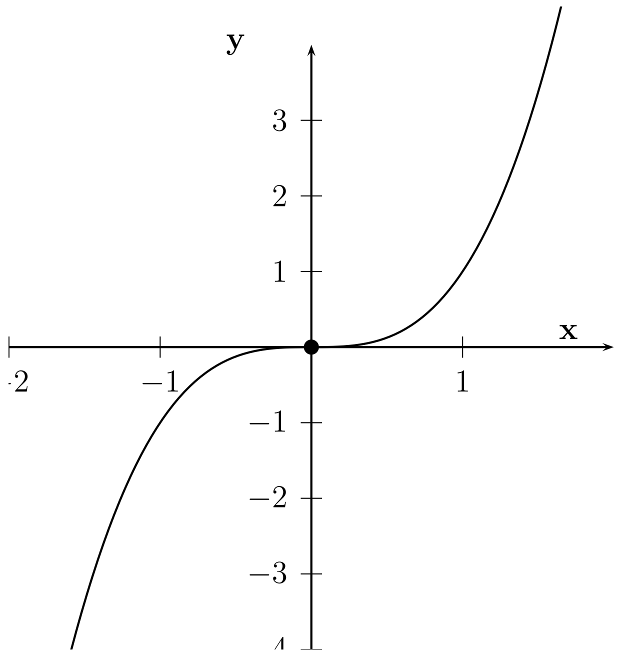


Abbildung 23: $f(x) = x^3$

Dies führt zur hinreichenden Bedingung für Extrema.

Satz 9.10 (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum) *Gilt für eine in x_0 zweimal differenzierbare Funktion f*

$$f'(x_0) = 0, \; f''(x_0) \neq 0,$$

so hat sie in x_0 ein Extremum.
Ist

$$f''(x_0) < 0,$$

*liegt ein **Maximum** an der Stelle x_0 vor, ist*

$$f''(x_0) > 0,$$

*liegt ein **Minimum** an der Stelle x_0 vor.*

Analog kann man für Wendepunkte ein notwendiges und hinreichendes Kriterium zur Existenz von Wendepunkten einführen.

Satz 9.11 (Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt) *Hat eine in x_0 zweimal differenzierbare Funktion f einen Wendepunkt in x_0 so gilt:*

$$f''(x_0) = 0.$$

Auch hier reicht die notwendige Bedingung nicht aus, um etwas über die Existenz von Wendepunkten zu sagen.
Z.B. gilt für $f(x) = x^4$ in $x_0 = 0$: $f''(0) = 0$. In $x_0 = 0$ liegt jedoch kein Wendepunkt vor, sondern ein Minimum (vgl Abb. 24).

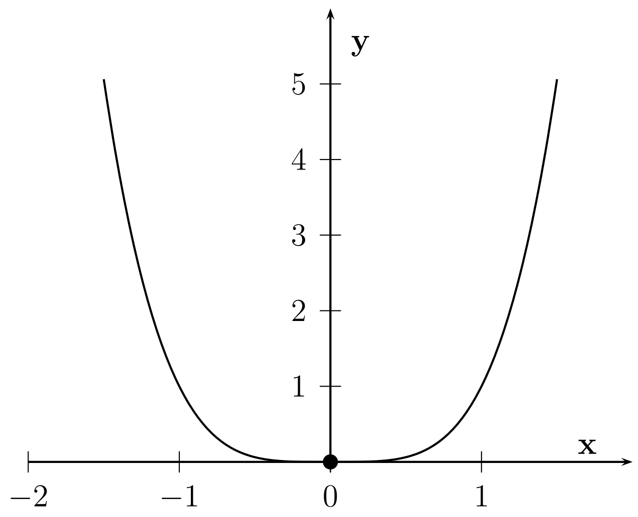


Abbildung 24: $f(x) = x^4$

Dies führt wieder zur hinreichenden Bedingung für Wendepunkte:

Satz 9.12 (Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt) *Gilt für eine in x_0 dreimal differenzierbare Funktion f*

$$f''(x_0) = 0, \; f'''(x_0) \neq 0,$$

so hat sie in x_0 einen Wendepunkt.

Bemerkung 9.13 *Liegt in einem Wendepunkt zugleich eine waagerechte Tangente, spricht man von einem Sattelpunkt (z.B. für $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$ vgl. Abb. 23). Notwendige Bedingung für einen Sattelpunkt:*

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0.$$

Hinreichende Bedingung für einen Sattelpunkt:

$$f'''(x_0) \neq 0.$$

Extrema und Wendepunkte sind Bestandteil für eine Kurvendiskussion mit Hilfe derer man den Graphen einer Funktion ohne Anlegen einer Wertetabelle skizzieren kann.

9.4 Kurvendiskussion

Hier soll zunächst einmal eine Kurvensdiskussion für ganzrationale Funktionen betrachtet werden. Dazu werden die folgenden Punkte abgearbeitet.

- Liegt Symmetrie vor?
- Bestimmen der Nullstellen.
- Berechnen der Extrema.
- Berechnen der Wendepunkte und evtl. der Sattelpunkte.
- Das Verhalten der Funktion im Unendlichen, also

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Beispiel 9.14 *Gegeben sei $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8$.*

- *Untersuchen auf Symmetrie: Berechnung von $f(-x)$.*

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^3 - 5(-x)^2 + 8 \\ &= -3x^3 - 5x^2 + 8 \end{aligned}$$

  $\Rightarrow \quad f(x) \neq f(-x) \ \Rightarrow$ *keine Achssensymmetrie;*
  $-f(-x) = 3x^3 + 5x^2 - 8 \neq f(x) \ \Rightarrow$ *keine Punktsymmetrie.*

- *Berechnung der Nullstellen:*
  $3x^3 - 5x^2 + 8 = 0$. *Es ergibt sich $x_1 = -1$. Mittels Polynomdivision erhält man*

$$3x^3 - 5x^2 + 8 = (x + 1)(3x^2 - 8x + 8).$$

  Die $p - q-$Formel liefert, daß keine weiteren reellen Nullstellen existieren.

- *Berechnung der Extrema:*
  $f'(x) = 9x^2 - 10x$. *Nullsetzen ergibt:*
  $$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 9x^2 - 10x = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x(9x - 10) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 0 \ \vee \ x = \frac{10}{9} \end{aligned}$$
  Damit ergeben sich die Nullstellen von f' *zu* $x_2 = 0, \ x_3 = \frac{10}{9}$.
  Zu überprüfen ist nun noch die hinreichende Bedingung für Extrema:
  $f''(x) = 18x - 10$. *Einsetzen von* x_2 *und* x_3 *liefert:*
  $$f''(0) = -10 < 0.$$
  Also liegt für $x_2 = 0$ *ein Maximum vor. Für dieses ergeben sich die Koordinaten* $(0, f(0)) = (0, 8)$.
  $$f''\left(\frac{10}{9}\right) = 18\frac{10}{9} - 10 = 10 > 0.$$
  Also liegt für $x_3 = \frac{10}{9}$ *ein Minimum vor. Für dieses ergeben sich die Koordinaten* $\left(\frac{10}{9}, f\left(\frac{10}{9}\right)\right) = \left(\frac{10}{9}, \frac{1444}{243}\right) \approx (1.11; 5.94)$
- *Berechnen der Wendepunkte:*
  $f''(x) = 18x - 10 = 0$. *Es ergibt sich* $x_4 = \frac{5}{9}$.
  Zu überprüfen ist noch die hinreichende Bedingung für Wendepunkte $f'''(x) \neq 0$.
  $f'''(x) = 18 > 0 \ \forall x$. *Somit liegt bei* $\left(\frac{5}{9}, \frac{1694}{243}\right)$ *ein Wendepunkt.*
- *Das Verhalten der Funktion im Unendlichen:*
  $$\lim_{x \to -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 8) = -\infty;$$
  $$\lim_{x \to \infty} (3x^3 - 5x^2 + 8) = \infty.$$

Nachdem diese Punkte abgearbeitet wurden, ist man in der Lage den Verlauf des Graphen der Funktion anzugeben.

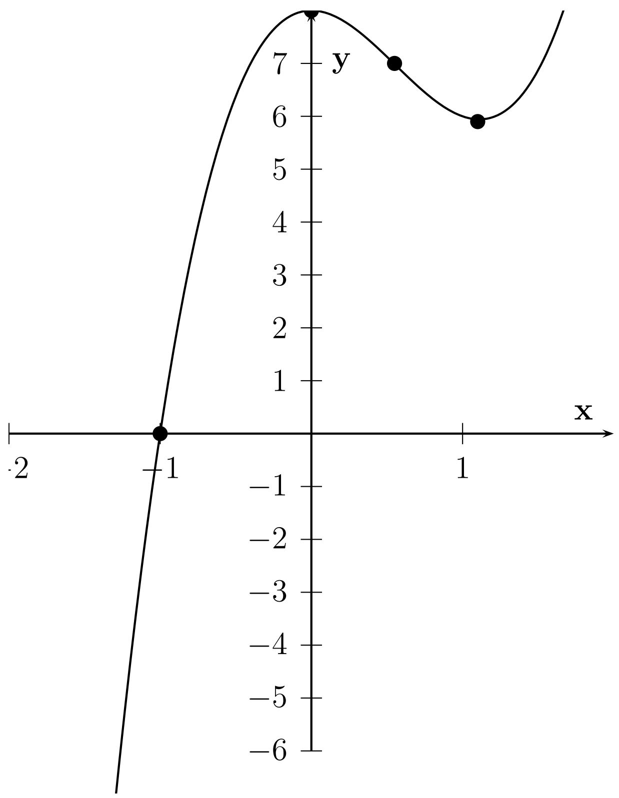


Abbildung 25: Graph der Funktion $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8$

Bei gebrochenrationalen Funktionen muß der Definitionsbereich eingeschränkt werden (Nenner $\neq 0$), und zusätzlich die Funktion auf Polstellen untersucht werden.

Satz 9.15 *Sei* $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *eine gebrochenrationale Funktion. Es liegt eine* ***Polstelle*** *in* x_0 *vor, wenn* $q(x_0) = 0$ *(notwendige Bedingung) und* $p(x_0) \neq 0$ *(hinreichende Bedingung).*

An der Polstelle existiert dann eine Asymptote, deren Gleichung man mittels Polynomdivision aus f ausrechnen kann.

Beispiel 9.16 *Gegeben sei* $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{4x^2 - 8x + 4}$.

- *Definitionsbereich:*

  Dazu muß die Nullstelle des Nenners gesucht werden:

$$4x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Anwendung der $p-q-$Formel liefert: $x_{1,2} = 1$. *Damit ergibt sich*

$$D = \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

Der Nenner zerfällt somit in Linearfaktoren

$$4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2.$$

- *Berechnung der Nullstellen:*

  Hier genügt es die Nullstellen des Zählers zu berechnen und zu überprüfen, ob diese Elemente des Definitionsbereiches sind.

  $$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 4x + 4) = 0.$$

  Anwenden der $p-q-$Formel liefert neben $x_1 = 0$

  $$x_2 = 2 + \sqrt{4-4} = 2, \quad x_3 = 2 - \sqrt{4-4} = 2 = x_2.$$

  Beide Nullstellen liegen in D und somit hat f die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$.

  Der Zähler zerfällt somit ebenfalls in Linearfaktoren:

  $$x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2.$$

- *Berechnung der Extrema:*

  $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4}\frac{((x-2)^2 + 2x(x-2))(x-1)^2 - x(x-2)^2 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{(2x(x-2) + (x-2)^2)(x-1) - 2x(x-2)^2}{4(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-2)(((2x + (x-2))(x-1) - 2x(x-2))}{4(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-2)((3x-2)(x-1) - 2x(x-2))}{4(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-2)(3x^2 - 3x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{4(x-1)^3} \\ &= \frac{(x-2)(x^2 - x + 2)}{4(x-1)^3} \end{aligned}$$

  Nullsetzen des Zählers liefert:

  $$(x-2)(x^2 - x + 2) = 0.$$

Die quadratische Gleichung hat keine reellen Nullstellen. Somit ergibt sich für eine mögliche Extremstelle $x = 2$.

Zur Überprüfung der hinreichenden Bedingung muß zunächst die zweite Ableitung bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{((x-2)(2x-1)+(x^2-x+2))(x-1)^3-(x-2)(x^2-x+2)3(x-1)^2}{4(x-1)^6} \\
&= \frac{((x-2)(2x-1)+(x^2-x+2))(x-1)-3(x-2)(x^2-x+2)}{4(x-1)^4} \\
&= \frac{2x^3-x^2-4x^2+2x-2x^2+x+4x-2+x^3-x^2}{4(x-1)^4}+ \\
&\quad + \frac{-x^2+x+2x-2-3x^3+3x^2-6x+6x^2-6x+12}{4(x-1)^4} \\
&= \frac{-2x+8}{4(x-1)^4} \\
&= -\frac{(x-4)}{2(x-1)^4}
\end{aligned}
$$

Einsetzen von $x = 2$ liefert:

$$f''(2) = -\frac{2-4}{2(2-1)^4} = -\frac{-2}{2} = 1 > 0$$

Also liegt an der Stelle $x = 2$ ein Minimum mit den Koordinaten $(2, 0)$ vor.

- *Berechnung der Wendepunkte*

  Es muß $f''(x) = 0$ gelten, also:

  $4 - x = 0$, *d.h. ein möglicher Wendepunkt liegt bei $x = 4$.*

  Zur Überprüfung der hinreichenden Bedingung muß zunächst die dritte Ableitung hergeleitet werden:

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= \frac{1}{2}\,\frac{-(x-1)^4-(4-x)4(x-1)^3}{(x-1)^8} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{-(x-1)-4(4-x)}{(x-1)^5} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{-x+1-16+4x}{(x-1)^5} = \frac{3x-15}{2(x-1)^5};
\end{aligned}
$$

$$f'''(4) = \frac{3\cdot 4-15}{2(4-1)^5} = \frac{-3}{486} < 0.$$

Somit liegt bei $\left(4, \frac{4}{9}\right)$ ein Wendepunkt.

- *Das Verhalten der Funktion im Unendlichen:*
  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *und* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
- *Untersuchen auf Symmetrie: Berechnung von* $f(-x)$.
  $$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^3 - 4(-x)^2 + 4(-x)}{4(-x)^2 - 8(-x) + 4} \\ &= \frac{-x^3 - 4x^2 - 4}{4x^2 + 8x + 4}. \end{aligned}$$
  $\Rightarrow\ f(x) \neq f(-x)\ \Rightarrow$ *keine Achsensymmetrie.*
  $-f(-x) = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 4}{4x^2 + 8x + 4} \neq f(x)\ \Rightarrow$ *keine Punktsymmetrie.*
- *Asymptoten:*
  Mittels Polynomdivision ergibt sich:
  $$(x^3 - 4x^2 + 4x) : (4x^2 - 8x + 4) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{-x + 2}{4x^2 - 8x + 4}$$
  Der letzte Summand geht für $x \to \pm\infty$ *gegen* 0 *und somit ist*
  $$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$
  die Asymptote von f.

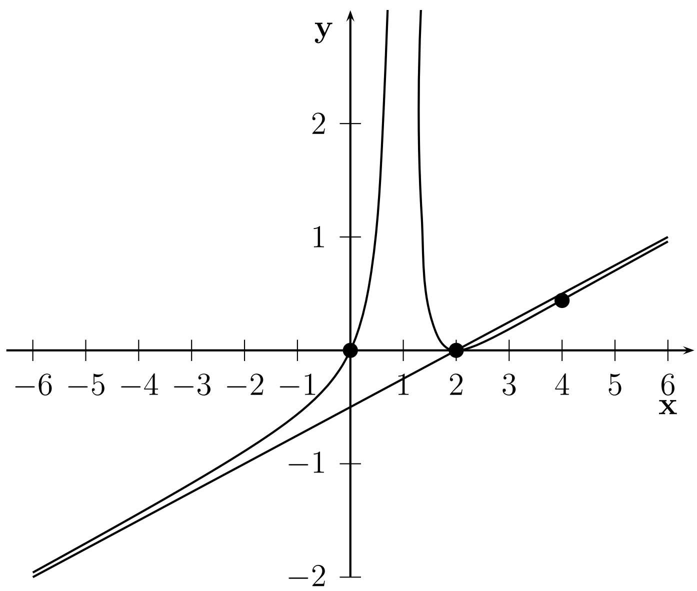


Abbildung 26: $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{4x^2 - 8x + 4}$

9.5 Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie die Summenregel.

2. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:
   a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5;$
   b) $f(x) = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4;$
   c) $f(x) = y^2x^3 - \sqrt{a}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1.$

3. Führen Sie eine Kurvendiskussion für folgende Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ durch:
   a) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9,\ x \in D;$
   b) $f(x) = x^2(x^2 - 1)^2,\ x \in D;$
   c) $f(x) = xe^x,\ x \in D;$
   d) $f(x) = \frac{3x-1}{2x+1},\ x \in D;$
   e) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x},\ x \in D;$
   f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1},\ x \in D.$

4. Bestimmen Sie die Koeffizienten des Polynoms

$$p(x) := ax^2 + bx + c,$$

   so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
   i) Das Polynom p besitzt eine Nullstelle für $x = 1$.
   ii) Die Tangente im Punkt $(2, p(2))$ ist parallel zu der Geraden $y + 2x = 2$.
   iii) Die Tangente im Punkt $(-1, p(-1))$ steht senkrecht auf der Geraden $y - x = 5$.
   Hinweis:
   Zwei Geraden stehen senkrecht auf einander, wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ist.

10 Integralrechnung

Basierend auf [SG94].

10.1 Definitionen

Gesucht sei die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f $(f(x) \geq 0)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

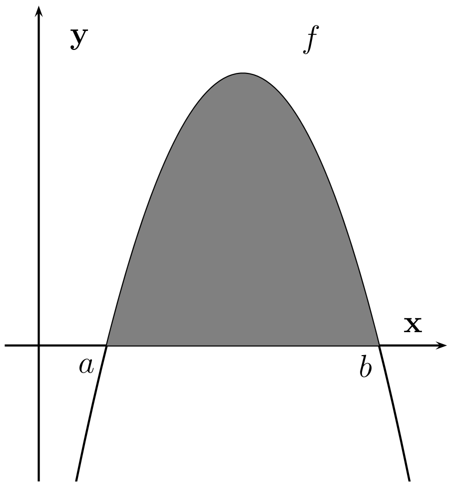


Abbildung 27: Graphische Darstellung der gesuchten Fläche

Dazu teilt man das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

Man wählt einen Punkt $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig.
Eine Näherung für die Fläche, die von f und dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ eingeschlossen wird, ist dann:

$$\Delta F_i = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

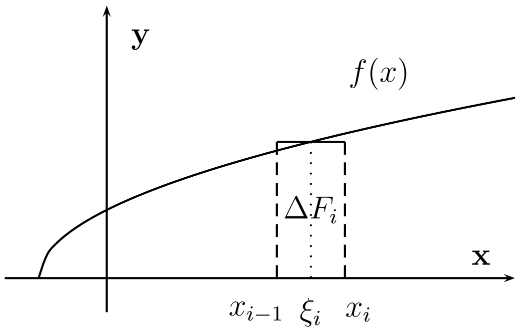


Abbildung 28: Schematische Darstellung der näherungsweisen Flächenberechnung

Durch Summation über alle Teilintervalle erhält man:

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Definition 10.1

$$F = \int\limits_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

heißt, falls der Grenzwert für jede Zerlegung existiert, ***bestimmtes Integral*** *von f über $[a, b]$. Dabei heißt f* ***Integrand****, x* ***Integrationsvariable****, a untere, b obere* ***Integrationsgrenze*** *und $[a, b]$* ***Integrationsintervall****.*

Bemerkung 10.2 *Die Integrationsvariable kann beliebig bezeichnet werden:*

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^b f(u)\ du = \int\limits_a^b f(w)\ dw.$$

Satz 10.3 *Ist f über das Intervall $[a, b]$ integrierbar, und $c \in [a, b]$, dann gilt:*

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_a^c f(x)\ dx + \int\limits_c^b f(x)\ dx.$$

Definition 10.4 *Ist f über das Intervall $[a, b]$ intergrierbar, so gilt:*

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = -\int\limits_b^a f(x)\ dx.$$

Definition 10.5 *Sei f in einem offenen Intervall (a,b) definiert. Jede dort existierende differenzierbare Funktion F die der Bedingung*

$$F'(x) = f(x),\ x \in (a,b),$$

genügt, heißt Stammfunktion von f.

Zu einer gegebenen Funktion f existiert nicht nur eine Stammfunktion, so sind z.B. $F_1(x) = x^3,\ F_2(x) = x^3 + 1,\ F_3(x) = x^3 + 2,\ \ldots$ allgemein $F_C(x) = x^3 + C$ Stammfunktionen zu $f(x) = 3x^2$.

Satz 10.6 *f sei in einem offenen Intervall I stetig. Dann ist für $a \in I$*

$$F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\ dt$$

eine Stammfunktion von f für $x \in I$. Jede weitere Stammfunktion von f hat die Form:

$$F(x) = F_a(x) + C.$$

Bezeichung 10.7 *$F(x) = \int f(x)\ dx$ heißt **unbestimmtes Integral**.*

Satz 10.8 *Berechnung des bestimmten Integrals:*
f sei im Intervall I stetig, und F sei Stammfunktion von f. Dann gilt für $a, b \in I$

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

10.2 Einige Stammfunktionen

In der folgenden Tabelle sind einige wichtige Stammfunktionen zusammengestellt:

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\ dx$	Voraussetzungen
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$x \neq 0$
a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
e^x	$e^x + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C_1 = -\text{arccot}\ x + C_2$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$	$\|x\| < 1$

10.3 Integrationsregeln

Bei den folgenden Integrationsregeln für unbestimmte Integrale werden die Integrationskonstanten weggelassen.

Satz 10.9 (Multiplikation mit einer Konstanten)
Sei f in einem Intervall stetig, dann gilt dort:

$$\int af(x)\ dx = a\int f(x)\ dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Satz 10.10 (Summenregel)
Seien f_1 und f_2 in einem Intervall stetig, dann gilt dort:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\ dx = \int f_1(x)\ dx + \int f_2(x)\ dx.$$

Satz 10.11 *Substitutionsregel*
Sei $u = g(x)$ stetig differenzierbar und $y = f(u)$ stetig, dann gilt:

$$\int\limits_a^z f(g(x))g'(x)\ dx = \int\limits_{g(a)}^{g(z)} f(u)\ du = F(g(z)) - F(g(a)).$$

Beispiel 10.12

1. $I = \int\limits_0^\pi 2 \cdot \cos(2x - \pi)\ dx$

   Substitution: $2x - \pi = u$, *Ableitung:* $\frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow 2\ dx = du$

   Für die Grenzen gilt: $g(a) = g(0) = -\pi,\ g(b) = g(\pi) = \pi$.

$$I = \int\limits_0^\pi 2 \cdot \cos(2x - \pi)\ dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos u\ du = \sin u\Big|_{-\pi}^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(-\pi) = 0$$

2. $I = \int\limits_0^{\pi/2} 3\cos(2x - \pi)\ dx$

   Substitution: $2x - \pi = u$, *Ableitung:* $\frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$.

   Für die Grenzen gilt: $g(a) = g(0) = -\pi,\ g(b) = g(\pi/2) = 0$.

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} 3\cos(2x - \pi)\ dx = \frac{3}{2}\int\limits_{-\pi}^{0} \cos u\ du = \frac{3}{2}\sin u\Big|_{-\pi}^{0} = 0$$

3. $I = \int\limits_0^1 \sqrt{-3x + 5}\ dx$

   Substitution: $-3x + 5 = u$, *Ableitung:* $\frac{du}{dx} = -3 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{3}\ du$.

   Für die Grenzen gilt: $g(a) = g(0) = 5,\ g(b) = g(1) = 2$

$$I = -\frac{1}{3}\int\limits_5^2 u^{\frac{1}{2}}\ du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_5^2 = -\frac{2}{9}2^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}5^{\frac{3}{2}}$$

4. $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x-3}\ dx$

   Substitution: $-2x - 3 = u$, *Ableitung:* $\frac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2}\ du$.

   Für die Grenzen gilt: $g(a) = g(0) = -3,\ g(b) = g(1) = -5$.

$$I = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x-3}\ dx = -\frac{1}{4}\int\limits_{-3}^{-5} e^u\ du = -\frac{1}{4}e^u\Big|_{-3}^{-5} = -\frac{1}{4}e^{-5} - \frac{1}{4}e^{-3}$$

Ist eine Funktion nicht linear, muß der zweite Faktor des Integranden bis auf ein Konstante die Ableitung der Funktion des ersten Faktors sein.

Beispiel 10.13

1. $I = \int 4x\sqrt{x^2-1}\ dx$

   Substitution: $x^2 - 1 = u$, *Ableitung:* $\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow x\ dx = \frac{1}{2}\ du$

   $$I = \int 4x\sqrt{x^2-1}\ dx = 2\int u^{\frac{1}{2}}\ du = 2 \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

2. $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x\ dx$

   Substitution: $\sin x = u$, *Ableitung:* $\frac{du}{dx} = \cos x \Leftrightarrow \cos x\ dx = du$

   $$I = \int \sin^3 x \cdot \cos x\ dx = \int u^3\ du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

3. $I = \int\limits_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3}\ dx$

   Substitution: $2 - x^3 = u$, *Ableitung:* $\frac{du}{dx} = -3x^2 \Leftrightarrow x^2\ dx = -\frac{1}{3}\ du$

   $$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3}\ dx = -\frac{1}{3}\int\limits_2^1 \frac{2\ du}{u} = -\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_2^1 = -\frac{2}{3}\ln|2-x^3|\Big|_0^1 \\ &= -\frac{2}{3}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3}\ln 2 \end{aligned}$$

Satz 10.14 (Partielle Integration) *Seien u und v in einem Intervall $I = (a, b)$ stetig differenzierbar, dann gilt dort:*

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)\ dx.$$

Beweis: Die Ableitung der rechten Seite

$$\left(u(x)v(x) - \int\limits_I u'(x)v(x)\ dx\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) = u(x)v'(x)$$

stimmt mit der Ableitung der linken Seite $u(x) \cdot v'(x)$ überein. $\square$

Beispiel 10.15

1. $I = \int x \cos x \; dx$

   Setze $u = x,\; v' = \cos x,$ *dann gilt:* $u' = 1,\; v = \sin x.$

   $$I = \int x \cos x \; dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \; dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

2. $I = \int x^2 \cdot e^x \; dx$ *Setze* $u = x^2,\; v' = e^x,$ *dann gilt:* $u' = 2x,\; v = e^x.$

   $$I = \int x^2 \cdot e^x \; dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x \; dx$$

   Hier muß eine weitere partielle Integration für das verbleibende Integral durchgeführt werden.

   Setze $u = x,\; v' = e^x,$ *dann gilt:* $u' = 1,\; v = e^x.$

   $$I = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x \; dx = x^2 \cdot e^x - 2 \left(xe^x - \int 1e^x \; dx \right) = x^2 \cdot e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

3. $I = \int \ln x \; dx$

   Setze $u = \ln x,\; v = 1,$ *dann gilt:* $u' = \dfrac{1}{x},\; v = x.$

   $$I = \int \ln x \; dx = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \; dx = x \cdot \ln x - x + C$$

10.4 Übungsaufgaben

Berechnen Sie die folgenden Integrale

1. $\int (x^3 - 5x^2 + 7x - 2) \; dx;$
2. $\int \dfrac{2}{x^3} \; dx;$
3. $\int \dfrac{1}{3} \sqrt[3]{x} \; dx;$
4. $\int 4x^3 \cdot \ln x \; dx;$
5. $\int \cos^2 x \; dx;$
6. $\int x \cdot (\cos x + 1) \; dx;$
7. $\int \sqrt[3]{2x - 7} \; dx;$

8. $\int x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 7}\ dx$;

9. $\int \dfrac{3x}{-x^2 + 1}\ dx$;

10. $\int x \cdot e^{2x^2+3}\ dx$.

11. Der Graph der Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 4)^2$ schließt mit der $x-$Achse eine Fläche ein. Dieser Fläche können Dreiecke einbeschrieben werden, die gleichschenklig und symmetrisch zur $y-$Achse sind und deren Spitzen im Ursprung des Koordinatensystems liegen. Läßt man diese Dreiecke um die $y-$Achse rotieren, so entstehen Kegel. Gesucht ist der Kegel mit dem maximalen Volumen.
    a) Fertigen Sie eine Zeichnung an, die den Sachverhalt wiedergibt.
    b) Zeigen Sie, daß für das Volumen V des Kegels

    $$V(r) = \frac{1}{3}\pi(r^3 - 4r)^2$$

    gilt.
    c) Bestimmen Sie mit Hilfe von $V(r)$ den Radius r und die Höhe h des Kegels mit dem maximalen Volumen sowie das maximale Volumen $V_{\max}$.

11 Lineare Gleichungssysteme

Zu Grunde liegt Kapitel 6 der zweiten Auflage ([CDD06]). Ergänzungen basieren auf [SG94].
Zunächst einmal werden lineare Gleichungssysteme und aus der Schule bekannte Verfahren zu deren Lösung vorgestellt. Im Weiteren soll die Betrachtung auf beliebig viele Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten ausgedehnt werden.
Zunächst einmal ein Beispiel zu einer Gleichung mit einer Unbekannten:

Beispiel 11.1 *Gegeben sei $2x = 6$.*
Zur Lösung dieser Gleichung muß sowohl die Existenz der Lösung als auch deren Eindeutigkeit überprüft werden. Zunächst zur Eindeutigkeit der Lösung. Dafür nehmen wir an, das eine Lösung x existiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2x &= 6 \quad |:2 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 3. \end{aligned}$$

Dadurch, das bei der Rechnung nur eine Lösung auftritt, ist die Eindeutigkeit gezeigt.
Zur Existenz der Lösung bestätigen man nun durch Einsetzen, dass 3 tatsächlich eine Lösung ist.

Bei einer Gleichung mit zwei Unbekannten läßt sich die Lösungsmenge als Geradengleichung angeben. Auch für diesen Fall soll nur ein allgemeines Beispiel angegeben werden:

Beispiel 11.2 *Gegeben sei $ax + by = c$. Dabei sollen $a, b \neq 0$ angenommen werden. Für $a = 0$ oder $b = 0$ ergeben sich Geraden parallel zur y- bzw x-Achse.*
Da $b \neq 0$ angenommen wird, läßt sich $ax + by = c$ umformen zu $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Es ergibt sich als Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b},\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

11.1 Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

Gleichungen mit zwei Unbekannten können als Funktionsgleichungen für Geraden angesehen werden. Dementsprechend können verschiedene Lösungsmengen auftreten:

- Das Gleichungssystem hat keine Lösung: Die Geraden sind parallel.
- Das Gleichungssystem hat eine Lösung: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt.
- Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen: Die Geraden sind identisch.

Zur formalen Lösung eines solchen Gleichungssystems sollen nun verschiedene Verfahren vorgestellt und anhand eines Beispieles vertieft werden.

1. **Gleichsetzungsverfahren:**

   Man löst beide Gleichungen nach der gleichen Unbekannten (z.B. x_1) auf und setzt sie gleich. Dabei erhält man eine Gleichung mit einer Unbekannten (z.B. x_2) die man wieder elementar lösen kann. Einsetzen von x_2 in eine Ausgangsgleichung liefert x_1.

   Beispiel 11.3 *Gegeben ist das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ \wedge\ \ x_1 - 2x_2 &= -5. \end{aligned}$$

   Auflösen nach x_1 liefert:

$$x_1 = 2 - \frac{3}{2}x_2 \quad \wedge \quad x_1 = 2x_2 - 5.$$

   Gleichsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} 2 - \frac{3}{2}x_2 &= 2x_2 - 5 \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{7}{2}x_2 &= -7 \\ \Leftrightarrow \quad x_2 &= 2 \end{aligned}$$

   Einsetzen von x_2 liefert:

$$x_1 = 2 - \frac{3}{2} \cdot 2 = -1$$

   Somit gilt:

$$\mathbb{L} = \{(-1, 2)\}.$$

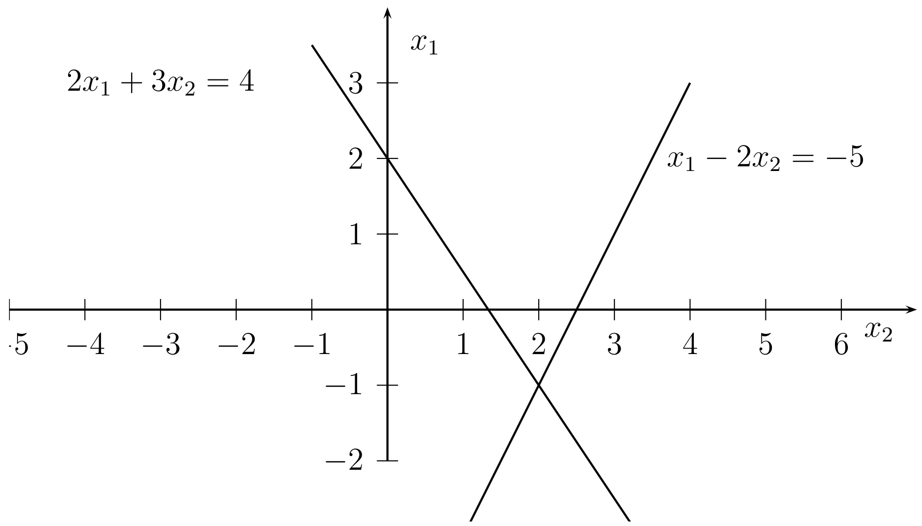


Abbildung 29: Graphische Lösung des Gleichungssystemes

2. **Einsetzungsverfahren:**

   Man löst eine Gleichung nach einer Unbekannten auf und setzt diese in die andere Gleichung ein. Dies ergibt eine Gleichung mit einer Unbekannten, die man wieder elementar lösen kann.

Beispiel 11.4 *Gegeben sei das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ \wedge \quad 4x_1 + 6x_2 &= 8. \end{aligned}$$

Wir lösen die erste Gleichung nach x_1 auf und setzen diese dann in die zweite Gleichung ein:

$x_1 = 2 - \frac{3}{2}x_2$

$$\begin{aligned} 4\left(2 - \frac{3}{2}x_2\right) + 6x_2 &= 8 \\ \Leftrightarrow \quad 8 - 6x_2 + 6x_2 &= 8 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist x_2 beliebig wählbar und als Lösungsmenge ergibt sich eine Geradengleichung: $\mathbb{L} = \left\{ (x_1, x_2) \;\middle|\; x_1 = 2 - \frac{3}{2}x_2,\ x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

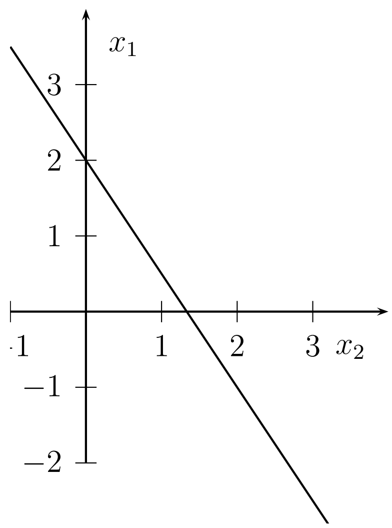


Abbildung 30: Graphische Lösung des Gleichungssystemes

3. **Additionsverfahren:**

   Man addiert das Vielfache (evtl. auch negative Vielfache) einer Gleichung zum Vielfachen der anderen Gleichung und eliminiert auf diese Weise eine Unbekannte.

Beispiel 11.5 *Gegeben sei das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ \wedge\ 4x_1 + 6x_2 &= 10. \end{aligned}$$

Man multipliziert die erste Gleichung mit -2 und addiert sie zur zweiten Gleichung. Dies liefert:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 4x_1 + 6x_2 - 6x_2 &= 10 - 8 \\ \Leftrightarrow\ 0 &= 2. \end{aligned}$$

Dies ergibt einen Widerspruch, d.h. das Gleichungssystem hat keine Lösung:

$$\mathbb{L} = \emptyset.$$

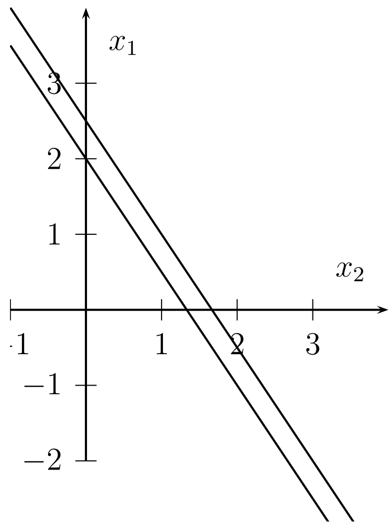


Abbildung 31: Graphische Lösung des Gleichungssystemes

11.2 m Gleichungen mit n Unbekannten

Für mehr Gleichungen mit mehreren Unbekannten sind dies sehr aufwendige Verfahren, bei denen leicht Fehler unterlaufen. Dazu zunächst ein Beispiel für drei Gleichungen mit drei Unbekannten.

Beispiel 11.6 *Gegeben sei das Gleichungssystem*

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ \wedge & x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ \wedge & -x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}$$

Man übernimmt die 1. Gleichung, addiert die 1., die 2. und die 3. Gleichung und addiert die 2. und 3. Gleichung. Dies liefert das folgende System:

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ \wedge & x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ \wedge & 0 & = & 0 \end{array}$$

Damit ist das Tripel $(1-x_2-x_3, x_2, x_3)$ *Lösung des zweiten Systems, aber nicht unbedingt des ersten Systems. Z.B. gilt mit* $(1/3, 1/3, 1/3)$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

aber

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Dieses Beispiel legt nahe, nur solche Umformungen zu verwenden, die die Lösungsmenge nicht verändern. Solche Umformungen nennt man elementare Umformungen.
Zunächst soll aber ein allgemeines lineares Gleichungssystem angegeben werden:

$$\begin{array}{llllll} & a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & + \ldots & +a_{1,n}x_n & = b_1 \\ \wedge & a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & + \ldots & +a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \wedge & & \vdots & & & \vdots \\ \wedge & a_{m-1,1}x_1 & +a_{m-1,2}x_2 & + \ldots & +a_{m-1,n}x_n & = b_{m-1} \\ \wedge & a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & + \ldots & +a_{m,n}x_n & = b_m \end{array}$$

mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$

Oder in der Summenschreibweise:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

mit $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$

Satz 11.7 *Die folgenden drei Operationen sind elementare Umformungen, das heißt, durch ihre Anwendung wird die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht verändert:*

- *Vertauschung von zwei Gleichungen*
- *Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl* $\neq 0$
- *Ersetzen einer Gleichung durch die Summe dieser Gleichung mit dem Produkt einer Zahl* $\neq 0$ *und einer anderen Gleichung. Die anderen Gleichungen werden beibehalten.*

Beweis: Jede der Umformungen läßt sich rückgängig machen. Sei (I) jeweils das System von Gleichungen vor der Umformung und (II) das System nach der Umformung. Offenbar gilt zunächst bei jeder der Umformungen: Wenn y eine Lösung von (I) ist, so ist y auch eine Lösung von (II) (Gleichungen werden nicht falsch, wenn man sie vertauscht, mit einer Zahl multipliziert oder zu einem beliebigen Vielfachen einer anderen Gleichung addiert.)
Ist umgekehrt y eine Lösung von (II), und etwa aus (I) durch Vertauschung der ersten und zweiten Zeile entstanden, so ist nach nochmaliger Vertauschung der ersten und zweiten Zeile y Lösung des dann entstandenen Gleichungssystems (III)=(I). Analog gilt, wenn y eine Lösung von (II) ist und (II) aus (I) durch Multiplikation z.B. der 1. Gleichung mit $c \neq 0$ entstanden ist, daß y auch Lösung des Gleichungssystems (III) ist, das aus (II) durch Multiplikation mit $1/c$ entsteht. Wiederum ist (III)=(I). Ist schließlich das Gleichungssystem (I) der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i, \ 1 \leq i \leq m,$$

ersetzt worden durch das Gleichungssystem (II)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} (a_{1,j} + c a_{2,j}) x_j &= b_1 + c b_2, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j &= b_i, \ 2 \leq i \leq m, \end{aligned}$$

und y löst (II), so löst y auch (III):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} ((a_{1,j} + c a_{2,j}) + (-c) a_{2,j}) x_j &= (b_1 + c b_2) + (-c) b_2, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j &= b_i, \ 2 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Auch hier ist aber (III)=(I). □

Diese Umformungen sind ausreichend, um jedes lineare Gleichungssystem behandeln zu können.

Satz 11.8 *(Gauß-Algorithmus)*
Durch elementare Umformungen läßt sich jedes lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

in die Form:

$$\begin{array}{ccccccc}
c_{1,r_1}x_{r_1} & +c_{1,r_2}x_{r2} & +\dots & \dots & +c_{1,n}x_n & = & d_1 \\
 & c_{2,r_2}x_{r_2} & +\dots & \dots & +c_{2,n}x_n & = & d_2 \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & c_{k,r_k}x_{r_k} \quad \dots & +c_{k,n}x_n & = & d_k \\
 & & & & 0 & = & d_{k+1} \\
 & & & & & \vdots & \\
 & & & & 0 & = & d_m
\end{array}$$

mit $c_{jr_j} \neq 0$ überführen (Dreiecksgestalt).

Eine einfachere Darstellung von linearen Gleichungssystemen ist die Darstellung mittels Matrizen.

Definition 11.9 *Sei M eine nichtleere Menge. Eine $m \times n-$Matrix ist eine Anordnung von $m \cdot n$ Elementen aus M in einem rechteckigen Schema mit m Zeilen und n Spalten:*

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \dots & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Die Menge der $m \times n$-Matrizen bezeichnet man auch mit $M^{m \times n}$ oder $M^{m,n}$. Gebräuchlich für M ist vor allem $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Im Folgenden werden der Einfachheit halber reelle Matrizen betrachtet.

Ein lineares Gleichungssystem $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$ läßt sich somit abkürzend als erweiterte Koeffizientenmatrix schreiben:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \ldots & a_{m-1,n} & b_{m-1} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

oder auch

$$Ax = b.$$

Auf diese Matrixdarstellung für lineare Gleichungssysteme läßt sich der Gauß-Algorithmus in analoger Weise anwenden.

Beispiel 11.10 *Zu Lösen ist folgendes lineare Gleichungssystem:*

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & a \\ \wedge & x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & a - 4 \\ \wedge & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 & = & a + 1 \\ \wedge & 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 0. \end{array}$$

Es ergibt sich folgende erweiterte Koeffizientenmatrix auf die der Gauß-Algorithmus angewendet wird:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 & -1 & a-4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & a+1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2a-4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2a+1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & a \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & a+1/2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4}a \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4}a+2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2}a+4 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2}a+\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2}a+\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}a-2 \end{array}\right)$$

Somit gilt:
$x_1 = a-2,\ x_2 = \dfrac{5}{2},\ x_3 = -\dfrac{3}{2}a+\dfrac{3}{2},\ x_4 = \dfrac{3}{2}a-2$
Also

$$\mathbb{L} = \left\{\left(a-2, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}a-2\right)\right\}$$

Betrachtet wird im Folgenden ein homogenes Gleichungssystem (rechte Seite gleich 0)

$$Ax = 0$$

sowie das zugehörige inhomogene Gleichungssystem (rechte Seite ungleich 0)

$$Ax = b.$$

Satz 11.11 *Ist y_1 eine Lösung von $Ax = b$, dann gilt: y ist Lösung von $Ax = b$ genau dann, wenn $y - y_1$ eine Lösung von $Ax = 0$ ist, (d.h. man erhält die allgemeine Lösung eines inhomogenen Systems, indem man zu einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems addiert).*

Beweis:
$\Rightarrow$:
Seien y, y_1 Lösungen von $Ax = b$ (also $Ay = b = Ay_1$). Dann folgt:

$$A(y-y_1) = Ay - Ay_1 = b - b = 0,$$

also löst $(y - y_1)$ das homogene System.

$\Leftarrow$:
Sei $y - y_1 =: y_2$ Lösung von $Ax = 0$, es gelte also $Ay_2 = 0$. Dann folgt:

$$Ay = A(y_1 + y_2) = Ay_1 + Ay_2 = b + 0 = b,$$

also löst y das inhomogene System. $\square$

Bemerkung 11.12

- *Ein homogenes LGS hat immer 0 als Lösung.*
- *Nach dem letzten Satz hat also das inhomogene System genau dann höchstens eine Lösung, wenn das homogene System nur die triviale Lösung besitzt.*

11.3 Matrizen

Zunächst sollen einige Rechenoperationen mit Matrizen betrachtet werden.

- Addition: Für $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ & \ddots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ & \ddots & \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ & \ddots & \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}$$

- Skalarmultiplikation:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ & \ddots & \\ \lambda a_{m,1} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- Multiplikation: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times l}$ und $B \in \mathbb{R}^{l \times n}$, dann definiert man das Produkt $C = AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zu:

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,l} \\ & \ddots & \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,l} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ & \ddots & \\ b_{l,1} & \dots & b_{l,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ & \ddots & \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix}$$

mit $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{l} a_{i,k}b_{k,j},\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$

Merke: Anzahl der Spalten von A = Anzahl der Zeilen von B, damit $C = AB$ definiert ist. C hat die Zeilenanzahl von A und die Spaltenanzahl von B.

Beispiel 11.13

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 5 & 8 & 11 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 21 & 17 \\ 14 & 8 & 10 \\ 13 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist Beispiel 3 ein Teil von Beispiel 2, allgemein hat man, wenn $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und etwa $b_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ Spaltenvektoren der Länge n sind:

$$A \cdot (b_1\ b_2\ b_3\ b_4) = (Ab_1\ Ab_2\ Ab_3\ Ab_4)$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = ?$$

$$n = 1: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n = 2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n = 3: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n = 4: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vermutung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & (\frac{1}{2}n(n-1)) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis:

I.A: $n = 1$ $\surd$

I.V: Es gilt: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & (\frac{1}{2}n(n-1)) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

I.S: $n \to n+1$ *zz:* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & (\frac{1}{2}(n+1)n) \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n & (\frac{1}{2}n(n-1)) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n + \frac{1}{2}n(n-1) \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{1}{2}n\overbrace{(2+(n-1))}^{n+1} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Bemerkung 11.14 *Eigenschaften der Matrizenrechnung:*

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. $A+B = B+A$
3. $A+0 = A$
4. $A+(-A) = 0$
5. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
6. $1 \cdot A = A$

7. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

8. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

9. $A \cdot (B + C) = AB + AC$

10. $(B + C)A = BA + CA$

11. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

12. *Die Multiplikation ist nicht kommutativ. Kommutativität käme, wenn überhaupt, nur für quadratische Matrizen in Frage. Es ist aber z.B.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aber

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13. *Die Matrizenmultiplikation ist nicht nullteilerfrei: Es gilt zwar für jede Matrix A, daß $A \cdot 0 = 0$, aber nicht: $A \cdot B = 0 \;\Rightarrow A = 0 \vee B = 0$ (siehe Kommutativität).*

Bezeichung 11.15

1. *Eine quadratische Matrix der Form*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ heißt Einheitsmatrix.}$$

Für alle quadratischen Matrizen A gilt: $A \cdot E = E \cdot A = A$.

2. *Gibt es zur Matrix A eine Matrix B mit $A \cdot B = E = B \cdot A$, dann heißt B inverse Matrix zu A ($B = A^{-1}$). A heißt in dem Fall regulär.*

Satz 11.16 *Gibt es zu A Matrizen B und C mit $B \cdot A = E$ und $A \cdot C = E$, dann gilt $B = C$.*

Beweis:

$$B = B \cdot E = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = C$$

□

Folgerung 11.17 *A hat höchstens eine inverse Matrix.*

Beweis: Annahme: Es gibt zwei inverse Matrizen B, C mit $B \neq C$, dann gilt:

$$BA = E,\ AB = E,\ CA = E,\ AC = E$$

mit Satz 11.16 folgt $B = C$. □

Beispiel 11.18

1. *Inverse Matrix zu E.*

   Es ist nach Definition der inversen Matrix

   $$E^{-1} \cdot E = E$$

   und nach Definition der Einheitsmatrix

   $$E \cdot E = E.$$

   Nach der Eindeutigkeit der inversen Matrix folgt:

   $$E^{-1} = E.$$

2. *Gegeben:*

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

   Gesucht:

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

   Lösung:

   $$A \cdot A^{-1} = E$$

führt auf

$$\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man erhält also das folgende Gleichungssystem für e, f, g, h (je zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten):

$$\begin{array}{lrcl} (1) & ae+bg & = & 1 \\ (2) & ce+dg & = & 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lrcl} (3) & af+bh & = & 0 \\ (4) & cf+dh & = & 1 \end{array}$$

Multipliziere (1) mit c, (2) mit $-a$ und addiere beide Gleichungen, damit folgt:
$g = \frac{-c}{ad-bc}$ *und* $e = \frac{d}{ad-bc}$. *Analoges Vorgehen für (3) und (4) liefert:*
$h = \frac{a}{ad-bc}$ *und* $f = \frac{-b}{ad-bc}$, *also*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Satz 11.19 *Ist A^{-1} die inverse Matrix zu A, so gilt:*

1. *A^{-1} ist invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *Sind A, B invertierbar, dann ist auch $A \cdot B$ invertierbar mit*
$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$
3. *Die Inverse einer Matrix läßt sich mit dem Gauß-Algorithmus berechnen.*

Beweis:

1. Rechne nach, daß A die Eigenschaft einer Inversen zu A^{-1} besitzt, aus der Eindeutigkeit der Inversen folgt dann die Behauptung.

2. Rechne nach, daß $B^{-1}A^{-1}$ die Eigenschaft einer Inversen zu AB besitzt, auch hier folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit der Inversen.

3. Gesucht ist B mit

$$\begin{aligned} AB &= E \\ \Rightarrow \quad A \cdot (b_1 \; b_2 \; \ldots \; b_n) &= (e_1 \; e_2 \; \ldots \; e_n) \end{aligned}$$

wobei

$$(e_i)_k = \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

Löse also

$$\begin{aligned} Ax_1 = e_1 \quad &\Rightarrow \quad b_1 = x_1 \\ Ax_2 = e_2 \quad &\Rightarrow \quad b_2 = x_2 \\ \text{usw.} \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 11.20

1. *Gegeben:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bezeichnet man die Inverse mit X, so gilt $AX = E$, d.h.

$$A \cdot (x_1 \; x_2 \; x_3) = (e_1 \; e_2 \; e_3)$$

$$\textit{löse also:} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \; \textit{und} \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \; \textit{und} \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Zusammengefasst:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Die rechte Hälfte des Schemas ist nun genau A^{-1}.

2. *Gegeben:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier liefert das Verfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die rechte Hälfte des Schemas ist genau B^{-1}.

11.4 Übungsaufgaben

1. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme

   a)

$$\begin{array}{rrrrrrrr} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -6 \\ \wedge & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -10 \\ \wedge & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & = & -18 \end{array}$$

   b)

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & -6x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 2 \\ \wedge & -9x_1 & + & 8x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ \wedge & -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ \wedge & -15x_1 & + & 14x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 5 \end{array}$$

   c)

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & 2x_1 & + & 6x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & = & -6 \\ \wedge & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 15x_4 & = & 6 \\ \wedge & 4x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 6 \\ \wedge & & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 14 \end{array}$$

Literatur

[Heu90] H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1; Teubner, Stuttgart, 1990.

[Kon92] A. H. Konforowitsch: Logischen Katastrophen auf der Spur, Mathematische Sophismen und Paradoxa; Fachbuchverlag, Leipzig, 1992.

[Sch71] K. Schick: Aussagenlogik, Eine leichtverständliche Einführung in elementare Probleme der modernen Logik; Herder, 1971.

[SG94] W. Schäfer, K. Georgi, G. Trippler: Mathematik Vorkurs, Übungs- und Arbeitsbuch für Studienanfänger; Teubner, Stuttgart, 2006.

[RS94] H.-J. Reinhardt, F. Seiffart: Arbeitsmaterialien zur Analysis I+II; Vorlesungsskriptum, Fachbereich Mathematik, Universität-GH Siegen, 1994.

[CDD06] M. Charton, M. Dücker, M. Demmerling: Vorkurs Mathematik (überarbeitete Version 2006), Skript, Fachbereich Mathematik, Universität Siegen 2006